Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2023. Том 64, № 5

УДК 517.912+517.925

ИНВАРИАНТНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ ДВОЙНОЙ КОНВЕКЦИИ РАКЛИДЖА

М. В. Демина, Д. О. Илюхин

Аннотация. Инвариантные многообразия играют большую роль при описании динамики систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящей работе проводится классификации инвариантных алгебраических многообразий для модели двойной конвекции, описываемой трехмерной квадратичной дифференциальной системой. Найдены явные представления решений этой системы, траектории которых лежат на инвариантных многообразиях.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.507

Ключевые слова: инвариантные многообразия, ряды Пюизе, алгебраические инварианты.

1. Введение

Для моделирования конвекции в горизонтальном слое жидкости, удовлетворяющей приближению Буссинеска, Раклидж предложил [1] квадратичную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_t = -\alpha x + \beta y - yz, \\ y_t = x, \\ z_t = -z + y^2, \end{cases} \tag{1}$$

которая в настоящее время носит название системы Раклиджа. Функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ представляют собой весовые коэффициенты в методе Галеркина, который применяется при решении краевой задачи для уравнений в частных производных, описывающих исходную модель. Параметры α и β безразмерные и вещественнозначные. Система (1) активно изучается в последние годы [1, 2]. Хорошо известно, что при определенных значениях параметров α и β эта система имеет хаотический аттрактор [1, 3, 4], см. также [5–10].

Подмногообразие в фазовом пространстве трехмерной системы вида (1) называют *инвариантным многообразием* этой системы, если оно инвариантно относительно фазового потока системы. Другими словами, орбиты, которые начинаются на инвариантном многообразии, остаются на нем. Инвариантное многообразие является алгебраическим, если оно лежит на пересечении k алгебраических поверхностей, где $k = 1$ или $k = 2$. При этом k представляет собой коразмерность соответствующего инвариантного алгебраического многообразия.

Работа подготовлена в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ).

© 2023 Демина М. В., Илюхин Д. О.

Если исследуемой трехмерной системе методом исключения переменных или с помощью обратимых преобразований можно поставить в соответствие полиномиальное обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, то для построения инвариантных алгебраических многообразий удобно использовать концепцию совместных дифференциальных уравнений. Два обыкновенных дифференциальных уравнения порядков n и l, где $l < n$, будем называть *совместными*, если каждое непостоянное решение уравнения порядка l одновременно является решением уравнения порядка n. Порядок $l < 3$ совместного полиномиального дифференциальных уравнения связан с коразмерностью соответствующего инвариантного алгебраического многообразия с помощью равенства $k = 3 - l$. Исключая переменные x и z из системы (1), приходим к уравнению

$$yy_{ttt} - (y_t - y - \alpha y)y_{tt} - \alpha(y_t)^2 + \alpha y y_t + y^4 - \beta y^2 = 0, \tag{2}$$

которое будем называть *обыкновенным дифференциальным уравнением Раклиджа.* Заметим, что при исключении переменных из системы (1) функция y стоит в знаменателе преобразований. Соответствующие формулы (см. (17)) приведены в разд. 4. В результате теряется инвариантное алгебраическое многообразие коразмерности 2, которое лежит на пересечении алгебраических поверхностей $y = 0$ и $x = 0$. Это многообразие содержит три траектории системы: точку покоя $(0, 0, 0)$ и траектории вида $(0, 0, c\exp(-t))$, где $c > 0$ и $c < 0$.

Лима с соавторами показали [2], что система Раклиджа (1) не имеет инвариантных алгебраических многообразий коразмерности 1. В [2] использовался метод разложения векторного поля на весооднородные компоненты. Заметим, что этот же результат непосредственно следует из метода Йошиды [11] и существования асимптотических рядов, удовлетворяющих уравнению (2) и имеющих пару комплексно сопряженных показателей Ковалевской. Показатели Ковалевской представляют собой числа, характеризующие номера коэффициентов асимптотических рядов, которые могут оставаться произвольными. Таким образом, в настоящей работе мы будем интересоваться инвариантными алгебраическими многообразиями коразмерности 2. Наша задача состоит в построении всех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида $F(y, y_t) = 0$, где $F(y, u) \in \mathbb{C}[y, u] \setminus \mathbb{C}[y]$, совместных с уравнением (2). Символом $\mathbb{C}[v_1, \dots, v_n]$ обозначается кольцо многочленов от n переменных с коэффициентами из поля $\mathbb{C}$. Всюду далее будем работать над полем комплексных чисел, поэтому все параметры и функции будут комплекснозначными. Разумеется, при анализе физической применимости результатов мы вернемся к вещественным числам. Многочлен $F(y, u)$, определяющий уравнение $F(y, y_t) = 0$, совместное с исходных уравнением, будем называть *алгебраическим инвариантом.* Если многочлен $F(y, u)$ неприводим в кольце $\mathbb{C}[y, u]$, то соответствующий алгебраический инвариант назовем *неприводимым.* Предполагаем, что алгебраические инварианты, связанные преобразованием $F(x, y) \mapsto cF(x, y)$, где $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, принадлежат одному и тому же классу эквивалентности. Будем рассматривать только одного представителя из каждого класса. Основная трудность при построении алгебраических инвариантов обусловлена тем, что степени неприводимых алгебраических инвариантов заранее неизвестны.

Основным результатом статьи является

Теорема 1.1. *Обыкновенное дифференциальное уравнение Раклиджа* (2) *имеет неприводимые алгебраические инварианты тогда и только тогда, когда*

параметры (α, β) *принимают одно из следующих значений:*

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \ \left(2, -\frac{15}{16}\right), \ \left(2, \frac{105}{16}\right), \ \left(\frac{7}{8}, \frac{15}{256}\right), \ \left(\frac{13}{2}, -\frac{15}{2}\right). \tag{3}$$

Все неприводимые алгебраические инварианты уравнения Раклиджа (2) приведены ниже в табл. 1. Статья организована следующим образом. Разд. 2 посвящен методу рядов Пюизе, который будет использоваться для классификации алгебраических инвариантов. В разд. 3 доказана теорема 1.1. В разд. 4 в явном виде найдены решения системы Раклиджа (1), траектории которых лежат на инвариантных алгебраических многообразиях.

2. Алгебраические инварианты обыкновенных дифференциальных уравнений

В этом разделе опишем метод построения алгебраических инвариантов обыкновенного дифференциального уравнения вида

$$E\big(y, y_t, \dots, y_t^{(n-1)}, y_t^{(n)}\big) = 0, \quad n \in \mathbb{N},\ n > 1, \tag{4}$$

где E — многочлен своих аргументов. Будем использовать метод рядов Пюизе, предложенный в [12], см. также [13–15]. Дифференциальное уравнение (4) является автономным. Следовательно, можно понизить его порядок с помощью новой зависимой функции $u(y)$, определяемой соотношением $y_t = u(y)$. Для производных более высоких порядков находим

$$y_{tt} = uu_y, \quad y_{ttt} = u^2 u_{yy} + uu_y^2, \dots . \tag{5}$$

В результате приходим к следующему неавтономному обыкновенному дифференциальному уравнению порядка $n-1$:

$$H\big(y, u, u_y, \dots, u_y^{(n-1)}\big) = 0. \tag{6}$$

В этом выражении H представляет собой многочлен своих аргументов. Уравнение (6) будет играть ключевую роль в дальнейшем анализе.

Дробно-степенные ряды, или ряды Пюизе, являются обобщениями рядов Лорана. Ряд Пюизе с центром в точке $y_0 \in \mathbb{C}$, выглядит следующим образом:

$$u(y) = \sum_{l=0}^{+\infty} c_l (y - y_0)^{\frac{n_0+l}{n_1}}, \quad c_0 \neq 0, \tag{7}$$

где $n_0 \in \mathbb{Z}$ и $n_1 \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности предполагаем, что число n_1 является взаимно простым с наибольшим общим делителем чисел $\{n_0 + l : c_l \neq 0, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Аналогично ряд Пюизе с центром в точке $y = \infty$ имеет вид

$$u(y) = \sum_{l=0}^{+\infty} b_l y^{\frac{n_0-l}{n_1}}, \quad b_0 \neq 0, \tag{8}$$

где $n_0 \in \mathbb{Z}$ и $n_1 \in \mathbb{N}$. Опять считаем, что число n_1 является взаимно простым с наибольшим общим делителем чисел $\{n_0 - l : b_l \neq 0, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Число n_1 называют *индексом ветвления* соответствующего ряда.

Множество всех формальных рядов Пюизе вида (7) или (8) образует алгебраически замкнутое поле, которое будем обозначать символом $\mathbb{C}_{y_0}\{y\}$ или $\mathbb{C}_\infty\{y\}$

соответственно. Также будем работать с кольцами многочленов от одной переменной, коэффициенты которых лежат в поле $\mathbb{C}_{y_0}\{y\}$ или $\mathbb{C}_\infty\{y\}$. Для соответствующих колец введем обозначения $\mathbb{C}_{y_0}\{y\}[u]$ или $\mathbb{C}_\infty\{y\}[u]$. Поля $\mathbb{C}_{y_0}\{y\}$ и $\mathbb{C}_\infty\{y\}$, снабженные операторами дифференцирования $(\partial_y)^j\colon \mathbb{C}_{y_0}\{y\} \to \mathbb{C}_{y_0}\{y\}$, где $y_0 \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ и $j \in \mathbb{N}$, становятся дифференциальными полями. Ряды Пюизе $u_1(y)$ и $u_2(y)$ из поля $\mathbb{C}_{y_0}\{y\}$, где опять $y_0 \in \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, будем называть *различными*, если $u_1(y) - u_2(y) \neq O_{y_0}$. Символом O_{y_0} обозначен нулевой элемент поля $\mathbb{C}_{y_0}\{y\}$.

Предположим, что $S(y,u)$ является элементом кольца $\mathbb{C}_\infty\{y\}[u]$. Введем два оператора проектирования, действующие в этом кольце. Результатом действия оператора $\{S(y,u)\}_+$ будет являться сумма мономов $S(y,u)$ с неотрицательными целыми степенями. Другими словами, $\{S(y,u)\}_+$ определяет полиномиальную часть выражения $S(y,u)$. Аналогично проекция $\{S(y,u)\}_- = S(y,u) - \{S(y,u)\}_+$ задает неполиномиальную часть выражения $S(y,u)$. Нетрудно убедиться, что эти проекции являются линейными операторами.

Далее нам потребуются следующие теоретические результаты, доказанные в [12].

Теорема 2.1. *Пусть $F(y,u) \in \mathbb{C}[y,u] \setminus \mathbb{C}[y]$ — неприводимый алгебраический инвариант уравнения* (4) *степени $N \in \mathbb{N}$ относительно переменной u. Тогда существуют многочлен $\mu(y) \in \mathbb{C}[y]$ и попарно различные ряды Пюизе $u_{1,\infty}(y)$, $\ldots$, $u_{N,\infty}(y)$ из поля $\mathbb{C}_\infty\{y\}$, которые удовлетворяют уравнению* (6)*, такие, что справедливо представление*

$$F(y,u) = \left\{ \mu(y) \prod_{n=1}^{N} \{u - u_{n,\infty}(y)\} \right\}_+ . \tag{9}$$

Более того, степень N многочлена $F(y,u)$ относительно переменной u не превосходит числа различных рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{y\}$, удовлетворяющих уравнению (6)*, если это число конечно.*

Здесь и далее старший коэффициент относительно переменной y алгебраического инварианта $F(y,u)$ обозначаем символом $\mu(y)$.

Лемма 2.1. *Пусть $F(y,u) \in \mathbb{C}[y,u] \setminus \mathbb{C}[y]$ — неприводимый алгебраический инвариант уравнения* (4)*. Если $y_0 \in \mathbb{C}$ является нулем многочлена $\mu(y)$, то существует по крайней мере один ряд Пюизе из поля $\mathbb{C}_{y_0}\{y\}$, удовлетворяющий уравнению* (6)*, такой, что в выражении* (7) *для числа $n_0 \in \mathbb{Z}$ выполнено $n_0 < 0$.*

Теорема 2.1 лежит в основе следующего метода построения алгебраических инвариантов.

На первом шаге следует найти все ряды Пюизе с центрами в конечных точках и на бесконечности, которые являются формальными решениями уравнения (6).

На втором шаге используется теорема 2.1 для того, чтобы записать разложение на множители (9) неприводимого алгебраического инварианта в кольце $\mathbb{C}_\infty\{y\}[u]$. Допустимые нули многочлена $\mu(y)$ могут быть получены с помощью рядов Пюизе в окрестности конечных точек $y_0 \in \mathbb{C}$, имеющих отрицательные показатели степеней в доминантных членах (см. лемму 2.1 и работу [12]). Заметим, что на этом шаге должны быть рассмотрены всевозможные комбинации рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{y\}$, найденных на первом шаге. Если ряд Пюизе с индексом ветвления больше единицы появляется в представлении (9), то все сопряженные

ряды Пюизе

$$u(y) = \sum_{l=0}^{+\infty} (\varepsilon_{n_1})^{m(n_0-l)} b_l y^{\frac{n_0-l}{n_1}}, \quad m = 0, \dots, n_1 - 1, \tag{10}$$

получающиеся друг из друга в результате обходов вокруг точки $y = \infty$, должны также появляться в этом представлении (9). Символом ε_{n_1} в выражении (10) обозначен примитивный корень степени n_1 из единицы. Далее, необходимо потребовать, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\left\{ \mu(y) \prod_{j=1}^{N} \{u - u_{\infty,j}(y)\} \right\}_{-} = 0, \tag{11}$$

которое порождает алгебраическую систему, состоящую, вообще говоря, из бесконечного числа уравнений. Теорема Гильберта о базисе позволяет работать с конечными подсистемами.

Третий шаг состоит в решении конечной алгебраической подсистемы и проведении проверки. Требуется убедиться, что совместны дифференциальное уравнение (6) и алгебраическое уравнение $F(y, u) = 0$, где $F(y, u)$ определяется формулой (9).

3. Алгебраические инварианты уравнения Раклиджа

Целью этого раздела является нахождение всех неприводимых алгебраических инвариантов уравнения Раклиджа (2). Понижая порядок в этом уравнении, находим

$$yu^2 u_{yy} + yuu_y^2 - (u^2 - (\alpha + 1)yu)u_y - \alpha u^2 + \alpha yu + y^4 - \beta y^2 = 0. \tag{12}$$

Для построения формальных рядов Пюизе, удовлетворяющих уравнению (12), воспользуемся алгоритмами степенной геометрии [16, 17].

Доказательство теоремы 1.1. Многоугольник Ньютона уравнения (12) изображен на рис. 1. Анализируя укороченные уравнения, соответствующие всем вершинам и ребрам этого многоугольника, видим, что только ребро $[Q_1, Q_2]$ порождает формальные решения уравнения (12), являющиеся рядами Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{y\}$. Укороченное уравнение, соответствующее этому ребру, имеет вид

$$yu^2 u_{yy} + yuu_y^2 - u^2 u_y - \alpha u^2 + y^4 = 0. \tag{13}$$

Найдем степенные решения этого уравнения. В результате получим $u(y) = b_0^{(j)} y^{5/3}$, где $j = 1, 2, 3$. Числа $b_0^{(1)}$, $b_0^{(2)}$ и $b_0^{(3)}$ представляют собой попарно различные корни уравнения $20(b_0)^3 + 9 = 0$. Укороченное уравнение (13) является алгебраическим и не имеет кратных степенных решений. Следовательно, только три попарно различных ряда Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{y\}$ удовлетворяют уравнению (12):

$$u_j(y) = b_0^{(j)} y^{\frac{5}{3}} + \sum_{l=1}^{+\infty} b_l^{(j)} y^{\frac{5-l}{3}}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{14}$$

Заметим, что ряды (14) являются сопряженными. Все коэффициенты рядов (14) могут быть последовательно вычислены. Далее сделаем в уравнении (12) замену независимой переменной $y = y_0 + s$, где y_0 — произвольное комплексное число.

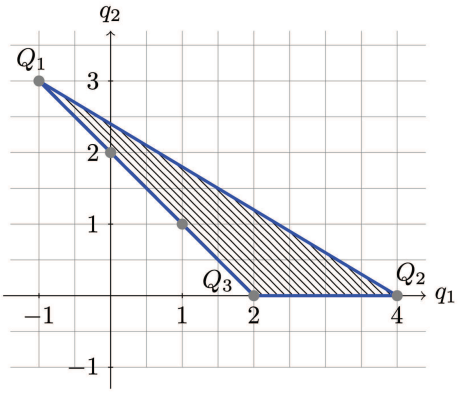


Рис. 1. Многоугольник Ньютона уравнения (12) при $\alpha\beta \neq 0$.

Таблица 1. Неприводимые алгебраические инварианты уравнения Раклиджа

$\mathscr{N}$	Параметры	Алгебраический инвариант $F(y,u)$, $\quad u = y_t$
1	$(\alpha,\beta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$u^3 + \frac{3u^2y}{2} + \frac{9y^5}{20} - \frac{y^3}{2}$
2	$(\alpha,\beta) = \left(2, -\frac{15}{16}\right)$	$u^3 + \frac{9yu^2}{4} + \frac{27y^2u}{16} + \frac{9y^5}{20} + \frac{27y^3}{64}$
3	$(\alpha,\beta) = \left(2, \frac{105}{16}\right)$	$u^3 + \frac{9yu^2}{4} + \frac{27y^2u}{16} - \frac{405u}{8} + \frac{9y^5}{20} - \frac{1053y^3}{64} + \frac{2835y}{32}$
4	$(\alpha,\beta) = \left(\frac{7}{8}, \frac{15}{256}\right)$	$u^3 + \frac{27yu^2}{16} + \frac{27y^2u}{64} - \frac{405u}{16384} + \frac{9y^5}{20} - \frac{27y^3}{512} + \frac{405y}{262144}$
5	$(\alpha,\beta) = \left(\frac{13}{2}, -\frac{15}{2}\right)$	$u^3 + \frac{9yu^2}{2} + \frac{27y^2u}{4} + \frac{9y^5}{20} + \frac{27y^3}{8}$

Проанализировав все существующие степенные асимптотики получающегося после замены уравнения, видим, что решения этого уравнения не имеют степенных асимптотик вида $u(y) = c_0(y-y_0)^r$, $y \to y_0$, где $c_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{Q}$ и $r < 0$. Согласно результатам теоремы 1.1 и леммы 2.1 неприводимые алгебраические инварианты уравнения (12) представляются в виде

$$F(y,u) = \left\{ \mu(y) \prod_{j=1}^{3} (u - u_j(y))^{n_j} \right\}_+, \tag{15}$$

где $\mu(y)$ — константа, $n_j = 0$ или $n_j = 1$, $j = 1,2,3$. Без ограничения общности положим $\mu(y) = 1$. В силу сопряженности рядов (14) возможен только вариант $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. Составляя и решая алгебраическую систему

$$\left\{ \left(u - b_0^{(1)} y^{\frac{5}{3}} - \dots\right)\left(u - b_0^{(2)} y^{\frac{5}{3}} - \dots\right)\left(u - b_0^{(3)} y^{\frac{5}{3}} - \dots\right) \right\}_- = 0, \tag{16}$$

находим ограничения на параметры (α,β), представленные в табл. 1. Для применения оператора проектирования и построения неприводимых алгебраических инвариантов считаем коэффициенты каждого из рядов Пюизе до монома $x^{-10/3}$ включительно. Теорема доказана.

В заключение этого раздела отметим, что метод рядов Пюизе может использоваться для классификации алгебраических инвариантов, даже если число рядов Пюизе из поля $\mathbb{C}_\infty\{y\}$, удовлетворяющих уравнению (6), бесконечно [13, 18, 19].

4. Траектории системы Раклиджа, лежащие на инвариантных алгебраических многообразиях

Инвариантные алгебраические кривые $F(y,u)=0$, соответствующие инвариантам $F(y,u)$ из табл. 1, имеют нулевой род. Для построения решений, порождаемых инвариантами, вспомним, что $u=y_t$, и применим описанный ниже алгоритм.

Хорошо известно, что любая алгебраическая кривая $F(y,u)=0$, $F(y,u)\in\mathbb{C}[y,u]\setminus\mathbb{C}[y]$, нулевого рода имеет рациональные параметризации. Другими словами, существуют непостоянные функции $Y(s)$, $U(s)\in\mathbb{C}(s)$, такие, что подстановка $y=Y(s)$ и $u=U(s)$ в уравнение $F(y,u)=0$ обращает его в тождество. Символом $\mathbb{C}(s)$ обозначено поле рациональных функций над $\mathbb{C}$. Возьмем такую параметризацию. Далее положим $s=s(t)$ и найдем общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $Y_s(s)s_t-U(s)=0$. Это уравнение является прямым следствием соотношений $u=y_t(t)$ и $y=y(t)$. Тогда соответствующие решения можно представить в виде $y(t)=Y(s(t))$, где $s(t)$ — общее решение уравнения $Y_s(s)s_t-U(s)=0$. Отметим, что получение явного представления для функции $s(t)$ может оказаться затруднительным. В этом случае удобно поменять роли переменных s и t. Будем считать переменную s независимой, а переменную t — зависимой. Для того чтобы найти общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $U(s)t_s-Y_s(s)=0$, необходимо проинтегрировать рациональную функцию $Y_s(s)/U(s)$. В результате можно получить параметрическое представление для решения $y(t)$: $y=Y(s)$, $t=t(s)$.

Функции $x(t)$ и $z(t)$ системы Раклиджа (1) связаны с функцией $y(t)$ следующим образом:

$$x=y_t,\quad z=\beta-\frac{y_{tt}+\alpha y_t}{y}. \tag{17}$$

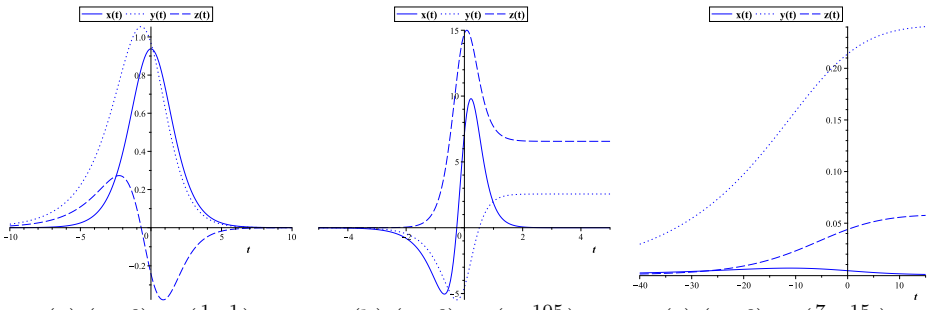
Полученные решения представлены в табл. 2. Дифференциальное уравнение Раклиджа (2) и дифференциальные уравнения $F(y,y_t)=0$, соответствующие алгебраическим инвариантам, являются автономными. Следовательно, для каждого точного решения существует семейство решений, полученное в результате преобразования $t\mapsto t-t_0$, где $t_0\in\mathbb{C}$. В формулах табл. 2 параметр t_0 без ограничения общности опущен. Решения с номерами 2 и 5 не являются вещественнозначными на вещественной оси. Все остальные решения гладкие и вещественнозначные на вещественной оси. Для каждого из решений табл. 2 можно выбирать оба знака для квадратного корня. При этом знаки для функций $x(t)$ и $y(t)$ должны быть согласованы. На рис. 2 изображены решения, важные с прикладной точки зрения. При $\beta>0$ система Раклиджа (1) имеет три вещественнозначные особые точки: $p_1=(0,0,0)$, $p_2=(0,\sqrt{\beta},\beta)$ и $p_3=(0,-\sqrt{\beta},\beta)$. График на рис. 2(a) соответствует гомоклинической траектории особой точки p_1. Графики на рис. 2(b) и 2(c) соответствуют гетероклиническим траекториям, соединяющим особые точки p_1 и p_2. В силу системы (1) видим, что $u=x(t)$. Подставляя $u=x$ в явные выражения для алгебраических инвариантов табл. 2, можно получить проекции соответствующих траекторий на плоскость (x,y). На рис. 3 приведены проекции на плоскость (x,y) траекторий системы Раклиджа (1), лежащих на инвариантных алгебраических многообразиях коразмерности 2.

5. Заключение

В работе найдены все инвариантные алгебраические многообразия коразмерности 2 для системы Раклиджа (1), являющейся моделью конвекции в гори-

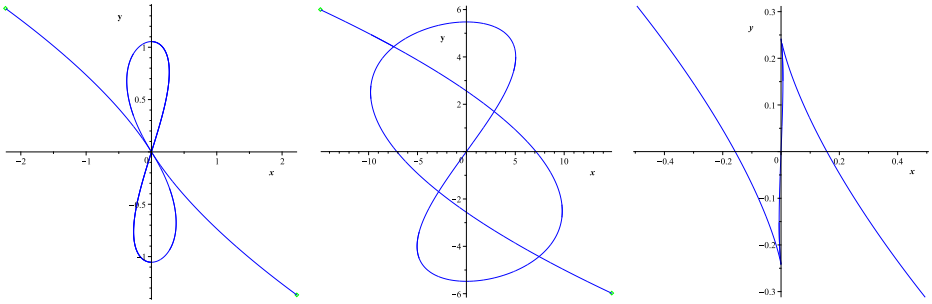
Таблица 2. Решения системы Раклиджа, порождаемые инвариантными алгебраическими многообразиями коразмерности 2

$\mathscr{N}$	Параметры	$x(t)$	$y(t)$	$z(t)$
1	$(\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{30}(1-2e^t)e^{\frac{t}{2}}}{4(e^t+1)^{\frac{5}{2}}}$	$\frac{\sqrt{30}e^{\frac{t}{2}}}{2(e^t+1)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{15e^t}{4(e^t+1)^2}$
2	$(\alpha,\beta)=\left(2,-\frac{15}{16}\right)$	$\frac{3\sqrt{-15}e^{\frac{t}{2}}}{16(e^{\frac{t}{2}}+1)^{\frac{5}{2}}}$	$\frac{\sqrt{-15}}{4(e^{\frac{t}{2}}+1)^{\frac{3}{2}}}$	$-\frac{15}{16(e^{\frac{t}{2}}+1)^2}$
3	$(\alpha,\beta)=\left(2,\frac{105}{16}\right)$	$\frac{21\sqrt{105}e^{\frac{7t}{4}}(5e^{\frac{7t}{2}}-2)}{16(e^{\frac{7t}{2}}+1)^{\frac{5}{2}}}$	$\frac{\sqrt{105}e^{\frac{7t}{4}}(e^{\frac{7t}{2}}-6)}{4(e^{\frac{7t}{2}}+1)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{105e^{\frac{7t}{2}}(e^{\frac{7t}{2}}+8)}{16(e^{\frac{7t}{2}}+1)^2}$
4	$(\alpha,\beta)=\left(\frac{7}{8},\frac{15}{256}\right)$	$\frac{3\sqrt{15}e^{\frac{t}{16}}}{512(e^{\frac{t}{8}}+1)^{\frac{5}{2}}}$	$\frac{\sqrt{15}e^{\frac{t}{16}}(2e^{\frac{t}{8}}+3)}{32(e^{\frac{t}{8}}+1)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{15e^{\frac{t}{8}}(e^{\frac{t}{8}}+2)}{256(e^{\frac{t}{8}}+1)^2}$
5	$(\alpha,\beta)=\left(\frac{13}{2},-\frac{15}{2}\right)$	$\frac{3\sqrt{-30}e^t}{4(e^t+1)^{\frac{5}{2}}}$	$\frac{\sqrt{-30}}{2(e^t+1)^{\frac{3}{2}}}$	$-\frac{15(e^t+2)}{4(e^t+1)^2}$



(a) $(\alpha,\beta)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (b) $(\alpha,\beta)=(2,\frac{105}{16})$ (c) $(\alpha,\beta)=(\frac{7}{8},\frac{15}{256})$

Рис. 2. Графики некоторых решений системы Раклиджа, лежащих на инвариантных алгебраических многообразиях коразмерности 2.



(a) $(\alpha,\beta)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (b) $(\alpha,\beta)=(2,\frac{105}{16})$ (c) $(\alpha,\beta)=(\frac{7}{8},\frac{15}{256})$

Рис. 3. Проекции на плоскость (x,y) траекторий системы Раклиджа, лежащих на инвариантных алгебраических многообразиях коразмерности 2.

зонтальном слое жидкости. Не так давно было показано [2], что у исследуемой системы нет инвариантных алгебраических многообразий коразмерности 1. Таким образом, в нашей работе приведена полная классификация инвариантных алгебраических многообразий системы (1). Построены все решения изучаемой системы, траектории которых лежат на инвариантных алгебраических многообразиях, и выделены решения, важные с физической точки зрения. Ранее не было

известно ни одного нетривиального решения системы Раклиджа (1) с явным представлением.

В качестве моделей конвекции широко используются и некоторые другие квадратичные трехмерные дифференциальные системы, в частности, хорошо известные системы Лоренца [9, 10, 20, 21] и Шимицу — Мориока [5–10, 22]. Система Лоренца применяется при небольших значениях числа Рейнольдса. Хорошее согласование с результатами численного моделирования исходной начально-краевой задачи для соответствующих уравнений в частных производных при больших значениях числа Рейнольдса показывают решения, построенные с помощью системы Раклиджа и Шимицу — Мориока. Система Шимицу — Мориока имеет вид

$$\begin{cases} X_T = Y, \\ Y_T = X - \delta Y - XZ, \\ Z_T = -\varrho Z + X^2. \end{cases} \tag{18}$$

Система Раклиджа (1) при $\beta \neq 0$ преобразованием вида $x = \varepsilon^5 Y, y = \varepsilon^3 X, z = \varepsilon^4 Z$ и $t = T/\varepsilon^2$, где ε — любой из корней уравнения $\varepsilon^4 - \beta = 0$, может быть сведена к системе (18) с параметрами $\delta = \alpha/\varepsilon^2$ и $\varrho = 1/\varepsilon^2$. Следовательно, все результаты настоящей работы непосредственно переносятся на систему Шимицу — Мориока (18) при $\varrho \neq 0$.

Получены интересные с прикладной точки зрения явные представления для некоторых гомоклинических и гетероклинических траекторий системы Раклиджа (1) при следующих значениях параметров (α, β): $(1/2, 1/2)$, $(2, 105/16)$ и $(7/8, 15/256)$. Согласно результатам работы [1] (см. также [3, 7, 8, 10]) система Раклиджа (1) при $(\alpha, \beta) = (2, 105/16)$ имеет хаотические траектории, и, в частности, аттрактор Лоренца. При других значениях параметров из списка выше хаос в соответствующей системе не обнаружен. В заключение отметим, что наш подход достаточно общий и может использоваться при построении и исследовании инвариантных алгебраических многообразий коразмерности $n - 1$ других n-мерных дифференциальных систем.

Благодарность. Авторы благодарны рецензенту за ценные замечания и комментарии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rucklidge A. M.* Chaos in models of double convection // J. Fluid Mechanics. 1992. V. 237. P. 209–229.
2. *Lima M. F. S., Llibre J., Valls C.* Integrability of the Rucklidge system // Nonlinear Dynamics. 2014. V. 77. P. 1441–1453.
3. *Dong N., Jia L., Jie Q., Li H.* Symbolic encoding of periodic orbits and chaos in the Rucklidge system // Complexity. 2021. 4465151.
4. *Wang X.* Sil′nikov chaos and Hopf bifurcation analysis of Rucklidge system // Chaos Solitions Fractals. 2009. V. 42. P. 2208–2217.
5. *Shimizu T., Morioka N.* On the bifurcation of a symmetric limit cycle to an asymmetric one in a simple model // Phys. Lett. A. 1980. V. 76. P. 201–204.
6. *Леонов Г. А.* Задача Трикоми для динамической системы Шимицу — Мориока // Докл. АН. 2012. Т. 447. С. 603–606.
7. *Shilnikov A.* Bifurcation and chaos in the Morioka–Shimizu system // Selecta Math. Soviet. 1991. V. 10. P. 105–117.
8. *Shilnikov A. L.* On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu–Morioka model // Physica D. 1993. V. 62. P. 338–346.

9. *Гонченко С. В., Кайнов М. Н., Казаков А. О., Тураев Д. В.* О методах проверки псевдогиперболичности странных аттракторов // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29. С. 160–185.
10. *Kazakov A.* On bifurcations of Lorenz attractors in the Lyubimov–Zaks model // Chaos. 2021. V. 31. 093118.
11. *Yoshida H.* Necessary condition for the existence of algebraic first integrals. I: Kowalevski′s exponents and II: Condition for algebraic integrability. // Celestial Mech. 1983. V. 31. P. 363–399.
12. *Demina M. V.* Classifying algebraic invariants and algebraically invariant solutions // Chaos, Solitons and Fractals. 2020. V. 140. 110219.
13. *Demina M. V.* Meromorphic solutions of autonomous ordinary differential equations without the finiteness property // J. Math. Anal. Appl. 2022. V. 516, N 2. 126516.
14. *Demina M. V.* The method of Puiseux series and invariant algebraic curves // Comm. Contemp. Math. 2021. V. 24, N 03. 2150007.
15. *Demina M. V.* Invariant surfaces and Darboux integrability for non–autonomous dynamical systems in the plane // J. Physics A: Mathematical and Theoretical. 2018. V. 51, N 50. 505202.
16. *Bruno A. D.* Asymptotic behaviour and expansions of solutions of an ordinary differential equation // Russ. Math. Surv. 2004. V. 59, N 3. P. 429–481.
17. *Bruno A. D.* Power geometry in algebraic and differential equations. Amsterdam: Elsevier Sci.; North-Holland, 2000.
18. *Demina M. V.* Necessary and sufficient conditions for the existence of invariant algebraic curves // Electron. J. Qualitative Theory of Differ. Equ. 2021. V. 48. P. 1–22.
19. *Demina M. V.* Liouvillian integrability of the generalized Duffing oscillators // Anal. Math. Physics. 2021. V. 11, N 1. P. 1–25.
20. *Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodic flow // J. Atmospheric Sci. 1963. V. 20. P. 130–141.
21. *Sparrow C.* The Lorenz equations: Bifurcations, chaos, and strange attractors. New York: Springer-Verl., 1982.
22. *Huang K., Shi S., Li W.* Integrability analysis of the Shimizu–Morioka system // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulation. 2020. V. 84. 105101.

Поступила в редакцию 14 марта 2023 г.
После доработки 11 июля 2023 г.
Принята к публикации 2 августа 2023 г.

Демина Мария Владимировна (ORCID 0000-0001-8959-2708),
Илюхин Денис Олегович
Московский институт электроники и математики им. А. Н. Тихонова
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»,
Таллинская ул., 34, Москва 123458
maria_dem@mail.ru, dennic.96@mail.ru