Ж. А. Токибетов, О формулах Коши и Помпею для обобщенных аналитических функций,
Матем. заметки, 1972, том 12, выпуск 3, 263–268

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 3 (1972), 263—268

УДК 517.9

О ФОРМУЛАХ КОШИ И ПОМПЕЮ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ж. А. Токибетов

Используется аппарат теории обобщенных функций, позволяющий строго определить фундаментальное функциональное решение уравнения, что дает возможность получить формулы Коши и Помпею без дополнительных условий на поведение решений на бесконечности, когда коэффициенты уравнения постоянны. Ядра этих формул получены в явном виде. Библ. 6 назв.

1. В работе И. Н. Векуа [1] (см. также [2]) были получены формулы Коши и Помпею для обобщенных аналитических функций, т. е. для решений уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + aw + b\bar{w} = F \tag{1}$$

$$\left(w(z) = u(x, y) + iv(x, y), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right).$$

Эти формулы имеют следующий вид:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T} \Omega_1(z, \zeta)\, w(\zeta)\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T} \Omega_2(z, \zeta)\, \overline{w(\zeta)}\, d\bar{\zeta}$$

(формула Коши),

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T} \Omega_1(z, \zeta)\, w(\zeta)\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T} \Omega_2(z, \zeta)\, \overline{w(\zeta)}\, d\bar{\zeta} - \frac{1}{\pi}\iint_T \Omega_1(z, \zeta)\, F(\zeta)\, dT_\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_T \Omega_2(z, \zeta)\, \overline{F(\zeta)}\, dT_\zeta \tag{2}$$

(формула Помпею).

Здесь T — область, в которой рассматривается решение, а ∂T — ее граница. $\Omega_1(z, \zeta)$ и $\Omega_2(z, \zeta)$ — ядра Коши. Для общего случая переменных коэффициентов a и b их вид зависит от области T, даже если a и b заданы во всей плоскости.

Поэтому интересно получить эти представления во всей плоскости в случае, когда a и b аналитичны во всей плоскости (эти формулы получены И. Н. Векуа в [1]) для аналитических решений и $\Omega_1(z, \zeta)$, $\Omega_2(z, \zeta)$ представлены в виде рядов.

В работе [3] была получена формула Коши для систем, сводящихся к виду

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + b\bar{w} = 0 \qquad (b = \mathrm{const})$$

с помощью фундаментального решения уравнения $\Delta u = |b|^2 u$.

В данной работе, используя преобразование Фурье для обобщенных функций медленного роста, мы дадим прямой способ получения ядер Коши для случая постоянных коэффициентов и элементарный вывод формул Коши и Помпею.

2. Итак, рассмотрим уравнение (1). Преобразованиями вида $w = w_1 e^{i\varphi}$, $z = z_1 e^{i\psi}$ (φ и ψ — действительные постоянные) всегда можно добиться того, чтобы коэффициенты a и b системы (1) были вещественны и положительны (см. [4]).

Так как коэффициенты системы (1) постоянны, то, вводя новую функцию

$$w = w_1 e^{-a(z+\bar{z})}, \tag{3}$$

приводим систему (1) к системе

$$\frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} + b\bar{w}_1 = 0. \tag{4}$$

3. Методом преобразования Фурье найдем (см. [5]) фундаментальное решение $\mathscr{E}(z)$ системы (4), т. е. решения из S' уравнения

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \bar{z}} + b\bar{\mathscr{E}} = \delta(z). \tag{5}$$

(Здесь $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака.)

Применяя преобразование Фурье к (5), получим

$$\frac{1}{2} i\zeta \tilde{\mathscr{E}}(\zeta) + b\overline{\tilde{\mathscr{E}}(-\zeta)} = 1, \tag{6}$$

где $\tilde{\mathscr{E}}(\zeta)$ есть преобразование Фурье $\mathscr{E}(z)$. Уравнение (6) эквивалентно системе четырех уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} i\zeta \tilde{\mathscr{E}}(\zeta) + b\overline{\tilde{\mathscr{E}}(-\zeta)} &= 1, \\ -\frac{1}{2} i\zeta \tilde{\mathscr{E}}(-\zeta) + b\overline{\tilde{\mathscr{E}}(\zeta)} &= 1, \\ b\tilde{\mathscr{E}}(-\zeta) - \frac{1}{2} i\bar{\zeta}\overline{\tilde{\mathscr{E}}(\zeta)} &= 1, \\ b\tilde{\mathscr{E}}(\zeta) + \frac{1}{2} i\bar{\zeta}\overline{\tilde{\mathscr{E}}(-\zeta)} &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Отсюда

$$\tilde{\mathscr{E}}(\zeta) = -2\frac{i\zeta - 2b}{|\zeta|^2 + 4b^2}. \tag{8}$$

Представим выражение (8) (см. [6]) в виде

$$\tilde{\mathscr{E}}(\zeta) = -2\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{i\zeta - 2b}{|\zeta|^2 + (2b)^2 + i\varepsilon} = -2\frac{i\zeta - 2b}{|\zeta|^2 + (2b)^2 + i0}.$$

Тогда в силу непрерывности преобразования Фурье

$$\mathscr{E}(z) = -\frac{2}{(2\pi)^2}\lim_{\varepsilon \to +0}\lim_{R \to \infty}\int_{|\zeta| \leqslant R} \frac{(i\zeta - 2b)e^{i(\zeta, z)}}{|\zeta|^2 + (2b)^2 + i\varepsilon}\, d\xi d\eta =$$

$$= -\frac{2i}{(2\pi)^2}\lim_{\varepsilon \to +0}\lim_{R \to \infty}\int_0^R \frac{\bar{z}}{|z|}\frac{r^2}{r^2 + (2b)^2 + i\varepsilon}\int_0^{2\pi} e^{-i\alpha + ir|z|\sin\alpha}\,\cdot$$

$$\cdot\, d\alpha dr + \frac{4b}{4\pi^2}\lim_{\varepsilon \to +0}\lim_{R \to \infty}\int_0^R \frac{r}{r^2 + (2b)^2 + i\varepsilon}\int_0^{2\pi} e^{-ir|z|\cos\alpha}\, d\alpha dr =$$

$$= \frac{2b}{\pi}\frac{\bar{z}}{|z|}\lim_{\varepsilon \to +0}\lim_{R \to \infty}\int_0^R \frac{r^2 J_1(r|z|)}{r^2 + (2b)^2 + i\varepsilon}\, dr +$$

$$+ \frac{2b}{\pi}\lim_{\varepsilon \to +0}\lim_{R \to \infty}\int_0^R \frac{rJ_0(r|z|)}{r^2 + (2b)^2 + i\varepsilon}\, dr =$$

$$= \frac{2b}{\pi}\frac{\bar{z}}{|z|}K_1(2b|z|) + \frac{2b}{\pi}K_0(2b|z|),$$

где J_i, K_i $(i = 0, 1)$ — функции Бесселя и Макдональда. Итак,

$$\mathscr{E}(z) = \frac{2b}{\pi}\frac{\bar{z}}{|z|}K_1(2b|z|) + \frac{2b}{\pi}K_0(2b|z|) \tag{9}$$

есть фундаментальное решение системы (4). Это локально суммируемая функция на всей плоскости, за исключением начала координат, где первое слагаемое имеет особенность вида $O(1/z)$, а второе слагаемое имеет логарифмическую особенность.

4. Перейдем к выводу обобщенной формулы Коши. Для этого рассмотрим равенства:

$$\mathscr{E}_2 L_b(w_1) + \overline{\mathscr{E}_2 L_b(w_1)} + w_1 L_{-b}(\mathscr{E}_2) + \overline{w_1 L_{-b}(\mathscr{E}_2)} = \\ = 2\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(w_1 \mathscr{E}_2), \quad (10)$$

$$\mathscr{E}_1 L_b(w_1) - \overline{\mathscr{E}_1 L_b(w_1)} + w_1 L_b(\mathscr{E}_1) - \overline{w_1 L_b(\mathscr{E}_1)} = \\ = 2i\,\mathrm{Im}\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(w_1 \mathscr{E}_1), \quad (11)$$

где

$$L_b(w_1) = \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} + b\bar{w}_1, \qquad L_{-b}(w_1) = \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} - b\bar{w}_1,$$

а $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ — фундаментальное решение операторов L_b, L_{-b} соответственно. Проинтегрируем обе части равенств (10) и (11):

$$\iint_{\mathscr{D}_\varepsilon} [\mathscr{E}_2 L_b(w_1) + \overline{\mathscr{E}_2 L_b(w_1)} + w_1 L_{-b}(\mathscr{E}_2) + \overline{w_1 L_{-b}(\mathscr{E}_2)}]\, d\xi d\eta = \\ = 2\,\mathrm{Re} \iint_{\mathscr{D}_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(w_1 \mathscr{E}_2)\, d\xi\, d\eta, \quad (12)$$

$$\int_{\mathscr{D}_\varepsilon} [\mathscr{E}_1 L_b(w_1) - \overline{\mathscr{E}_1 L_b(w_1)} + w_1 L_b(\mathscr{E}_1) - \overline{w_1 L_b(\mathscr{E}_1)}]\, d\xi\, d\eta = \\ = 2i\,\mathrm{Im} \iint_{\mathscr{D}_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(w_1 \mathscr{E}_1)\, d\xi\, d\eta, \quad (13)$$

где $\mathscr{D}_\varepsilon$ — область $\mathscr{D}$ с выкинутым кругом $|\zeta - z| \leqslant \varepsilon$.

Так как w_1 является решением $L_b(w_1) = 0$, а $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ как функции точки соответственно являются решениями уравнений $L_{-b}(w_1) = 0$, $L_b(w_1) = 0$ в области $\mathscr{D}_\varepsilon$, то

$$2\,\mathrm{Re} \iint_{\mathscr{D}_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(w_1(\zeta)\, \mathscr{E}_2(\zeta - z))\, d\xi\, d\eta = 0, \quad (14)$$

$$2i\,\mathrm{Im} \iint_{\mathscr{D}_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(w_1(\zeta)\, \mathscr{E}_1(\zeta - z))\, d\xi\, d\eta = 0. \quad (15)$$

Теперь по формуле Грина — Остроградского из (14) и

(15) получим

$$2\,\mathrm{Re}\iint_{\mathscr{D}_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(w_1(\zeta)\,\mathscr{E}_2(\zeta-z)\right)d\xi\,d\eta=$$

$$=2\mathrm{Re}\frac{1}{2i}\int_\Gamma w_1(\zeta)\,\mathscr{E}_2(\zeta-z)\,d\zeta-$$

$$-2\mathrm{Re}\frac{1}{2i}\int_{\Gamma_\varepsilon} w_1(\xi)\,\mathscr{E}_2(\zeta-z)\,d\zeta=0,\quad(16)$$

$$2i\,\mathrm{Im}\iint_{\mathscr{D}_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(w_1(\zeta)\,\mathscr{E}_1(\zeta-z)\right)d\xi\,d\eta=$$

$$=2i\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{2i}\int_\Gamma w_1(\zeta)\,\mathscr{E}_1(\zeta-z)\,d\zeta-$$

$$-2i\,\mathrm{Im}\frac{1}{2i}\int_{\Gamma_\varepsilon} w_1(\zeta)\,\mathscr{E}_1(\zeta-z)\,d\zeta=0,\quad(17)$$

где Γ, Γ_ε — соответственно границы областей $\mathscr{D}$ и $|\zeta-z|\leqslant\varepsilon$.

Используя свойства и вид функций $K_0(z)$ и $K_1(z)$, а затем переходя в (16) и (17) к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$\mathrm{Re}\,w_1(z)=\mathrm{Re}\,\frac{b}{\pi i}\int_\Gamma w_1(\zeta)\left[\frac{\overline{\zeta-z}}{|\zeta-z|}K_1(2b\,|\,\zeta-z\,|)-\right.$$

$$\left.-K_0(2b\,|\,\zeta-z\,|)\right]d\zeta,\quad(18)$$

$$i\,\mathrm{Im}\,w_1(z)=i\,\mathrm{Im}\,\frac{b}{\pi i}\int_\Gamma w_1(\zeta)\left[\frac{\overline{\zeta-z}}{|\zeta-z|}K_1(2b\,|\,\zeta-z\,|)+\right.$$

$$\left.+K_0(2b\,|\,\zeta-z\,|)\right]d\zeta.\quad(19)$$

Из соотношений (18) и (19) вытекает, что

$$w_1(z)=\frac{b}{\pi i}\int_\Gamma w_1(\zeta)\,\frac{\overline{\zeta-z}}{|\zeta-z|}\,K_1(2b\,|\,\zeta-z\,|)\,d\zeta-$$

$$-\overline{w_1(\zeta)}\,K_0(2b\,|\,\zeta-z\,|)\,d\bar\zeta.\quad(20)$$

Это есть представление решения эллиптических систем (4).

Используя формулу (3), легко найдем представления решения системы (1) с постоянными коэффициентами:

$$w(z)=\frac{2b}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\overline{\zeta-z}}{|\zeta-z|}\,K_1(2b\,|\,\zeta-z\,|)\,e^{a[(\zeta-z)+(\overline{\zeta-z})]}w(\zeta)\,d\zeta-$$

$$-\frac{2b}{\pi i}\int_\Gamma K_0(2b\,|\,\zeta-z\,|)\,e^{a[(\zeta-z)+(\overline{\zeta-z})]}\,\overline{w(\zeta)}\,d\bar\zeta$$

(обобщенная формула Коши для системы (1)).

5. Используя формулы (10), (11) и метод п. 4, легко получить аналог формулы Помпею для уравнения $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + aw + b\bar{w} = F$ с постоянными коэффициентами a и b:

$$w(z) = \frac{2b}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\zeta - z}}{|\zeta - z|} K_1(2b|\zeta - z|)\, e^{a[(\zeta - z) + (\overline{\zeta - z})]} w(\zeta)\, d\zeta -$$

$$- \frac{2b}{\pi i}\int_\Gamma K_0(2b|\zeta - z|)\, e^{a[(\zeta - z) + (\overline{\zeta - z})]}\overline{w(\zeta)}\, d\bar{\zeta} -$$

$$- \frac{b}{\pi}\left\{\iint_{\mathscr{D}} \frac{\overline{\zeta - z}}{|\zeta - z|} K_1(2b|\zeta - z|)\, e^{a[(\zeta - z) + (\overline{\zeta - z})]} F(\zeta)\, d\xi\, d\eta -\right.$$

$$\left. - \iint_{\mathscr{D}} K_0(2b|\zeta - z|\, e^{a[(\zeta - z) + (\overline{\zeta - z})]}\overline{F(\zeta)}\, d\xi\, d\eta\right\}$$

Поскольку общую эллиптическую систему с постоянными коэффициентами можно привести к системе (1), то таким путем можно получить аналог этих формул для общей эллиптической системы.

В заключение выражаю благодарность В. С. Виноградову за постановку задачи и помощь при написании работы.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
12.VII.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В е к у а И. Н., Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек, Матем. сб., 31, № 2 (1952), 217—314.

[2] В е к у а И. Н., Обобщенные аналитические функции, М., 1959.

[3] В о л о ш и н а М. С., Об обобщенной формуле Коши для одной эллиптической системы первого порядка, Докл. АН СССР, 153, № 6 (1963), 1231—1233.

[4] В и н о г р а д о в В. С., О теореме Лиувилля для обобщенных аналитических функций, Докл. АН СССР, 183, № 3 (1968), 503—506.

[5] Г е л ь ф а н д И. М., Ш и л о в Г. Е., Обобщенные функции, М., 1965.

[6] В л а д и м и р о в В. С., Уравнения математической физики, М., 1967.