

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

S. S. Ivanov, A. S. Monin, On scale-localized fractality,  
*Dokl. Akad. Nauk*, 1997, Volume 352, Number 6, 822–825

<https://www.mathnet.ru/eng/dan50267>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

May 17, 2025, 14:37:01





В табл. 1 приведены качественные характеристики бимультифракталов при различных отношениях  $p/(1-p)$  на масштабах, меньших и больших критического. Здесь уместно отметить, что подобные объекты уже привлекаются для имитации и последующего анализа некоторых природных процессов (см., например, [6]).

В целях дальнейшего обобщения понятия бимультифрактала рассмотрим случай непрерывного изменения отношения разбиения  $p/(1-p)$  на различных масштабах. Удобнее ввести связанную с  $p$  величину  $\beta = p/(0.5-p)$ , логарифм которой не имеет конечного предела ни при  $p \rightarrow 0$ , ни при  $p \rightarrow 0.5$ . Соответственно  $p = 0.5\beta/(1+\beta)$ . Пусть  $\beta$  изменяется по степенному закону  $\beta \sim \delta^d$ . Тогда на разных масштабах значения  $p$  также будут различными. Двоичное представление позволяет легко определить масштабную зависимость  $p$  и  $\beta$  – просто по позиции двоичного знака по отношению к общей длине двоичного кода.

Очевидно, что характер итогового распределения зависит, в первую очередь, от знака  $d$  (рис. 2). При  $d < 0$  распределение “выравнивается” на малых масштабах, основная доля меры оказывается сосредоточенной на относительно крупных участках, а дальнейшее повышение разрешения не приводит к выявлению сколь-нибудь существенных деталей. При  $d > 0$ , наоборот, на больших масштабах мера распределена сравнительно однородно, а структура распределения проявляется лишь при повышении разрешения.

4. В результате описанной процедуры формируется своего рода “масштабированное” мультифрактальное множество. Однако оно не является мультифракталом в точном смысле этого понятия. Последний представляет собой объединение точечных подмножеств, состоящих из точек, обладающих одной и той же долей меры  $\mu_i$ , т.е. имеющих одинаковое количество нулей (а следова-

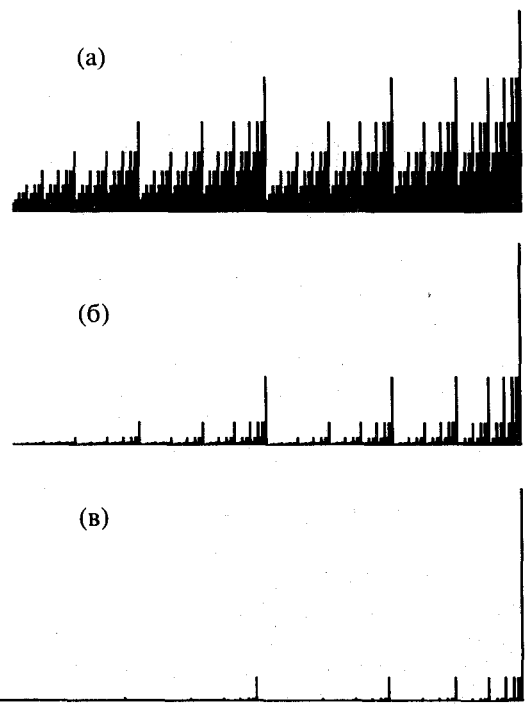


Рис. 1. Распределение биномиальной мультипликативной вероятностной меры:  $p = 0.4$  (а),  $0.25$  (б),  $0.1$  (в). Вертикальные масштабы графиков различны.

тельно, и единиц) в двоичном разложении независимо от их порядка. Фрактальные размерности этих подмножеств и составляют так называемый мультифрактальный спектр. При нашем же определении все  $\mu_i$ , вообще говоря, различны, так как их величина зависит не только от количества нулей в двоичном разложении, но и от их порядка, а двух одинаковых разложений по определению нет. Поэтому нет и соответствующих подмножеств – каждое из них вырождено до единственной точки. Соответственно вырождается и мультифрактальный спектр – размерности всех указанных

Таблица 1. Основные характеристики бимультифракталов на больших и малых масштабах при различных значениях вероятности  $p$

Область масштабов		Характеристика распределения
$\delta > \delta_{cr}$	$\delta < \delta_{cr}$	
$p = 0$	$p = 0.5$	Вся мера сосредоточивается на одном отрезке длиной $\delta_{cr}$ , по которому затем распределяется равномерно
$p = 0.5$	$p = 0$	Вся мера распределяется по отрезкам длиной $\delta_{cr}$ , внутри каждого из которых затем стягивается в точку
$p = 0$	$0 < p < 0.5$	Обычный биномиальный мультифрактал
$p = 0.5$	$0 < p < 0.5$	Множество одинаковых биномиальных мультифракталов длиной $\delta_{cr}$
$0 < p < 0.5$	$p = 0.5$	До масштаба $\delta_{cr}$ – один биномиальный мультифрактал
$0 < p < 0.5$	$p = 0$	До масштаба $\delta_{cr}$ – один биномиальный мультифрактал, все меры которого затем концентрируются в точках

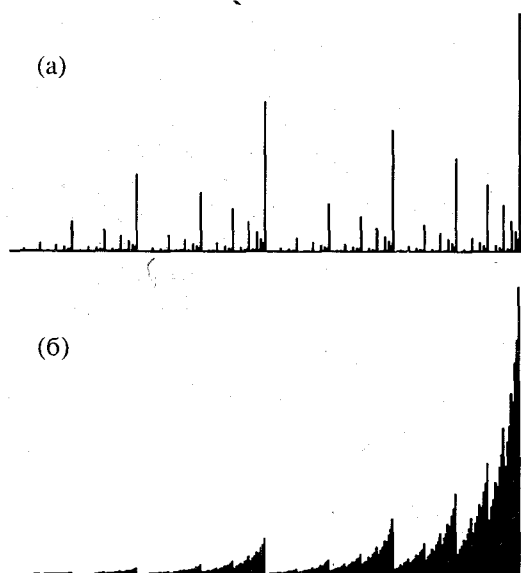


Рис. 2. Примеры распределения биномиальной меры при различных вариантах масштабирования коэффициента разбиения:  $d = -0.7$  (а),  $0.7$  (б). Вертикальные масштабы графиков различны.

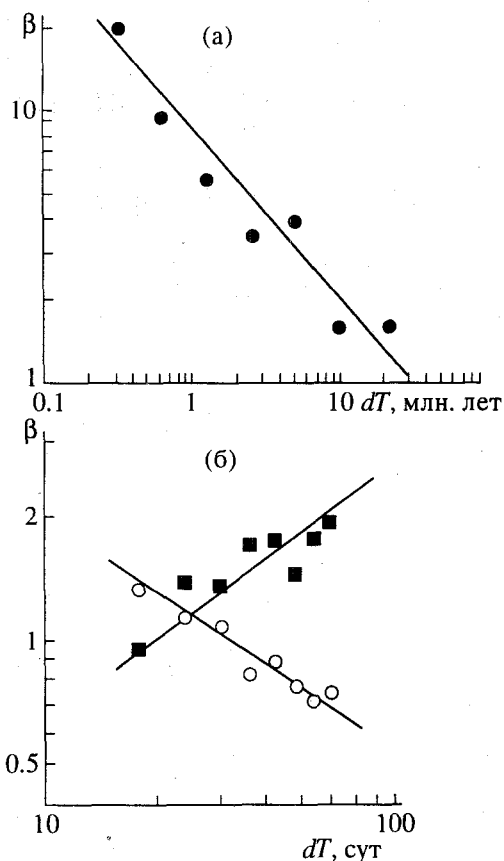


Рис. 3. Примеры масштабирования биномиальных коэффициентов разбиения реальных природных процессов: а – инверсии главного геомагнитного поля [9]; б – внутригодовая изменчивость биомассы фитопланктона на поверхности моря (кружки) и на глубине 10 м (квадраты) [11].

(вырожденных) подмножеств равны нулю. Таким образом, полученное множество не является мультифракталом, хотя оно и получается в результате детерминированного мультипликативного процесса. С другой стороны, вследствие масштабной зависимости коэффициента разбиения оно не обладает и сквозным самоподобием (или самоаффинностью) и в этом смысле не является и простым фракталом.

Мы предлагаем называть подобные объекты локализованно-фрактальными множествами, имея в виду, что для них основная доля неоднородности (условно говоря, фрактальности) сосредоточена либо на больших ( $d < 0$ ), либо на малых ( $d > 0$ ) масштабах. При этом обычный мультифрактал оказывается частным случаем локализованного фрактала при  $d = 0$ .

В этом смысле понятие локализованного фрактала дополняет имеющиеся определения сложных фрактальных множеств, распространяя понятие “локальной фрактальной размерности меры” [7] не только на пространственную, но и на спектральную область: локализация фрактальности может происходить не только в некотором участке пространства (как, скажем, в концепции фрактонов [8]), но и на определенном участке спектра. Иными словами, значения “локальной” фрактальной размерности могут оказаться различными не только для разных точек множества, но и для разных масштабов.

5. Обсудим возможности обнаружения локализованных фракталов непосредственно по экспериментальным данным. Поскольку диапазон возможных значений  $p$  на разных масштабах для них составляет  $[0 \dots 0.5]$ , существенным оказывается вопрос о положении масштабного интервала наблюдений. В случае, если наблюдения ведутся на масштабах, где  $p \rightarrow 0$ , повышение масштабного разрешения при конечной погрешности наблюдений не приведет к появлению в исследуемом множестве новых сингулярностей. Таким образом, мы будем считать, что имеем дело с конечным точечным множеством с нулевой размерностью. Если же наблюдения ведутся на масштабах, где  $p \rightarrow 0.5$ , то при повышении разрешения будет наблюдаться равномерное (в пределах погрешности) размазывание меры и в данных опять не будет обнаружено никакой внутренней структуры. Наиболее благоприятным в этом смысле является диапазон масштабов, в котором значение  $p$  близко к  $0.25$  ( $\beta = 1$ ). Кроме того, важным может оказаться соотношение внешнего масштаба наблюдений (объема выборки) и показателя  $d$ , характеризующего зависимость  $\beta$  от масштаба  $\delta$ , – чем этот показатель больше (по абсолютной величине), тем больше шансов опознать локализованный фрактал по ограниченной выборке. Рассматривая некоторое множество

как результат биномиального мультипликативного процесса, нетрудно определить зависимость отношения разбиения от масштаба (в среднем, разумеется) и выяснить наличие или отсутствие какой-либо закономерности.

6. То, что локализованные фракталы не являются умозрительной конструкцией, а реально существуют в природе, подтверждают примеры из различных областей науки. Первый из них был получен при оценке нелинейных свойств динамической системы, ответственной за обращения главного геомагнитного поля [9, 10]. Анализ масштабных свойств вероятности геомагнитных инверсий показал (рис. 3а), что существует довольно отчетливая зависимость коэффициента разбиения  $\beta$  от масштаба ( $d \approx -0.6$ ) в диапазоне масштабов от 0.3 до 20 млн. лет, что составляет почти два порядка величины. На рис. 3б приведен пример из совершенно другого временного диапазона. Эти данные получены при мультифрактальном анализе внутрigoдовой изменчивости биомассы фитопланктона в Белом море [11]. Хотя интервал масштабов в этом случае значительно уже (около одного порядка), масштабная зависимость  $\beta$  и здесь проявляется достаточно отчетливо. Очень интересным является то, что на поверхности и в глубинных слоях моря коэффициенты разбиения масштабируются совершенно по-разному и получающиеся значения  $d$  имеют противоположные знаки. Из рис. 3б видно, что если на поверхности моря основная доля изменчивости концентрируется в области больших временных масштабов (скажем, сезонные циклы), то на глубине преобладающим становится влияние более короткопериодных процессов. Результаты масштабирования коэффициента разбиения да-

ют, таким образом, формальную основу для содержательной интерпретации.

7. Описанный в предложенной работе новый класс множеств является обобщением понятия мультифрактала и может использоваться для адекватного описания экспериментальных данных в различных областях науки. Однако мы считаем, что этот подход, так же как и его теоретическую базу, еще нельзя считать полностью разработанными, и они заслуживают дальнейшего совершенствования.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 93-05-8943).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Turcotte D.L.* // Pure and Appl. Geoph. 1989. V. 131. № 1/2. P. 171.
2. *Mandelbrot B.B.* // Ibid. P. 5.
3. *Mandelbrot B.B.* The Fractal Geometry of Nature. N. Y.: Freeman and Co., 1983. 469 p.
4. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1992.
5. *Monin A.S., Ivanov S.S.* // Ann. geofis. 1996. V. 14. Suppl. 2. P. C641.
6. *Plotnik R.E., Gardner R.H., Hargrove W.W. et al.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. № 5. P. 53.
7. *Монин А.С., Якобсон М.В.* // ДАН. 1986. Т. 287. № 4. С. 795.
8. *Alexander S.* // Physica A. 1986. V. 140. P. 397.
9. *Иванов С.С.* // Геомагнетизм и аэрономия. 1996. № 4.
10. *Ivanov S.S.* // Nonlin. Proc. in Geoph. 1996. № 3. P. 13.
11. *Иванов С.С., Михайловский Г.Е.* // Океанология. 1996. № 5. С. 1.