

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Грбич, А. Линтон, Тройные произведения Масси наименьшей размерности в момент-угол-комплексах, *УМН*, 2020, том 75, выпуск 6, 175–176

<https://www.mathnet.ru/rm9979>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.86

24 апреля 2025 г., 10:08:49



Тройные произведения Масси наименьшей размерности в момент-угол-комплексах

Е. Грбич, А. Линтон

Дана комбинаторная классификация тройных произведений Масси трёхмерных классов в кольце $H^*(\mathcal{L}_{\mathcal{X}})$. Результат теоремы 6.1.1 из [3] улучшен путём рассмотрения произведений Масси с нетривиальной неопределённостью. Эта классификация применяется, например, в [1; предложение 4.9].

Пусть \mathcal{X} – симплициальный комплекс на m вершинах. Момент-угол-комплекс [2] есть $\mathcal{L}_{\mathcal{X}} = \bigcup_{I \in \mathcal{X}} (D^2, S^1)^I$, где $(D^2, S^1)^I \cong (D^2)^{|I|} \times (S^1)^{m-|I|}$.

Комплекс $\mathcal{L}_{\mathcal{X}} \subset (D^2)^m$ имеет клеточное разбиение, индуцирующее мультиградуировку на $C^*(\mathcal{L}_{\mathcal{X}})$. Для $J \subset [m]$ рассмотрим полный подкомплекс $\mathcal{X}_J = \{\sigma \in \mathcal{X} \mid \sigma \subset J\}$. Имеется изоморфизм коцепей $\tilde{C}^{*-1}(\mathcal{X}_J) \rightarrow C^{*-|J|, 2J}(\mathcal{L}_{\mathcal{X}}) \subset C^{*+|J|}(\mathcal{L}_{\mathcal{X}})$, индуцирующий изоморфизм алгебр $H^*(\mathcal{L}_{\mathcal{X}}) \cong \bigoplus_{J \subset [m]} \tilde{H}^*(\mathcal{X}_J)$. Группа $C^p(\mathcal{X}_J)$ имеет базис из коцепей χ_L , которые принимают значение 1 на p -симплексе $L \in \mathcal{X}_J$ и значение 0 на остальных симплексах. Умножение в $\bigoplus_{J \subset [m]} \tilde{H}^*(\mathcal{X}_J)$ индуцировано отображениями $\mu: C^{p-1}(\mathcal{X}_I) \otimes C^{q-1}(\mathcal{X}_J) \rightarrow C^{p+q-1}(\mathcal{X}_{I \cup J})$, где $\mu(\chi_L, \chi_M)$ есть $\pm \chi_{L \cup M}$, если $I \cap J = \emptyset$, и равно 0 в противном случае.

Пусть (A, d) – ДГ алгебра и $\alpha_i = [a_i] \in H^{p_i}(A)$, $i = 1, 2, 3$, причём $\alpha_1 \alpha_2 = 0 = \alpha_2 \alpha_3$. Для $a \in A^p$ положим $\bar{a} = (-1)^{1+p} a$. Тройным произведением Масси $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle \subset H^{p_1+p_2+p_3-1}(A)$ называется множество классов, представленных элементами вида $\omega = \bar{a}_1 a_{23} + \bar{a}_2 a_{31} + \bar{a}_3 a_{12}$, где $a_{i,i+1} \in A^{p_i+p_{i+1}-1}$ таковы, что $d(a_{i,i+1}) = \bar{a}_i a_{i+1}$, $i = 1, 2$. Произведение Масси тривиально, если $0 \in \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$. Неопределённостью произведения Масси называется множество разностей между элементами из $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$.

ТЕОРЕМА. Произведение Масси $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle \subset H^8(\mathcal{L}_{\mathcal{X}})$ классов $\alpha_i \in H^3(\mathcal{L}_{\mathcal{X}})$ определено и нетривиально тогда и только тогда, когда 1-остов $\mathcal{X}^{(1)}$ комплекса \mathcal{X} содержит полный подкомплекс, изоморфный одному из графов на рис. 1.

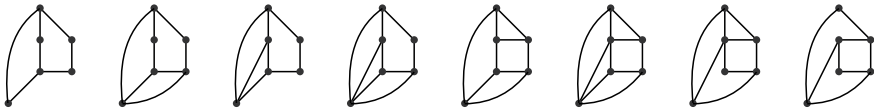


Рис. 1. Восемь препятствующих графов

В работе Г. Денама и А. Сучю [3] утверждалось, что первые шесть графов на рис. 1 классифицируют нетривиальные произведения Масси $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ с $\alpha_i \in H^3(\mathcal{L}_{\mathcal{X}})$. Это верно только для произведений Масси с тривиальной неопределённостью.

ПРИМЕР. Пусть \mathcal{X} – граф на рис. 2, (с), где ребро $\{4, 6\}$ может отсутствовать. Рассмотрим классы $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in H^3(\mathcal{L}_{\mathcal{X}})$, соответствующие классам $\alpha_1 = [\chi_1] \in \tilde{H}^0(\mathcal{X}_{12})$, $\alpha_2 = [\chi_3] \in \tilde{H}^0(\mathcal{X}_{34})$, $\alpha_3 = [\chi_5] \in \tilde{H}^0(\mathcal{X}_{56})$. Так как $\tilde{H}^1(\mathcal{X}_{1234}), \tilde{H}^1(\mathcal{X}_{3456}) = 0$, произведения $\alpha_1 \alpha_2 \in \tilde{H}^1(\mathcal{X}_{1234})$ и $\alpha_2 \alpha_3 \in \tilde{H}^1(\mathcal{X}_{3456})$ нулевые.

Для $a \in C^p(\mathcal{X}_J)$, соответствующей $a \in C^{p+|J|+1}(\mathcal{L}_{\mathcal{X}})$, положим $\bar{a} = (-1)^{p+|J|} a$. Коцепь $a_{12} \in C^0(\mathcal{X}_{1234})$ такая, что $d(a_{12}) = \bar{\chi}_1 \chi_3 = 0$, имеет вид $a_{12} = c_1 \chi_3 + c_2(\chi_1 + \chi_4 + \chi_2)$, $c_1, c_2 \in \mathbf{k}$. Коцепь $a_{23} \in C^0(\mathcal{X}_{3456})$ такая, что $d(a_{23}) = \bar{\chi}_3 \chi_5 = \chi_{35}$, имеет вид $a_{23} = c_3 \chi_4 + c_4(\chi_6 + \chi_3 + \chi_5) + \chi_5$, $c_3, c_4 \in \mathbf{k}$, где $c_3 = c_4$, если $\{4, 6\} \in \mathcal{X}$. Тогда $\omega \in C^1(\mathcal{X})$ есть $\bar{a}_1 a_{23} + \bar{a}_2 a_{31} = c_3 \chi_{14} + c_4(\chi_{16} + \chi_{15}) + \chi_{15} + c_1 \chi_{35} + c_2(\chi_{15} + \chi_{25})$. Для $\chi_1, \chi_5 \in C^0(\mathcal{X})$ имеем $\omega = (c_3 - c_4)\chi_{14} - c_4 d(\chi_1) + \chi_{15} + (c_1 - c_2)\chi_{35} + c_2 d(\chi_5)$. Также $[\omega] = [(c_3 - c_4)\chi_{14} + \chi_{15} + (c_1 - c_2)\chi_{35}] \neq 0$ для любых $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{k}$, причём $c_3 = c_4$, если $\{4, 6\} \in \mathcal{X}$. Поэтому $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle \subset H^8(\mathcal{L}_{\mathcal{X}})$ нетривиально с нетривиальной неопределённостью $\alpha_1 \cdot \tilde{H}^0(\mathcal{X}_{3456}) + \alpha_3 \cdot \tilde{H}^0(\mathcal{X}_{1234})$.

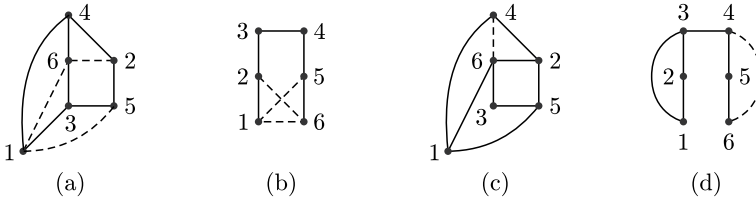


Рис. 2. Произведения Масси с тривиальной (а) и нетривиальной (с) неопределённостью и соответствующие дополнительные графы (b) и (d)

Для комплекса \mathcal{K} на рис. 2, (а), вычисления аналогичны. Здесь $a_{12} = \chi_3 + c_1(\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4)$ и $a_{23} = \chi_5 + c_2(\chi_3 + \chi_4 + \chi_5 + \chi_6)$, $c_1, c_2 \in \mathbf{k}$. В этом случае $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ содержит единственный ненулевой класс $[\omega] = [-\chi_{25}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $\mathcal{K}^{(1)}$ – один из графов на рис. 1. Из примера выше следует, что произведение Масси $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ нетривиально.

Обратно, пусть $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ нетривиально для $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in H^3(\mathcal{L}_{\mathcal{K}})$. Пусть G – дополнительный граф для $\mathcal{K}^{(1)}$, т. е. $\{i, j\} \in G$ тогда и только тогда, когда $\{i, j\} \notin \mathcal{K}$. Мы покажем, что G – один из графов (b) и (d) на рис. 2, где пунктирные рёбра не обязательно присутствуют. Рассмотрим \mathcal{K}_{S_i} , $S_i \subset [m]$, $|S_i| = 2$, такие, что α_i соответствует классу $\alpha_i \in \tilde{H}^0(\mathcal{K}_{S_i})$. Так как $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ нетривиально, то $S_i \cap S_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Пусть $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{3, 4\}$, $S_3 = \{5, 6\}$. Так как $\{v_1, v_2\} \notin \mathcal{K}$ для любых $v_1, v_2 \in S_i$, имеем $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\} \in G$. Так как $\alpha_i \alpha_{i+1} = 0$, подкомплекс $\mathcal{K}_{S_i \cup S_{i+1}}$ не содержит циклов для $i = 1, 2$. Поэтому $\{v_1, v_2\}, \{v'_2, v_3\} \in G$ при $v_i, v'_i \in S_i$.

Предположим, что $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\} \in G$, где $v_i \in S_i$. Пусть $a_1 = \chi_{v_1} \in C^0(\mathcal{K}_{12})$, $a_2 = \chi_{v_2} \in C^0(\mathcal{K}_{34})$, $a_3 = \chi_{v_3} \in C^0(\mathcal{K}_{56})$ – представляющие коциклы. Имеем $a_1 a_2 = 0$ и $a_2 a_3 = 0$. Тогда, выбирая $a_{12} = 0 = a_{23}$, получаем $\omega = 0$, что противоречит нетривиальности $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$. Итак, $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\} \notin G$ при $v_i \in S_i$.

Занумеруем вершины графа G так, что имеется путь $1, \dots, 6$. Рассмотрим случай $\{1, 3\}, \{4, 6\} \notin G$. Так как $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\} \notin G$ при $v_i \in S_i$, вершины 3 и 4 имеют валентность два. Предположим, что $\{2, 5\} \in G$. Пусть $\chi_2 \in C^0(\mathcal{K}_{12})$, $\chi_3 \in C^0(\mathcal{K}_{34})$, $\chi_5 \in C^0(\mathcal{K}_{56})$ представляют $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ соответственно. Так как $a_1 a_2 = 0$, положим $a_{12} = 0$, и пусть $a_{23} = \chi_5$. Тогда $\omega = \chi_{25}$ есть нуль, что противоречит нетривиальности $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$. Следовательно, $\{2, 5\} \notin G$ и G есть граф (b), где рёбра $\{1, 5\}, \{1, 6\}$ и $\{2, 6\}$ не обязательно присутствуют.

Если $\{1, 3\} \in G$, $\{4, 6\} \notin G$, то $\{1, 5\} \notin G$, так как иначе $\omega = \chi_{15} = 0$ в примере выше. Также $\{2, 5\} \notin G$, как в предыдущем случае. Рёбра $\{1, 6\}, \{2, 6\}$ в G не обязательны, так как они не изменяют вычисления из примера выше. Если $\{1, 6\}, \{2, 6\} \notin G$, то G есть граф (d) с $\{4, 6\} \notin G$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Графы (b) и (d) дополнительные к графам (a) и (c) соответственно. С точностью до изоморфизма все графы вида (a) и (c) суть в точности графы на рис. 1.

Список литературы

[1] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, М. Масуда, Т. Е. Панов, С. Пак, *УМН*, **72**:2(434) (2017), 3–66. [2] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Toric topology*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015, xiv+518 pp. [3] G. Denham, A. I. Suciu, *Pure Appl. Math. Q.*, **3**:1 (2007), 25–60.

Е. Грбич (J. Grbić)
University of Southampton, Southampton, UK
E-mail: J.Grbic@soton.ac.uk

Представлено Т. Е. Пановым
Принято редколлегией
01.10.2020

А. Линтон (A. Linton)
University of Southampton, Southampton, UK
E-mail: A.Linton@soton.ac.uk