Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Г. И. Ольшанский, О сплетающих операторах для индуцированных представлений редуктивных p-адических групп,
УМН, 1972, том 27, выпуск 6, 243–244

https://www.mathnet.ru/rm5153

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.173
20 января 2026 г., 21:01:17

О СПЛЕТАЮЩИХ ОПЕРАТОРАХ ДЛЯ ИНДУЦИРОВАННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ РЕДУКТИВНЫХ p-АДИЧЕСКИХ ГРУПП

Г. И. Ольшанский

В заметке конструкция сплетающих операторов [1], [2] переносится на p-адические группы (теорема 1), устанавливается некоторое ее обобщение (теорема 3) и приводятся приложения (теоремы 2, 4 и следствия 1, 2, 3).

Ниже k — локальное неархимедово поле, D — центральная алгебра с делением над k, все представления предполагаются допустимыми [3] и значок $\sim$ означает эквивалентность представлений.

1. Пусть G — редуктивная группа над k, P — минимальная параболическая k-подгруппа G, N — ее унипотентный радикал, M — ее редуктивная часть и $\hat{M}$ — нормализатор M в G.

Пусть π — неприводимое представление M, π продолжается до представления P, тривиального на N, и пусть $T(\pi) = \mathrm{Ind}(G, P, \pi)$ [3] — индуцированное представление G в пространстве $H(\pi)$. Множество $\{\pi\}$ неприводимых π распадается на счетное множество связных «листов». Каждый «лист» Λ имеет естественную комплексную структуру, и семейство $\{H(\pi)\}$ $(\pi \in \Lambda)$ снабжается структурой индуктивного предела конечномерных голоморфных векторных пучков над Λ, что придает смысл аналитическому продолжению по π (см. ниже). $\hat{M}$ действует на $\{\pi\}$. Пусть $\hat{m} \in \hat{M}$; как и в [1], [2], сплетающий оператор $A(\pi, \hat{m})\colon H(\pi) \to H(\hat{m}(\pi))$ (формально) определяется формулой

$$(1) \qquad (A(\pi, \hat{m}) f)(g) = \int\limits_{N(\hat{m})} f(\hat{m}^{-1} u g)\, du.$$

Здесь $f(g) \in H(\pi)$, $N(\hat{m}) \subset N$ порождена корневыми подгруппами N_α, отвечающими корням $\alpha > 0$ таким, что $\hat{m}^{-1}(\alpha) < 0$.

Теорема 1. (1) *Фиксируем «лист» Λ. Когда π лежит в некоторой области $F \subset \Lambda$, интеграл* (1) *абсолютно сходится и определяет сплетающий оператор $A(\pi, \hat{m})\colon H(\pi) \to H(\hat{m}(\pi))$. Функция $A(\pi, \hat{m})$ голоморфна по $\pi \in F$ и продолжается до мероморфной функции во всем Λ.*

(2) *Если полупростой k-ранг G равен* 1 *и $\hat{m} \notin M$, то $T(\pi_0)$ операторно приводимо $\Leftrightarrow$ $\hat{m}(\pi_0) \sim \pi_0$ и $A(\pi, \hat{m})$ не имеет особенности в $\pi = \pi_0$.*

Следствие 1. *Следы представлений $T(\pi)$ и $T(\hat{m}(\pi))$ равны.*

Следствие 2. *Все представления $T(\pi)$ группы $G = GL(2, D)$ операторно неприводимы.*

Теорема 1 для вещественных групп доказана в [1]. Наше доказательство (1) следует [1]; наше доказательство (2) основано на других принципах.

Определим характер μ группы M формулой $\mu(m) = |d(mnm^{-1})(dn)^{-1}|_k$, где dn — мера Хаара на N. Пусть $s \in \mathbf{R}$ и $T(s) = T(\mu^{s/2})$.

Теорема 2. *Предположим, что полупростой k-ранг G равен* 1.

(1) *Если $|s| < 1$, $T(s)$ унитарно; если $|s| > 1$, $T(s)$ сохраняет индефинитное скалярное произведение типа* $(1, \infty)$; *если $s = \pm 1$, $T(s)$ есть зацепление единичного представления и некоторого неприводимого унитарного представления, которое мы назовем особым* (special).

(2) *Если G также полупроста и односвязна и X — основа Брюа — Титса G, то представление Стейнберга — Соломона G в $H^1_c(X, \mathbf{C})$* [4] *неприводимо и эквивалентно особому представлению.*

(3) *Если G также полупроста и односвязна, Γ — дискретная подгруппа G без кручения и $\Gamma \backslash G$ компактно, то* $\dim \mathrm{H}^1(\Gamma, \mathbf{C})$ *равна кратности вхождения особого представления в $L^2(\Gamma \backslash G)$.*

Утверждение (3) для $G = SL(2, k)$ доказано (другим методом) в [5].

2. Пусть теперь $G = GL(n, D)$, P — стандартная параболическая подгруппа G, отвечающая разбиению $n = n_1 + \ldots + n_k$. Если разбить матрицы из G на блоки, то P есть группа верхних блочно-треугольных матриц. Пусть N — унипотентный радикал P и N^- — группа строго нижних блочно-треугольных матриц. Редуктивная часть M группы P есть группа блочно-диагональных матриц и изоморфна $GL(n_1, D) \times \ldots \times GL(n_k, D)$.

Пусть $\pi = \pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_k$ — неприводимое представление M, где π_i — неприводимые представления $GL(n_i, D)$. Предположим, что все π_i либо каспидальны [3], либо одномерны. Множество таких π также разбивается на «листы». Пусть $T(\pi) = \mathrm{Ind}(G, P, \pi)$ [3].

Пусть $M' = wMw^{-1}$, где $w \in G$, есть снова редуктивная часть некоторой стандартной параболической подгруппы P' с радикалом N'; $\pi' = w(\pi)$ — представление M' (если $m' \in M'$, то $\pi'(m') = \pi(w^{-1}m'w)$) и $T(\pi') = \mathrm{Ind}(G, P', \pi')$.

Сплетающий оператор $A(\pi, w) : H(\pi) \to H(\pi')$ (формально) определяется из формулы

$$\langle (A(\pi, w)) f)(g), \tilde{x} \rangle = \int\limits_{N(w)} \langle f(w^{-1}ug), \tilde{x} \rangle \, du. \tag{2}$$

Здесь $\tilde{x}$ — элемент из пространства представления $\tilde{\pi}$, сопряженного к π, $N(w) = N' \cap (wN^-w^{-1})$, du — мера Хаара на $N(w)$.

Теорема 3. *Фиксируем «лист» Λ. Когда π лежит в некоторой области $F \subset \Lambda$, интеграл* (2) *абсолютно сходится и определяет сплетающий оператор $A(\pi, w)$: $H(\pi) \to H(\pi')$. Функция $A(\pi, w)$ голоморфна по $\pi \in F$ и продолжается до мероморфной функции во всем Λ.*

Следствие 3. *Следы представлений $T(\pi)$ и $T(\pi')$ равны.*

Теорема 4. *Пусть π_0 унитарно и $\exists\, w \in G$, $w^2 \in M$, $wMw^{-1} = M$, $w(\pi_0) \sim \pi_0$. Тогда $T(\pi_0)$ включается в «дополнительную серию» унитарных представлений $T(\pi)$, где π, вообще говоря, неунитарны и зависят от вещественных параметров, число которых равно половине числа диагональных блоков, переставляемых w.*

В случае, когда все π_i одномерны, можно вычислить ширину «критической полосы», и ответ вполне аналогичен результату [6], где строится (другим методом) вырожденная дополнительная серия для группы $G = SL(2N, \mathbf{C})$.

Автор приносит благодарность А. А. Кириллову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. W. Knapp, E. M. Stein, Interwinning operators for semisimple groups, Ann. Math. **93**:3 (1971), 489—579.

[2] G. Schiffmann, Integrales d'entrelacement et fonctions de Wittaker, Bull. Soc. Math. France **99**:1 (1971), 3—72.

[3] R. Godement, H. Jacquet, Zeta functions of simple algebras, Springer, 1972.

[4] А. Борель, Ж.-П. Серр, Когомологии с компактными носителями пространств Брюа — Титса. Применения к когомологиям S-арифметических групп, Математика **15**:6 (1971), 10—13.

[5] Я. Ихара, Дискретные подгруппы групп $PL(2, k_p)$, Математика **12**:5 (1968), 131—138.

[6] E. M. Stein, Analysis in matrix space and some new representations of $SL(n, \mathbf{C})$, Ann. Math. **86** (1967), 461—490.

Поступило в Правление общества 4 июля 1972 г.