В.-Б. К. Рогов, Оператор Бельтрами–Лапласа на однородных симметрических пространствах ранга 1,
Матем. заметки, 1980, том 28, выпуск 1, 59–66

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 28, № 1 (1980)

ОПЕРАТОР БЕЛЬТРАМИ — ЛАПЛАСА НА ОДНОРОДНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ РАНГА 1

В.-Б. К. Рогов

Введение. Пусть G — полупростая группа Ли и G_s — ее подгруппа, выделяемая инволютивным автоморфизмом s. Тогда G/G_s — однородное симметричное пространство, на котором транзитивно действует группа G. Если G_s — максимальная компактная подгруппа в G, то G/G_s — риманово пространство, в противном случае — псевдориманово.

Через x_{0i} обозначим стационарные точки пространства G/G_s, т. е. такие точки, которые подгруппа G_s оставляет неподвижными. В случае риманова пространства такая точка единственная, в случае псевдориманова пространства точки x_{0i}, $i = 0, 1, \ldots, k - 1$, сопряжены относительно симметрической группы k-й степени $S_k \subset G$, не лежащей в G_s. В последнем случае положим $U = G_s \times S_k \subset G$ и $X = G/U$. Такая факторизация есть отождествление всех точек вида gx_{0i} для всех $i = 0, 1, \ldots, k - 1$. В случае риманова пространства для общности будем считать, что $U = G_s$.

Обозначим через H_0 некомпактную картановскую подгруппу пространства X. Мы будем рассматривать только пространства ранга 1, т. е. такие пространства, для которых H_0 одномерна.

Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция на X и $T_g f(x) = f(g^{-1}x)$. Обозначим через $\mathscr{B}$ оператор Бельтрами — Лапласа, т. е. дифференциальный оператор второго порядка, перестановочный со всеми операторами T_g. Он однозначно определяется метрикой пространства.

Цель настоящей заметки — написать явный вид оператора $\mathcal{B}$ для любого однородного симметрического пространства ранга 1. Явный вид этого оператора позволяет решать некоторые задачи гармонического анализа на однородных пространствах.

1. Система корней пространства X. Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли группы G и $\mathfrak{U}$ — ее подалгебра, выделяемая инволютивным автоморфизмом $\mathfrak{s}$, который индуцируется инволютивным автоморфизмом $\mathfrak{s}$ группы G. Очевидно, $\mathfrak{U}$ — алгебра Ли группы U. Тогда имеем ортогональное относительно формы Киллинга разложение $\mathfrak{G} = \mathfrak{U} + \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{A} \in \mathfrak{G} : \mathfrak{s}\,\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}\}$.

Обозначим через $\mathfrak{H}_0$ алгебру Ли группы H_0. $\mathfrak{H}_0$ является максимальной абелевой некомпактной подалгеброй в $\mathfrak{L}$. Через $\mathfrak{H}$ обозначим некомпактную картановскую подалгебру в $\mathfrak{G}$, векторная часть которой совпадает с $\mathfrak{H}_0$, т. е. $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{L}$.

Пусть Δ — система корней алгебры $\mathfrak{G}$ относительно $\mathfrak{H}$ и Δ_0 — аннулятор $\mathfrak{H}_0$ в Δ. Так как $\mathfrak{H}_0$ одномерна, то имеются только две возможности: либо существует единственный положительный (в смысле лексикографического упорядочения) корень ψ, получаемый ограничением на $\mathfrak{H}_0$ элементов из $\Delta - \Delta_0$, либо помимо ψ существует положительный корень 2ψ. Для корней ψ и 2ψ обозначим через Δ_ψ и $\Delta_{2\psi}$ множества корней из Δ, ассоциированных с ψ и 2ψ соответственно, т. е.

$$\Delta_\psi = \{\alpha \in \Delta:\ \alpha\,|\mathfrak{H}_0 = \psi\}, \quad \Delta_{2\psi} = \{\alpha \in \Delta : \alpha\,|\,\mathfrak{H} = 2\psi\}.$$

Числа элементов Δ_ψ и $\Delta_{2\psi}$, называемые кратностями корней ψ и 2ψ соответственно, будем обозначать через m_1 и m_2. Имеют место три случая (см. [1]):

1. m_1 нечетно, тогда $2\psi \notin \Delta$;
2. m_1 четно и $2\psi \notin \Delta$;
3. m_1 четно и $2\psi \in \Delta$, тогда m_2 — нечетно.

В последнем случае m_2 может принимать значения 1, 3 и 7.

Пусть E_α — элемент базы Вейля и $\mathfrak{G}^\alpha$ — соответствующая одномерная подалгебра. Тогда любой элемент $\mathfrak{l} \in \mathfrak{L}$ представляется в виде

$$\mathfrak{l} = \Sigma\alpha \in \Delta_\psi \cup \Delta_{2\psi}\ (\mathfrak{A}^\alpha - \mathfrak{s}\mathfrak{A}^\alpha) + \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{A}^\alpha \in \mathfrak{G}^\alpha,\ \mathfrak{y} \in \mathfrak{H}_0.$$

Для любых α_k и α_l из Δ_ψ

$$[E_{\alpha_k}, E_{\alpha_l}] = \begin{cases} N_{k,\,l} E_{\alpha_k+\alpha_l} & \text{при} \quad \alpha_k + \alpha_l \in \Delta_{2\psi}, \\ 0 & \text{при} \quad \alpha_k + \alpha_l \notin \Delta_{2\psi}, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $N_{k,\,l}$ — фиксированные числа для каждой пары α_k, α_l.

Положим $\mathfrak{Z}_0 = \Sigma\alpha \in \Delta_\psi \bigcup \Delta_{2\psi}\mathfrak{G}^\alpha$. $\mathfrak{Z}_0$ является нильпотентной подалгеброй в $\mathfrak{G}$. Из (1.1) непосредственно следует.

Предложение 1.1. *В случаях* 1 *и* 2 *подалгебра* $\mathfrak{Z}_0$ *абелева.*

Рассмотрим случай 3. Так же как в [1], занумеруем корни $\alpha_i \in \Delta_\psi$ следующим образом: $\Delta_\psi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_1}\}$, где $\alpha_i < \alpha_j$ в смысле лексикографического упорядочения, если $i < j$. Аналогично занумеруем корни $\beta_i \in \Delta_{2\psi}$. Пусть $m_1 = 2n_1$ и $m_2 = 2n_2 - 1$. Тогда $\Delta_\psi = \{\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_{n_1}, \alpha_{n_1+1}, \ldots, \alpha_{2n_1}\}$, $\Delta_{2\psi} = \{\beta_1, \ldots, \beta_{n_2}, \ldots, \beta_{2n_2-1}\}$.

3а) $n_2 = 1$. Тогда для любого $i \leqslant n_1$ $\beta_1 = \alpha_i + \alpha_{2n_1-i+1}$. Следовательно,

$$[E_{\alpha_i}, E_{\alpha_{2n_1-i+1}}] = N_{i,2n_1-i+1} E_{\beta_1}.$$

3б) $n_2 = 2$. Тогда для любого $i \leqslant n_1$, $\beta_1 = \alpha_i + \alpha_{n_1-i+1}$, $\beta_2 = \alpha_i + \alpha_{2n_1-i+1}$, $\beta_3 = \alpha_{n_1+i} + \alpha_{2n_1-i+1}$. Отсюда для любого $i \leqslant n$,

$$[E_{\alpha_i}, E_{\alpha_{n_1-i+1}}] = N_{i,\, n_1-i+1} E_{\beta_1},$$
$$[E_{\alpha_i}, E_{\alpha_{2n_1-i+1}}] = N_{i,2n_1-i+1} E_{\beta_2},$$
$$[E_{\alpha_{n_1+i}}, E_{\alpha_{2n_1-i+1}}] = N_{n_1+i,\, 2n_1-i+1} E_{\beta_3}.$$

3в) $n = 4$. Этот случай может быть лишь тогда, когда $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}^4$.

При этом $n_1 = 4$. Для любого $i \leqslant 4$ $\beta_4 = \alpha_i + \alpha_{9-i}$

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_7 = \alpha_3 + \alpha_4, \quad \beta_5 = \alpha_4 + \alpha_8 = \alpha_6 + \alpha_7,$$
$$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_6 = \alpha_2 + \alpha_4, \quad \beta_6 = \alpha_3 + \alpha_8 = \alpha_5 + \alpha_7,$$
$$\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_3, \quad \beta_7 = \alpha_2 + \alpha_8 = \alpha_5 + \alpha_6.$$

Отсюда вытекают коммутационные соотношения для корневых векторов.

2. Орисферическая система координат на X и метрический тензор. Введем в $\mathfrak{Z}_0$ систему координат, связанную с базой Вейля: $x_i \in (\mathfrak{G}^{\alpha_i})^*$, $1 \leqslant i \leqslant m_1$, $y_i \in (\mathfrak{G}^{\beta_i})^*$, $1 \leqslant j \leqslant m_2$, где $*$ означает дуальное пространство. В случаях 1 и 2 координаты y_j отсутствуют.

Введем в $\mathfrak{G}$ форму

$$\langle \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \rangle = (1/2) \, [\mathrm{sp}\,(\dot{\mathfrak{A}}_1 \dot{\mathfrak{A}}_2) - \mathrm{sp}\,(\dot{\mathfrak{A}}_1 \cdot \mathfrak{s} \dot{\mathfrak{A}}_2)], \tag{2.1}$$

где $\mathfrak{A} \to \dot{\mathfrak{A}}$ — присоединенное представление алгебры $\mathfrak{G}$. Нетрудно заметить, что на $\mathfrak{L}$ эта форма совпадает с картановским скалярным произведением $\langle \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \rangle_C = \mathrm{sp}\,(\dot{\mathfrak{A}}_1, \dot{\mathfrak{A}}_2)$, а на $\mathfrak{A}$ она тождественно равна нулю.

Предложение 2.1. *В введенной системе координат на* $\mathfrak{Z}_0$ $\langle \mathfrak{z}, \mathfrak{z} \rangle = A\,(x) + B\,(y)$, *где* $A\,(x)$ *и* $B\,(y)$ — *квадратичные формы, зависящие только от* x_i, $1 \leqslant i \leqslant m_1$, *и* y_j, $1 \leqslant j \leqslant m_2$, *соответственно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{s}^*$ — инволюция пространства $\mathfrak{H}^*$. Тогда для любых $\alpha \in \Delta_\psi$ и $\beta \in \Delta_{2\psi}$ $\mathfrak{s}^*\alpha \in \Delta_{-\psi}$ и $\mathfrak{s}^*\beta \in \Delta_{-2\psi}$. Для любых $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ из Δ $\langle E_{\varkappa_1}, E_{\varkappa_2} \rangle_C \neq 0$ лишь при $\varkappa_2 = -\varkappa_1$. Пусть $\alpha \in \Delta_\psi$ и $\beta \in \Delta_{2\psi}$. Тогда

$$\langle E_\alpha, E_\beta \rangle = (1/2) \, [\langle E_\alpha, E_\beta \rangle_C - \langle E_\alpha, \mathfrak{s} E_\beta \rangle_C] = \\ = (1/2) \, [\langle E_\alpha, E_\beta \rangle_C - \rho_\beta \, \langle E_\alpha, E_{\mathfrak{s}^*\beta} \rangle_C],$$

где $|\rho_\beta| = 1$. Так как ни для какого α $\beta \neq -\alpha$ и $\mathfrak{s}^*\beta \neq -\alpha$, $\langle E_\alpha, E_\beta \rangle = 0$. Отсюда вытекает утверждение предложения.

Пусть $t \in \mathfrak{H}_0^*$, тогда очевидно

Предложение 2.2. *Для любого* $\mathfrak{l}^+ (t, x_1, \ldots, x_{m_1}, y_1, \ldots, y_{m_2}) \in \mathfrak{Z}_0 + \mathfrak{H}_0$

$$\langle \mathfrak{l}^+, \mathfrak{l}^+ \rangle = t^2 + A\,(x) + B\,(y). \tag{2.2}$$

Матрицы, определяющие формы $A\,(x)$ и $B\,(y)$, будем обозначать соответственно через A и B.

Обозначим через G_0 подгруппу G_s, коммутирующую с H_0, а через Z — нильпотентную подгруппу в G. Тогда $Z_0 = \exp \mathfrak{Z}_0 \subset Z$ и $Z = Z_0 Z_1$, где Z_1 — нильпотентная подгруппа в G_0.

Для группы G справедливо разложение Ивасавы

$$g = zhru, \tag{2.3}$$

где $z \in Z$, $h \in H_0$, $u \in U$, а r принадлежит конечному множеству элементов из компактной подгруппы в G, не лежащих в U и обладающих свойством $r^2 \in S_k$. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь множество полной меры в X

$$X_0 = \{x = gx_0 \colon g = zhu\}.$$

Из 2.3 следует

П р е д л о ж е н и е 2.3. *На X_0 транзитивно действует группа ZH_0.*

Траектория группы H, проходящая через точку x_0 является незамкнутой геодезической в X_0, а траектория группы Z, проходящая через точку $h(t)x_0$, $h(t) \in H_0$, называется орисферой первого рода (в случае риманова пространства — просто орисферой). Ее мы будем обозначать Ω_t.

Так как $Z = Z_0 Z_1$ и Z_1 перестановочна с H_0, на орисфере Ω_t простотранзитивно действует группа Z_0. Таким образом, для любого $x \in X_0$

$$x = gx_0 = zh(t)x_0, \quad z \in Z_0, \quad h(t) \in H_0. \tag{2.4}$$

Представление (2.4) определяет на X_0 орисферическую систему координат $x(t, x_1, \ldots, x_{m_1}, y_1, \ldots, y_{m_2})$, где t — канонический параметр группы H_0, а $x_1, \ldots, x_{m_1}$, $y_1, \ldots, y_{m_2}$ — параметры группы Z_0 такие, что $z(x, y) = \exp \mathfrak{z}(x, y)$, $\mathfrak{z}(x, y) \in \mathfrak{Z}_0$. Они являются координатами точки x на орисфере Ω_t при фиксированном t.

Пусть $x = zh(t)x_0 \in X_0$ и $g = \mathfrak{z}h(\tau)$, $\mathfrak{z} \in Z_0$. Преобразование координат при движении $x \to g^{-1}x$ определяется формулой Кемпбела — Хаусдорфа и, если $\xi_1, \ldots, \xi_{m_1}$, $\eta_1, \ldots, \eta_{m_2}$ — параметры элемента $\mathfrak{z}$, то

$$t \to t - \tau, \quad x_i \to (x_i - \xi_i)\, e^{-\tau} \;\forall i \leqslant m, \tag{2.5}$$
$$y_j \to \left(y_j - \eta_j + (1/2) \sum\nolimits_{k,\, l} N^j_{k,\, l} x_k \xi_l\right) e^{-2\tau} \quad \forall j \leqslant m_2,$$

где суммирование ведется по всем $k \leqslant m_1$ и $l \leqslant m_1$, $N^j_{k,\, l} = -N^j_{l,\, k}$ определяются коммутационными соотношениями (1.1), причем, если $\alpha_k + \alpha_l \neq \beta_j$, то $N^j_{k,\, l} = 0$. В случаях 1 и 2 последняя формула в (2.5) отсутствует.

Рассмотрим бесконечно малый сдвиг точки x_0. В касательном пространстве ему соответствует вектор $\{\mathrm{d}t, \mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_{m_1}, \mathrm{d}y_{m_2}\}$, который мы короче будем записывать $\{\mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y\}$. Введенная выше форма (2.1) в алгебре $\mathfrak{G}$ естественным образом определяет метрику в касательном к X пространстве в точке x_0. Поэтому из (2.2) следует, что длина этого вектора

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}xA\,\mathrm{d}x' + \mathrm{d}yB\,\mathrm{d}y'. \tag{2.6}$$

Здесь $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$ — вектор-строчки, а $\mathrm{d}x'$ и $\mathrm{d}y'$ — вектор-столбцы.

Пусть $\{\mathrm{d}t, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y\}$ — вектор в касательном пространстве в произвольной точке x $(t, x_1, \ldots, x_{m_1}, y_1, \ldots, y_{m_2})$. Из формул (2.5) вытекает, что при сдвиге точки x в точку x_0 координаты вектора в касательном пространстве преобразуются по формулам

$$\mathrm{d}t \to \mathrm{d}t, \ \mathrm{d}x_i \to \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}x_i \qquad \text{для } i \leqslant m_1,$$
$$\mathrm{d}y_j \to \mathrm{e}^{-2t}\ (\mathrm{d}y_j - (1/2)\ \Sigma_{k,l}\ N^j_{k,l} x_k \mathrm{d}x_l) \qquad \text{для } j \leqslant m_2,$$

т. е. в точке x_0 сдвинутый вектор будет иметь вид

$$\{\mathrm{d}t,\ \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}x,\ \mathrm{e}^{-2t}\ (\mathrm{d}y - \mathrm{d}xN(x))\},$$

где матрица $N(x) = (n_{lj})$, $1 \leqslant l \leqslant m_1$, $1 \leqslant j \leqslant m_2$, такова, что $n_{lj} = (1/2)\ \Sigma_{k=1}^{m_1}\ N^j_{k,l} x_k$. Подставляя полученные координаты в (2.6), получим квадрат дифференциала дуги в произвольной точке $x = zh(t)\ x_0$, $z \in Z_0$,

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 + \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}x\ A\ \mathrm{d}x' + \mathrm{e}^{-4t}\ (\mathrm{d}y - \mathrm{d}xN)B\,(\mathrm{d}y - \mathrm{d}xN)' = \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x\,(e^{-2t}A + \mathrm{e}^{-4t}\,NBN')\mathrm{d}x' + \mathrm{e}^{-4t}\,\mathrm{d}yB\mathrm{d}y' - e^{-4t}\mathrm{d}xNB\mathrm{d}y' - \mathrm{e}^{-4t}\mathrm{d}yBN'\mathrm{d}x'$$

Из последней формулы непосредственно вытекает

Предложение 2.4. *Ковариантный метрический тензор на X_0 в орисферической системе координат имеет вид*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t}A + \mathrm{e}^{-4t}N(x)\,BN'(x) & -\mathrm{e}^{-4t}N(x)\,B \\ 0 & -\mathrm{e}^{-4t}BN'(x) & \mathrm{e}^{-4t}B \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

При этом $\det M = \mathrm{e}^{-2(m_1+2m_2)t}\ \det A \cdot \det B$.

3. Оператор Бельтрами — Лапласа на X. Для получения оператора Бельтрами — Лапласа $\mathscr{B}$ воспользуемся известной формулой [3]: если $(m_{\mu,\nu}) = M$ — ковариантный метрический тензор и $(m^{\mu,\nu}) = M^{-1}$ — контравариантный тензор, то

$$\mathscr{B} = \frac{1}{\sqrt{|\det M|}} \sum\nolimits_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sqrt{|\det M|} \sum\nolimits_\nu m^{\mu,\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}. \tag{3.1}$$

Контравариантный тензор M^{-1} нетрудно получить из (2.7). Он имеет вид

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^{2t}A^{-1} & e^{2t}A^{-1}N(x)\\ 0 & e^{2t}N'(x)A^{-1} & e^{4t}B^{-1}+e^{2t}N'(x)A^{-1}N(x)\end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Пусть $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$ — вектор-столбцы операторов дифференцирования по x_i, $1\leqslant i\leqslant m_1$, и y_j, $1\leqslant j\leqslant m_2$, соответственно. Тогда из (3.1) и (3.2), учитывая, что $\det A$ и $\det B$ — постоянные, получим

$$\mathcal{B}=e^{(m_1+2m_2)t}\frac{\partial}{\partial t}e^{-(m_1+2m_2)t}\frac{\partial}{\partial t}+$$
$$+e^{2t}\left(\frac{\partial}{\partial x}+N\frac{\partial}{\partial y}\right)'A^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}+N\frac{\partial}{\partial y}\right)+e^{4t}\frac{\partial'}{\partial y}B^{-1}\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.3}$$

Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция на X. При каждом фиксированном t ее можно рассматривать как функцию на орисфере Ω_t. Так как на Ω_t простотранзитивно действует группа Z_0, функцию $f(x)=f(t, x_1,\ldots$ $\ldots, x_{m_1}, y_1,\ldots, y_{m_2})$ при фиксированном t можно рассматривать как функцию на группе Z_0. Следовательно, для нее определены операторы правого сдвига $T_{\mathfrak{z}}^{\Pi}f(t,z)=$ $=f(t, z\mathfrak{z})$. При таком сдвиге на элемент $\mathfrak{z}\in Z_0$ с параметрами $\xi_1,\ldots, \xi_{m_1}, \eta_1,\ldots, \eta_{m_2}$ координаты точки x преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} x_i &\to x_i+\xi_i && \text{для } i\leqslant m_1,\\ y_j &\to y_j+\eta_j+(1/2)\,\Sigma_{k,l}N^j_{k,l}x_k\xi_l && \text{для } j\leqslant m_2.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Обозначим через D_{x_i} и D_{y_j} инфинитезимальные операторы (операторы Ли) правого сдвига: для любых $i\leqslant$ $\leqslant m_1$ и $j\leqslant m_2$

$$D_{x_i}=\frac{\partial}{\partial\xi_i}T_{\mathfrak{z}}^{\Pi}f(t,z)\,|_{\mathfrak{z}=e},\quad D_{y_j}=\frac{\partial}{\partial\eta_j}T_{\mathfrak{z}}^{\Pi}f(t,z)\,|_{\mathfrak{z}=e}.$$

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Для любого однородного симметрического пространства X ранга 1 оператор $\mathcal{B}$*

в орисферической системе координат имеет вид

$$\mathcal{B} = e^{(m_1+2m_2)t} \frac{\partial}{\partial t} e^{-(m_1+2m_2)t} \frac{\partial}{\partial t} + \\ + e^{2t} D_x' A^{-1} D_x + e^{4t} D_y' B^{-1} D_y,$$

где A и B — симметрические матрицы, определяющие скалярное произведение в касательном пространстве, D_x и D_y — вектор-столбцы из операторов Ли правого сдвига на группе Z_0 D_{x_i} и D_{y_j} соответственно.

Доказательство. Из формул (3.4) следует, что операторы D_{x_i} и D_{y_j} имеют вид

$$D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_1} N_{k,i}^1 x_k \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_1} N_{k,i}^{m_2} x_k \frac{\partial}{\partial y_{m_2}} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{k,j} N_{k,i}^j x_k \frac{\partial}{\partial y_j},$$

$$D_{y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Используя введенную выше матрицу $N(x)$ и записывая все операторы D_{x_i} в виде столбца, получим $D_x = \frac{\partial}{\partial x} + N(x)\frac{\partial}{\partial y}$, где $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$ — вектор-столбцы операторов дифференцирования. Очевидно, $D_y = \partial/\partial y$. Подставляя эти выражения в (3.3), получим утверждение предложения.

Автор выражает благодарность Ф. И. Карпелевичу за полезные обсуждения.

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Поступило 12.V.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Араки Ш., Корневые системы и локальная классификация неприводимых симметрических пространств, Математика, **10**, № 1 (1975), 91—126.

[2] Гельфанд И. М., Граев М. И., Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии, Тр. Моск. матем. о-ва, 8 (1959), 321—390.

[3] Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М., «Мир», 1964.