Г. А. Карасев, К теории n-нильпотентных групп,
Матем. заметки, 1969, том 5, выпуск 6, 653–664

https://www.mathnet.ru/mzm6878

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 5, № 6 (1969), 653—664

УДК 512.4

К ТЕОРИИ n-НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

Г. А. Карасев

Изучается множество $\nu(G)$ всех тех целых чисел n, для которых группа G является n-нильпотентной. Для $\nu(G)$ доказывается ряд теорем, обобщающих основные результаты Ф. Леви. Библ. 3 назв.

§ 1. Напомним прежде всего ряд известных определений и предложений, используемых в статье.

Пусть n — некоторое целое число.

Определение 1. Если x и y — элементы некоторой группы, то их *n-коммутатором* (Р. Бэр [2]) называется элемент $[x, y]_n = (xy)^n y^{-n} x^{-n}$.

Определение 2. *Взаимным n-коммутантом* двух подгрупп A и B некоторой группы G называется подгруппа $[A, B]_n$, порожденная всеми n-коммутаторами $[a, b]_n$, где $a \in A$, $b \in B$.

Легко проверяется, что

$$[A, B]_{-1} = [A, B]. \tag{1}$$

где $[A, B]$ — взаимный коммутант подгрупп A и B.

Известно (см. [3]), что если A и B — нормальные делители группы G, то их взаимный n-коммутант также нормален в G, причем имеют место следующие соотношения:

$$[A, B]_n = [B, A]_n, \tag{2}$$

$$[A, B]_n = [A, B]_{1-n}, \tag{3}$$

$$[A, B]_n \subseteq A \cap B, \tag{4}$$

$$[A, B^n] \subseteq [A, B]_n [A, B]_{n+1} \text{ *}), \tag{5}$$

$$[A, B^n \cap B^{n-1}] \subseteq [A, B]_n, \tag{6}$$

$$[A, B]_{mn} \subseteq [A, B]_m [A, B]_n. \tag{7}$$

*) Через B^n обозначается подгруппа, порожденная n-ми степенями всех элементов из B.

Определение 3. Группа G называется *n-нильпотентной*, если в ней существует *нижний n-центральный ряд*, т. е. конечный ряд подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_i \supset G_{i+1} \supset \ldots \supset G_s = E,$$

где

$$G_{i+1} = [G_i, \ G]_n, \ \ i = 0, \ 1, \ldots, \ s-1.$$

Число s называется *классом* n-нильпотентной группы G и обозначается через ${}^nk\,(G)$.

Существует ряд других определений n-нильпотентной группы, эквивалентных определению 3 (см. [3]).

Если G — некоторая группа, то через $\nu\,(G)$ будем обозначать множество всех таких целых чисел n, для которых группа G является n-нильпотентной.

Определение 4. Группа G называется *n-абелевой*, если она удовлетворяет тождественному соотношению

$$(xy)^n = x^n y^n.$$

Соответственно через $\varepsilon(G)$ обозначается множество всех тех целых чисел n, для которых группа G n-абелева.

Так как n-абелева группа — это n-нильпотентная группа класса 1, то для любой группы G

$$\varepsilon\,(G) \subseteq \nu\,(G). \tag{8}$$

Множества $\varepsilon\,(G)$ и $\nu\,(G)$ непусты, так как числа 0 и 1 всегда содержатся в $\varepsilon\,(G)$. В том случае, когда группа G нильпотентна, $\nu\,(G)$ совпадает со множеством всех целых чисел.

§ 2. Следующие две леммы играют существенную роль при доказательстве основных результатов этой статьи.

ЛЕММА 1. *Если $N_1, N_2, \ldots, N_k$ — нормальные делители группы G, то при любом целом числе n*

$$\left[\prod_{i=1}^{k} N_i, \ G\right]_n = \prod_{i=1}^{k} [N_i, \ G]_n.$$

Доказательство этой леммы можно найти в работе [3].

ЛЕММА 2. *Пусть нормальные делители $B_0, \ B_1, \ldots$ $\ldots, B_s$ группы G и целые числа $n_0, n_1, \ldots, n_s$ удовлетворяют следующим условиям*:

1) $[N, \ B_0]_{n_0} \subseteq [N, B_1]_{n_1}\,[N, \ B_2]_{n_2} \ldots [N, B_s]_{n_s}$ *для любого нормального делителя N группы G*;

2) *для любого числа* $i = 1, 2, \ldots, s$ *в* G *существует конечный ряд подгрупп* $G = B_{i0} \supset \ldots \supset B_{ij} \supset B_{i, j+1} \supset \ldots \supset B_{ik_i} = E$, *где* $B_{i, j+1} = [B_{ij}, B_i]_{n_i}$, $j = 0, 1, \ldots, k_i - 1$;

3) $\left[\prod_{i=1}^{k} N_i, B_0\right]_{n_0} = \prod_{i=1}^{k} [N_i, B_0]_{n_0}$ *для любых нормальных делителей* $N_1, N_2, \ldots, N_k$ *группы* G.

Тогда в группе G *существует конечный ряд подгрупп*

$$G = G_0 \supset \ldots \supset G_i \supset G_{i+1} \supset \ldots \supset G_l = E, \tag{9}$$

где

$$G_{i+1} = [G_i, B_0]_{n_0}, \quad i = 0, 1, \ldots, l-1; \; l \leqslant 1 - s + \sum_{j=1}^{s} k_j.$$

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ — некоторая конечная последовательность, членами которой могут быть любые из чисел $1, 2, \ldots, s$. Введем следующие обозначения:

$$H_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t} = [\ldots[[G, B_{\alpha_1}]_{n_{\alpha_1}}, B_{\alpha_2}]_{n_{\alpha_2}}, \ldots, B_{\alpha_t}]_{n_{\alpha_t}},$$

$$H_t = \prod_{\alpha_1, \ldots, \alpha_t = 1}^{s} H_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t},$$

где символ $\prod_{\alpha_1, \ldots, \alpha_t=1}^{s}$ означает, что произведение берется по всем t-элементным последовательностям, составленным из чисел $1, 2, \ldots, s$. Нетрудно убедиться, что все подгруппы $H_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}$ и H_t являются нормальными делителями группы G.

Построим в группе G ряд подгрупп

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_i \supseteq G_{i+1} \supseteq \ldots,$$

где $G_{i+1} = [G_i, B_0]_{n_0}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, и покажем, что

$$G_t \subseteq H_t \tag{10}$$

при любом натуральном числе t. Для этого применим индукцию по t.

Если $t = 1$, то из условия 1) доказываемой леммы получаем

$$G_1 = [G, B_0]_{n_0} \subseteq [G, B_1]_{n_1} [G, B_2]_{n_2} \ldots [G, B_s]_{n_s} = \prod_{\alpha_1=1}^{s} H_{\alpha_1} = H_1.$$

Пусть (10) выполняется для числа t; докажем его для $(t+1)$. Для этого используем последовательно предположение индукции и условия 3), 1):

$$G_{t+1}=[G_t,\ B_0]_{n_0}\subseteq[H_t,\ B_0]_{n_0}=$$

$$=\left[\prod_{\alpha_1,\ldots,\alpha_t=1}^{s}H_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t},\ B_0\right]_{n_0}=\prod_{\alpha_1,\ldots,\alpha_t=1}^{s}[H_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t},\ B_0]_{n_0}\subseteq$$

$$\subseteq\prod_{\alpha_n,\ldots,\alpha_t=1}^{s}[H_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t},\ B_1]_{n_1}[H_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t},\ B_2]_{n_2}\ldots$$

$$\ldots[H_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t},\ B_s]_{n_s}=\prod_{\alpha_1,\ldots,\alpha_t=1}^{s}H_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t1}H_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t2}\ldots$$

$$\ldots H_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_ts}=\prod_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{t+1}=1}^{s}H_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t+1}}=H_{t+1}.$$

Таким образом,

$$G_{t+1}\subseteq H_{t+1},$$

что завершает индукцию.

Положим теперь (см. условие 2)

$$t=1-s+\sum_{j=1}^{s}k_j=\sum_{j=1}^{s}(k_j-1)+1.$$

Тогда в последовательности $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_t$ хотя бы одно из чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ s$, скажем i, встречается не меньше, чем k_i раз.

В этом случае, используя соотношение (4), нетрудно показать, что

$$H_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}\subseteq H_{\overbrace{ii\ldots i}^{k_i\ \text{раз}}}.$$

Но в силу условия 2)

$$H_{\overbrace{ii\ldots i}^{k_i\ \text{раз}}}=[\ldots[[G,\ B_i]_{n_i},\ B_i]_{n_i},\ \ldots,\ B_i]_{n_i}=B_{ik_i}=E.$$

Таким образом, какова бы ни была последовательность $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_t$, составленная из чисел $1,2,\ldots,s$, $H_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}=E$ при $t=1-s+\sum_{j=1}^{s}k_j$ и, следовательно, $H_t=E$. Наконец, из соотношения (10) следует, что $G_t=E$. Это завершает доказательство леммы.

С л е д с т в и е 1. *Если целые числа* $n_1, n_2, \ldots, n_s$ *содержатся в* $\nu(G)$, *где* G — *некоторая группа, и число* n_0 *таково, что для любого нормального делителя* N *группы* G *выполняется соотношение*

$$[N, G]_{n_0} \subseteq [N, G]_{n_1} [N, G]_{n_2} \ldots [N, G]_{n_s},$$

то $n_0 \in \nu(G)$, *причем*

$$^{n_0}k(G) \leqslant 1 - s + \sum_{i=1}^{s} {}^{n_i}k(G).$$

Действительно, если положить $B_0 = B_1 = \ldots = B_s = G$, то для группы G будут, очевидно, выполняться условия 1) и 3) леммы 2. В силу леммы 1 выполняется также и условие 2). Теперь остается заметить, что ряд (9), существующий в силу леммы 2, превращается в данном случае в нижний n-центральный ряд группы G.

§ 3. Перейдем к изучению свойств множества $\nu(G)$ произвольной группы G. Следующие два предложения известны (см. [3]).

ТЕОРЕМА 1. (Р. Бэр [2]). *Если* $n \in \nu(G)$, *то*

$$1 - n \in \nu(G), \text{ причем } {}^{n}k(G) = {}^{1-n}k(G).$$

ТЕОРЕМА 2. *Если целые числа* m *и* n *содержатся в* $\nu(G)$, *то*

$$mn \in \nu(G) \text{ и } {}^{mn}k(G) \leqslant {}^{m}k(G) + {}^{n}k(G) - 1.$$

Заметим, что эти теоремы легко могут быть доказаны с помощью следствия 1 и соотношений (3), (7).

В дальнейшем мы будем использовать обозначение $x \equiv y \pmod H$, где H — некоторый нормальный делитель группы G, для того случая, когда $xy^{-1} \in H$.

ТЕОРЕМА 3. *Если целые числа* $n, m, m+1$ *содержатся в* $\nu(G)$, *то*

$$r = km + n \in \nu(G)$$

для любого целого числа k, *причем*

$$^{r}k(G) \leqslant {}^{n}k(G) + {}^{m}k(G) + {}^{m+1}k(G) - 2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем прежде всего, что для любых целых чисел m, n, k и любых нормальных делителей A и B группы G имеет место соотношение

$$[A, B]_{km+n} \subseteq [A, B]_m [A, B]_{m+1} [A, B]_n. \qquad (11)$$

В случае $k \geqslant 0$ применим индукцию по k. Так как $[A, B]_0 = E$, то при $k = 0$ соотношение (11) выполняется тривиальным образом. Пусть оно справедливо для числа k; докажем его для числа $(k+1)$.

Если a и b — произвольные элементы из A и B соответственно

$$[A, B]_m [A, B]_{m+1} [A, B]_n = H,$$

то

$$(ab)^{(k+1)m+n} = (ab)^{km+n} (ab)^m =$$
$$= [a, b]_{km} a^{km+n} b^{km+n} [a, b]_m a^n b^n \equiv a^{km+n} b^{km+n} a^m b^m \pmod H$$

вследствие того, что элементы $[a, b]_m$, $[a, b]_n$ и $[a, b]_{km+n}$ содержатся в H, причем последний в силу предположения индукции. Так как

$$[b^{m+n}, a^n] \in [B, A^m] \subseteq [B, A]_m [B, A]_{m+1} \subseteq H$$

(см. (5)), то

$$a^{km+n} b^{km+n} a^n b^n = a^{km+n} a^m b^{km+n} [b^{m+n}, a^m] b^m \equiv$$
$$\equiv a^{km+n} a^m b^{km+n} b^m \pmod H \equiv a^{(k+1)m+n} b^{(k+1)m+n} \pmod H.$$

Таким образом,

$$(ab)^{(k+1)m+n} \equiv a^{(k+1)m+n} b^{(k+1)m+n} \pmod H,$$

т. е. $[a, b]_{(k+1)m+n} \in H$, для любых элементов a и b из A и B соответственно, откуда легко следует, что $[A, B]_{(k+1)m+n} \subseteq H$. Этим доказано, что (11) справедливо для любого $k \geqslant 0$.

Пусть теперь $k < 0$. Тогда

$$[A, B]_{km+n} = [A, B]_{-|k|m+n} = [A, B]_{|k|m+(1-n)}$$

в силу (3). По доказанному

$$[A, B]_{|k|m+(1-n)} \subseteq [A, B]_m [A, B]_{m+1} [A, B]_{1-n} =$$
$$= [A, B]_m [A, B]_{m+1} [A, B]_n.$$

Таким образом, соотношение (11) выполняется для любого целого числа k.

Учитывая (11), для доказательства теоремы достаточно в условиях следствия 1 положить $s=3$, $n_0=km+n$, $n_1=m$, $n_2=m+1$, $n_3=n$.

Следствие 2. *Если числа m, $m+1$, $n \in \varepsilon(G)$, то $km+n \in \varepsilon(G)$ для любого целого числа k.*

ТЕОРЕМА 4. *Если целые числа m и n содержатся в $\nu(G)$, то число $r = km(1-m)+n \in \nu(G)$ при любом целом числе k, причем ${}^rk(G) \leqslant k\,{}^m(G) + {}^nk(G) - 1$.*

Доказательство. Используя n-коммутаторное тождество

$$[x, y]_{n+1} = [x, y]_n x^{n+1} [x, y^{-n}] x^{-(n+1)},$$

нетрудно доказать, что для любых нормальных делителей A и B группы G имеет место соотношение

$$[A, B]_{n+1} \subseteq [A, B]_n [A, B^n]. \qquad (12)$$

А тогда, применяя последовательно (12), (7), (3), (6), получаем

$$[A, B]_{(1-m)m+1} \subseteq [A, B]_{(1-m)m} [A, B^{(1-m)m}] \subseteq$$
$$\subseteq [A, B]_{1-m} [A, B]_m [A, B^m \cap B^{1-m}] \subseteq [A, B]_m,$$

т. е.

$$[A, B]_{(1-m)m+1} \subseteq [A, B]_m. \qquad (13)$$

Из соотношений (11) и (13) следует, что

$$[A, B]_{k(1-m)m+n} \subseteq [A, B]_m [A, B]_n \qquad (14)$$

при любом целом числе k.

Для доказательства теоремы 4 достаточно теперь в условиях следствия 1 положить $s = 2$, $n_0 = k(1-m)m+n$, $n_1 = m$, $n_2 = n$.

Следствие 3. *Если числа m и n содержатся в $\varepsilon(G)$, то $km(1-m)+n \in \varepsilon(G)$ при любом целом числе k.*

ТЕОРЕМА 5. *Если числа m и $m+1$ содержатся в $\nu(G)$, то в группе G существует конечный ряд подгрупп $G = G_0 \supset \ldots \supset G_i \supset G_{i+1} \supset \ldots \supset G_l = E$, где $G_{i+1} = [G_i, G^m]$, $i = 0, 1, \ldots, l-1$; $l \leqslant {}^m k(G) + {}^{m+1}k(G) - 1$.*

Доказательство. В силу (1) и (5) в группе G для любого нормального делителя N выполняется соотношение

$$[N, G^m]_{-1} = [N, G^m] \subseteq [N, G]_m [N, G]_{m+1}.$$

Если теперь в условиях леммы 2 положить $s = 2$, $n_0 = -1$, $n_1 = m$, $n_2 = m+1$, $B_0 = G^m$, $B_1 = B_2 = G$, то придем к утверждению данной теоремы.

Следствие 4. *Во всякой n-нильпотентной группе G существует конечный ряд подгрупп*

$$G = G_0 \supset \ldots \supset G_i \supset G_{i+1} \supset \ldots \supset G_l = E,$$

где

$$G_{i+1} = [G_i,\ G^{n(n-1)}],\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ l-1,\ l \leqslant 2 \cdot {}^{n}k\ (G) - 1.$$

Доказательство. Так как числа 0, 1 и n содержатся во множестве $\nu\ (G)$ данной группы G, то по теореме 4 $l_1 = n\ (n-1) \in \nu\ (G)$ и $l_2 = n\ (n-1) + 1 \in \nu\ (G)$ причем, как нетрудно показать

$${}^{l_1}k\ (G) \leqslant {}^{n}k\ (G) \quad \text{и} \quad {}^{l_2}k(G) \leqslant {}^{n}k\ (G),$$

но тогда утверждение данного следствия вытекает из теоремы 5 при $m = n\ (n-1)$.

ТЕОРЕМА 6. *Если $m \in \nu\ (G)$ и в группе G существует конечный ряд подгрупп*

$$G = G_0 \supset \ldots \supset G_i \supset G_{i+1} \supset \ldots \supset G_l = E,$$

где

$$G_{i+1} = [G_i,\ G^m],\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ l-1,$$

то $(m+1) \in \nu\ (G)$, причем

$${}^{m+1}k\ (G) \leqslant {}^{m}k\ (G) + l - 1.$$

Для доказательства в условии леммы 2 нужно положить $s = 2$, $B_0 = B_1 = G$, $B_2 = G^m$, $n_0 = m+1$, $n_1 = m$, $n_2 = -1$ и учесть, что для любого нормального делителя N группы G в силу (12) и (1) выполняется соотношение

$$[N,\ G]_{m+1} \subseteq [N,\ G]_m\ [N,\ G^m]_{-1}.$$

Из теорем 5 и 6 легко можно получить

Следствие 5. *Если $m \in \varepsilon\ (G)$, то $(m+1) \in \varepsilon\ (G)$ тогда и только тогда, когда G^m содержится в центре группы G.*

Замечание. Утверждения следствий 2, 3, 5 вытекают также из результатов Ф. Леви [1].

§ 4. Теоремы, доказанные в предыдущем параграфе, позволяют сделать ряд важных выводов о строении множеств $\varepsilon\ (G)$ и $\nu\ (G)$ для произвольной группы G.

Так, из теоремы 4 следует, что *если $n \in \nu\ (G)$ (или $n \in \varepsilon\ (G)$) и $n > 1$, то вместе с любым своим числом m множество $\nu\ (G)$ (соответственно $\varepsilon\ (G)$) содержит и весь класс чисел, сравнимых с m по модулю $n\ (n-1)$*, иначе говоря, множество $\nu\ (G)$ (соответственно $\varepsilon\ (G)$) распадается на некоторые классы чисел по модулю $n\ (n-1)$.

В дальнейшем множество всех положительных чисел, обладающих тем же свойством по отношению к $\nu(G)$ (соответственно к $\varepsilon(G)$), что и число $n(n-1)$, будем обозначать через $\nu_0(G)$ (соответственно, $\varepsilon_0(G)$).

Легко видеть, что $\nu_0(G)$ (соответственно $\varepsilon_0(G)$) пусто тогда и только тогда, когда $\nu(G)$ (соответственно $\varepsilon(G)$), состоит только лишь из 0 и 1. Далее этот случай мы исключаем из рассмотрения.

Если $\nu_0(G)$ (соответственно, $\varepsilon_0(G)$) непусто, то наименьшее число, содержащееся в $\nu_0(G)$ (в $\varepsilon_0(G)$), будем называть *ν-модулем* (*ε-модулем*) группы G.

ЛЕММА 3. *Если m есть ν-модуль (ε-модуль) группы G, то $\nu_0(G)$ (соответственно $\varepsilon_0(G)$) совпадает со множеством M всех положительных чисел, кратных m.*

Доказательство. Так как $0 \in \nu(G)$, то $\nu(G)$ содержит класс чисел, сравнимых с 0 по модулю m, в частности, $M \subseteq \nu(G)$. Вместе с тем каждый класс чисел по модулю m распадается на классы чисел по модулю km для любого натурального числа k.

Поэтому

$$M \subseteq \nu_0(G). \tag{15}$$

С другой стороны, произвольное число l из $\nu_0(G)$ можно представить в виде $l = mq + r$, где q и r — целые неотрицательные числа, причем $0 \leqslant r < m$. Допустим, что $r \neq 0$. Если s — произвольное целое число, n — некоторое число из $\nu(G)$, то $(-sq)m + n \in \nu(G)$, так как $m \in \nu_0(G)$, и $sl + [(-sq)m + n] \in \nu(G)$, так как $l \in \nu_0(G)$, т. е. $s(l - qm) + n = sr + n \in \nu(G)$.

Таким образом, вместе с любым своим числом n множество $\nu(G)$ содержит и весь класс чисел, сравнимых с n по модулю r, т. е. $r \in \nu_0(G)$. Но это противоречит определению ν-модуля группы G. Поэтому $r = 0$ и, следовательно, $l \in M$. Последнее вместе с (15) доказывает утверждение данной леммы о множестве $\nu_0(G)$. Для $\varepsilon_0(G)$ доказательство совершенно аналогично.

Следствие 6. *Если m есть ν-модуль группы G, то $n(n-1) \equiv 0 \pmod{m}$ для любого числа $n \in \nu(G)$.*

Аналогичное утверждение выполняется для любого числа из $\varepsilon(G)$ (см. Ф. Леви [1]).

ТЕОРЕМА 7. *Если ν-модулем группы G является число m и $n \in \nu(G)$, то следующие условия эквивалентны:*

1) $n + 1 \in \nu(G)$,

2) $n \equiv 0 \pmod m$,

3) *подгруппа* G^n *является нильпотентной.*

Доказательство. Если выполняется условие 1) и $n > 0$, то из теоремы 3 следует, что $n \in \nu_0(G)$, если же $n < 0$, то $-n \in \nu_0(G)$. В обоих случаях по лемме 3 $n \equiv 0 \pmod m$, т. е. выполняется условие 2).

Если выполняется условие (2), то в силу леммы 3 одно из чисел n или $-n$ содержится в $\nu_0(G)$, но тогда вместе с 1 множество $\nu(G)$ содержит и число $n+1$. Условие 3) нетрудно получить теперь из теоремы 5.

Пусть, наконец, в группе G выполняется условие 3). Так как $[G, G^n] \subseteq G^n$, то, используя нильпотентность подгруппы G^n, в группе G нетрудно построить ряд подгрупп, удовлетворяющий условиям теоремы 6, по которой $n+1 \in \nu(G)$. Это завершает доказательство теоремы.

Аналогичная теорема справедлива для множества $\varepsilon(G)$ произвольной группы G (см. Ф. Леви [1]).

Из доказанного следует, что ν-*модуль группы* G *есть наименьшее натуральное число* m, *содержащееся в* $\nu(G)$, *такое, что подгруппа* G^m *является нильпотентной.*

В частности, нильпотентные группы и только они имеют ν-модулем число 1. Число 2 не может быть ν-модулем ни для какой группы, так как любая 2-нильпотентная группа является нильпотентной. Отметим еще ряд следствий из доказанных теорем, используя обозначения:

$\Pi(n)$ — множество всех простых делителей числа n,

$\Pi'(n)$ — множество всех простых чисел, не содержащихся в $\Pi(n)$.

Следствие 7. *Если* ν-*модулем группы* G *является число* m, *то совокупность всех* $\Pi'(m)$-*элементов группы* G *является ее нильпотентной подгруппой* *).

Действительно, если g есть $\Pi'(m)$-элемент группы G, то в ней существует элемент g_1 такой, что $g = g_1^m$, следовательно, $g \in G^m$, а тогда утверждение следствия вытекает из нильпотентности G^m.

Отсюда следует, в частности, что *во всякой* n-*нильпотентной группе совокупность всех* $\Pi'(n(n-1))$-*элементов является ее нильпотентной подгруппой.*

*) Можно даже доказать, что это будет подгруппа, содержащаяся в k-м члене верхней центральной цепи группы G, причем $k \leqslant {}^m k(G) + {}^{m+1} k(G) - 1$.

С л е д с т в и е 8. *Если* ν*-модулем периодической группы* G *является число* $m > 1$, *то в группе* G *содержится хотя бы один* $\Pi(m)$*-элемент, отличный от единицы.*

Действительно, если бы утверждение следствия не выполнялось, то группа G была бы $\Pi'(m)$-группой и, следовательно, нильпотентной. А тогда $m = 1$, что противоречит условию.

С л е д с т в и е 9. ν*-модуль* n*-нильпотентной* $\Pi(n)$*-группы является делителем числа* n.

Действительно, всякая n-нильпотентная $\Pi(n)$-группа является $(n+1)$-нильпотентной (см. [3]), а тогда $n \equiv 0 \pmod m$ по теореме 7.

Рассмотрим еще один частный случай. Пусть G есть 3-нильпотентная группа, не являющаяся нильпотентной. Так как $4 = 3 \cdot 2 + (-2)$, то в силу теорем 1 и 4 она будет также 4-нильпотентной. Следовательно, ν-модулем группы G является число 3, причем $\nu(G)$ состоит из двух классов чисел, сравнимых с 0 и 1 по модулю 3. Если группа G периодическая, то она обязана содержать хотя бы один элемент порядка 3, отличный от единицы.

Вернемся к рассмотрению свойств множества $\nu(G)$ произвольной группы G. Если ν-модулем (ε-модулем) группы G является число m, то через $\bar{\nu}(G)$ (соответственно $\bar{\varepsilon}(G)$) обозначим множество всех тех классов чисел по модулю m, из которых состоит $\nu(G)$ (соответственно $\varepsilon(G)$). В силу теоремы 2 произведение любых двух классов из $\bar{\nu}(G)$ снова содержится в $\bar{\nu}(G)$, т. е. $\bar{\nu}(G)$ является полугруппой относительно операции умножения классов, причем каждый ее элемент является идемпотентом. Последнее следует из того, что если $n \in \nu(G)$, то в силу следствия 6

$$n(n-1) \equiv 0 \pmod m, \text{ т. е. } n^2 \equiv n \pmod m.$$

Из теоремы 7 вытекает, кроме того, что $\bar{\nu}(G)$ не содержит никаких двух последовательных классов, кроме классов чисел, сравнимых с 0 и 1. Аналогичные утверждения справедливы для $\bar{\varepsilon}(G)$.

Суммируя все сказанное, так же как для $\varepsilon(G)$ (см. [1]), можно доказать следующую теорему, описывающую строение множества $\nu(G)$:

ТЕОРЕМА 8. *Если* ν*-модулем группы* G *является число* m, *то существует такое разложение* m *в произведение* t *попарно взаимно простых чисел:* $m = q_1 q_2, \ldots, q_t$, *где* $q_i > 2$,

$i = 1, 2, \ldots, t$, что $\bar{\nu}(G)$ состоит из 2^t классов чисел, каждое из которых сравнимо с 0 или 1 по модулю q_i для $i = 1, 2, \ldots, t$.

Из этой теоремы следует, например, что если ν-модулем группы G является простое число или число вида $2p$, где p — простое, то $\bar{\nu}(G)$ состоит только из двух классов чисел, сравнимых с 0 и 1 по ν-модулю группы G.

В заключение отметим один нерешенный пока вопрос. Пусть задано некоторое множество M классов чисел по модулю m, обладающее всеми выше перечисленными свойствами множества $\bar{\nu}(G)$ произвольной группы G. Существует ли группа G_0 такая, что $M = \nu(G_0)$? Для $\varepsilon(G)$ этот вопрос решен положительно (Ф. Леви [1]).

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Поступило 16.VII.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Levi F., Notes on group theory. I, Indian Math. Soc., 8 (1944), 1—9: 9 (1945), 37—42.

[2] Baer R., Factorization of n-soluble and n-nilpotent groups, Proc. Amer. Math. Soc., 4, № 1 (1953), 15—26.

[3] Карасев Г. А., К понятию n-нильпотентной группы, Сибирский матем. ж., 7, № 5 (1966), 1014—1032.