ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 3, с. 291–298

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ С ПОМОЩЬЮ КОНСТРУКТИВНОГО НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА. I

© 2004 г. А. В. Боровских

Использование бесконечно малых величин как элементов континуума сыграло решающую роль для формулировки основных результатов анализа [1–5]. Представления о делении континуума на бесконечно малые части и по сей день эффективно используется в физике, механике, инженерных расчетах. В настоящей работе предлагается конструкция неархимедова континуума (который назван множеством гипердействительных величин), позволяющая реализовать в точных математических терминах интуитивное представление о бесконечно малой величине. В отличие от классического нестандартного анализа [6–9] для построения этого континуума не требуется никаких метаматематических конструкций. Этот континуум оказывается изоморфен множеству формальных степенных рядов, так что оперирование с его элементами есть по существу оперирование с рядами. Эффективность использования введенного множества иллюстрируется на расчете примеров релаксационных колебаний.

Работа состоит из двух частей. В первой излагаются основные принципы конструктивного нестандартного анализа, во второй приводятся примеры расчета релаксационных колебаний для одинарного и сдвоенного уравнений Ван-дер-Поля.

1. Математический континуум. Предполагается, что геометрический или физический континуум (прямая) содержит фрагменты, отношения которых друг к другу являются бесконечно малыми (относительно отношений, выражаемых вещественными числами). Это позволяет считать параметризацию такого континуума числовой осью $\mathbb{R}^1$ неполной и пополнять множество $\mathbb{R}^1$ бесконечно малыми отношениями, создавая множество величин, которые, так же как и $\mathbb{R}^1$, могут отображаться на геометрический/физический континуум, задавая его более полную, хотя и, вообще говоря, частичную параметризацию.

Под математическим континуумом мы далее будем понимать ту или иную модель физического континуума. Общеупотребительной моделью является $\mathbb{R}^1$, ниже вводится более широкое множество гипердействительных величин $\mathbb{HR}$, комментируются его простые алгебраические расширения $\mathbb{HR}_n$ и трансцендентные расширения, связанные с введением “экспоненциальных” или “логарифмических” бесконечно малых величин.

2. Поле формальных дробей. Простое трансцендентное расширение поля $\mathbb{R}^1$, полученное введением бесконечно малого элемента θ, является полем формальных дробей (см., например, [10–12]), т.е. выражений вида

$$r = \frac{u_0 + u_1\theta + u_2\theta^2 + \ldots + u_n\theta^n}{v_0 + v_1\theta + v_2\theta^2 + \ldots + v_m\theta^m}. \tag{1}$$

Это поле упорядочивается естественным образом: если дробь (1) представить в канонической форме

$$r = C\theta^s \frac{1 + a_1\theta + \ldots + a_{n'}\theta^{n'}}{1 + b_1\theta + \ldots + b_{m'}\theta^{m'}}, \tag{2}$$

то $0 < r_1 < r_2$, если либо $s_1 > s_2$, либо $s_1 = s_2$, но $0 < C_1 < C_2$. Такое упорядочение в точности соответствует иерархии дробно-рациональных функций в окрестности нуля в смысле классического анализа.

В этом поле, очевидно, отсутствует аксиома Архимеда, однако ее функции с успехом выполняет свойство, которому посвящена

Лемма 1. *Пусть r – величина вида (1) такая, что $0 \le r \le \theta^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $r = 0$.*

Определение 1. Будем говорить, что последовательность формальных дробей r_n сходится к формальной дроби r в смысле масштабной топологии, если для любого целого показателя m найдется такой номер N, что $-\theta^m < r_n - r < \theta^m$ для всех $n \ge N$.

Из леммы 1 следует, что топология, порождаемая порядком (системой интервалов (r_1, r_2)), эквивалентна масштабной топологии (порождаемой системой интервалов $(r - \theta^n, r + \theta^n)$ ($n \in \mathbb{Z}$)).

3. Поле $\mathbb{HR}$. Поле гипердействительных величин $\mathbb{HR}$ получается из поля формальных дробей его порядковым замыканием методом сечений.

Определение 2. Пусть $\mathbb{P}$ – некоторое упорядоченное поле. Будем говорить, что в $\mathbb{P}$ задано сечение (L, U), где L называется нижним классом, а U – верхним, если заданы два подмножества L и U множества $\mathbb{P}$, обладающие следующими свойствами:

1) $L \cup U = \mathbb{P}$ (L, объединенное с U, дает все $\mathbb{P}$);

2) L направлено вниз (т.е. из $l' \le l$ и $l \in L$ следует $l' \in L$), U направлено вверх;

3) $|L \cap U| \le 1$ (пересечение L и U содержит не более одного элемента).

Определение 3. Сечение (L, U) во множестве формальных дробей будем называть регулярным, если для любого целого числа n существуют такие элементы $l \in L$ и $u \in U$, что $u - l < \theta^n$. В противном случае сечение мы будем называть сингулярным.

Множество $\mathbb{HR}$ всех регулярных сечений в поле формальных дробей с введенными естественным образом операциями и порядком является упорядоченным полем, которое при повторном применении процедуры порядкового замыкания уже воспроизводит только само себя. Для этого поля имеет место следующая теорема о представлении.

Теорема 1. *Поле $\mathbb{HR}$ изоморфно полю формальных степенных рядов*

$$\sum_{i=s}^{+\infty} x_i \theta^i, \tag{3}$$

где $s \in \mathbb{Z}$, $x_i \in \mathbb{R}$.

В основе этой теоремы лежит тот факт, что множество регулярных сечений в поле формальных дробей совпадает с множеством регулярных сечений во множестве формальных полиномов, которые естественным образом ассоциируются с формальными степенными рядами.

Эта теорема является ключевой для модели $\mathbb{HR}$: благодаря ей удается использовать для анализа технику формальных рядов (см., например, [13]).

Отметим, что аналогичная конструкция, но построенная над полем $\mathbb{Z}_p$, приводит либо к обычной p-ричной системе счисления (если поле формальных дробей над Z_p упорядочивать, как и выше, по убыванию степеней), либо к множеству p-адических чисел [14–16] (если это же поле упорядочивать по возрастанию степеней).

4. Структура множества $\mathbb{HR}$. В дальнейшем поле $\mathbb{HR}$ просто отождествляется с полем формальных степенных рядов вида (3). Элементы этого поля называются гипердействительными величинами и обозначаются, как правило, греческими буквами ($\alpha, \beta, \gamma, \xi, \dots$). Вещественные коэффициенты в представлении гипердействительной величины в виде ряда обозначаются латинскими буквами ($a_i, b_i, c_i, x_i, \dots$), латинскими же буквами обозначаются вообще все вещественные величины. Таким образом, мы будем писать

$$\xi = \sum_{i=s}^{+\infty} x_i \theta^i. \tag{3'}$$

Если $x_s \ne 0$, то считается, что величина задана в нормальной форме, при этом s будем называть, как и в случае полинома, порядком величины ξ. Величины положительного порядка будем называть бесконечно малыми, величины отрицательного порядка – бесконечно большими, величины нулевого порядка – конечными. Величины вида $\xi = x_0$ (т.е. те, для которых $x_i = 0$ при $i \ne 0$) будем называть вещественными, задавая тем самым каноническое вложение $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{HR}$.

Нередко удобно представлять величины в канонической форме

$$\xi = \theta^s \sum_{i=0}^{+\infty} x'_i \theta^i, \tag{3''}$$

что позволяет несколько унифицировать операции, а заодно сразу видеть результат, который будет получаться для конечных величин.

Определение 4. Будем говорить, что два ряда совпадают с точностью до порядка n, если их разность имеет порядок $n+1$, или, по-другому, если все их члены с номерами, меньшими либо равными n, совпадают.

Отношение совпадения с точностью до порядка n является отношением эквивалентности, и оно разбивает все $\mathbb{HR}$ на классы эквивалентности. Каждый класс является "сплошным" (любой элемент, лежащий между двумя элементами класса, принадлежит этому классу), и классы естественным образом упорядочены между собой. Соответствующее фактор-множество изоморфно множеству всех полиномов степени n (выражений вида (3′), в которых $x_i = 0$ при $i > n$): фактор-класс, соответствующий полиному степени n, содержит этот полином, и этот полином является каноническим представителем соответствующего класса.

Фактор-классы эквивалентных с точностью до порядка n гипердействительных величин будем называть окрестностями ранга n или дисками ранга n. Множество всех конечных и бесконечно малых величин является диском ранга (-1). Это множество будем обозначать $\overline{\mathbb{HR}}$. Дискам нулевого ранга соответствуют взаимно однозначно вещественные числа, и в этом смысле можно считать, что множество $\overline{\mathbb{HR}}$ получается из множества вещественных чисел превращением каждой точки вещественной прямой в достаточно "толстое" инфинитезимальное множество – окрестность, состоящую из величин вида $\xi = x + \hat{\xi}$, где второе слагаемое пробегает множество всех бесконечно малых величин.

Если мы будем менять ранги дисков, то получим достаточно любопытную иерархическую структуру. Каждый диск ранга $n+1$ оказывается включенным целиком в один из дисков ранга n, а каждый диск ранга n равен объединению дисков ранга $n+1$ в количестве, равном вещественному континууму $\mathbb{R}^1$. Если обозначить диск, порождаемый полиномом $P_n(\theta)$, через $D(P_n)$, то $D(P_n) = \bigcup_{a\in\mathbb{R}} D(P_n + a\theta^{n+1})$, причем диски $(n+1)$-го порядка не пересекаются между собой и одинаковы: один получается из другого сдвигом на $k\theta^{n+1}$. Если учесть еще к тому же, что диск ранга n подобен диску ранга $n+1$ (так как получается умножением последнего на θ^{-1}), то ситуация, в которой мы оказываемся, является довольно необычной с точки зрения, например, классической теории меры. Приписывание диску ненулевой меры μ приводит к парадоксальным, если μ предполагать не бесконечно малым, тождествам типа $\sum_{a\in[0,1]} \mu = 1$, $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} 1 = 1/\mu$.

Отметим также, что диски в масштабной топологии являются открыто-замкнутыми множествами, поэтому непрерывность на $\mathbb{HR}$ никак не связана с непрерывностью на $\mathbb{R}$ и соответствует скорее дискретной топологии на $\mathbb{R}$.

Особую роль во всей этой структуре играют сингулярные сечения – они ассоциируются с "несобственными" элементами вида $\sum_{i=s}^{p} x_i\theta^i + \infty\theta^{p+1}$. Эти несобственные элементы или лакуны являются необходимой принадлежностью любого неархимедова поля (что не очень привычно: в $\mathbb{R}^1$ таких лакун нет), однако их наличие оказывается достаточно удобным: с их помощью легко получаются алгебраические расширения поля $\mathbb{HR}$, генерируемые введением дробных степеней $\theta^{1/n}$ (что дает поля формальных степенных рядов по соответствующим дробным степеням, обозначаемые $\mathbb{HR}_n$ и изоморфные исходному полю $\mathbb{HR}$), или трансцендентные расширения, генерируемые введением экспоненциальных бесконечно малых величин $e^{-C/\theta}$ или логарифмических бесконечно больших величин $\ln(1/\theta)$. По существу все "дополнительные" элементы расширений просто заполняют лакуны исходного поля (хотя и не полностью, так что возможность для последующего расширения всегда остается). Мы практически не будем касаться в настоящей работе расширений поля $\mathbb{HR}$, хотя они гарантированно возникают при решении ряда задач (например, решения алгебраических уравнений с коэффициентами из $\mathbb{HR}$ всегда лежат в некотором $\mathbb{HR}_n$, где n определяется отношениями разности главных степеней s_i коэффициентов к разности их номеров в соответствии с диаграммой Ньютона [17]).

5. Функции и функционалы.

Определение 5. Под функцией на множестве $\mathbb{HR}$ понимается любое отображение $\phi : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{HR} \to \mathbb{HR}$. Отображения же $f : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{HR} \to \mathbb{R}$, следуя традиции, называются функционалами.

Определение 6. Функционал $f(\xi)$, определенный на множестве $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{HR}$, назовем непрерывным в точке $\xi_0 \in \mathbb{D}$, если

$$\forall d \in \mathbb{R}, \quad d > 0 \quad \exists m \in \mathbb{Z}: \quad \forall \xi \in \mathbb{D}: \quad |\xi - \xi_0| < \theta^m \Rightarrow |f(\xi) - f(\xi_0)| < d.$$

Функционал будем называть непрерывным на множестве $\mathbb{D}' \subseteq \mathbb{D}$, если он непрерывен в каждой точке множества $\mathbb{D}'$.

Примерами линейных непрерывных функционалов в $\mathbb{HR}$ являются: канонический функционал $f_0(\xi = \sum_{i=s}^{+\infty} x_i\theta^i) \equiv x_0$, функционал $f_i(\xi) \equiv x_i$ (он же равен $f_0(\theta^{-i}\xi)$), функционал вида $f_0(\alpha\xi)$, где $\alpha \in \mathbb{HR}$.

Теорема 2. *Пространство всех линейных непрерывных функционалов в $\mathbb{HR}$ изоморфно $\mathbb{HR}$ и каждый линейный функционал может быть однозначно представлен в виде*

$$f(\xi) = f_0(\alpha\xi), \tag{4}$$

где α – некоторая величина из $\mathbb{HR}$.

Теорема означает, что $\mathbb{HR}$, рассматриваемое как линейное топологическое пространство над $\mathbb{R}$, является рефлексивным, а формула (4) дает представление Рисса для функционала.

6. Сильная и слабая сходимости в $\mathbb{HR}$.

Определение 7. Последовательность ξ_n будем называть слабо сходящейся к нулю, если для любого $\alpha \in \mathbb{HR}$ выполнено $f_0(\alpha\xi_n) \to 0$.

Лемма 2. *Слабая сходимость в $\mathbb{HR}$ эквивалентна почленной сходимости и равномерной ограниченности рядов.*

Отметим, что гипердействительное число можно интерпретировать и как оператор умножения на это число. При этом равномерная и сильная операторные топологии оказываются совпадающими с топологией масштабной сходимости, а слабая операторная топология совпадает с топологией почленной сходимости.

Таким образом, на множестве $\mathbb{HR}$ можно эффективно использовать две естественные топологии: сильную – масштабной сходимости и слабую – почленной сходимости. Отметим при этом, что последовательность $\xi_n = 1 + (1/n)\theta$, расходящаяся в сильном смысле (условно говоря, сходящаяся к сингулярному сечению $1 + \infty\theta^2$), слабо сходится к единице, т.е. слабая сходимость "пробивает" сингулярное сечение и "достает" до соответствующего полинома. С другой стороны, последовательность $1 + n\theta^2$, сходящаяся в условном смысле к тому же сингулярному сечению, расходится и в сильном, и в слабом смысле.

7. Принцип формальной инвариантности.

Определение 8. Функцию $\phi(\xi)$, определенную на множестве $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{HR}$, назовем непрерывной в точке $\xi_0 \in \mathbb{D}$, если

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \exists m \in \mathbb{Z}: \quad \forall \xi \in \mathbb{D}: \quad -\theta^m < \xi - \xi_0 < \theta^m \Rightarrow -\theta^n < \phi(\xi) - \phi(\xi_0) < \theta^n.$$

Функцию будем называть непрерывной на множестве $\mathbb{D}' \subseteq \mathbb{D}$, если она непрерывна в каждой точке множества $\mathbb{D}'$.

Непрерывность гипердействительной функции по существу означает, что по мере "выкладывания" ряда для ξ автоматически "выкладывается" и ряд для $\eta = \phi(\xi)$, т.е. младшие коэффициенты образа не зависят от старших коэффициентов прообраза.

К сожалению, введенное понятие непрерывности является весьма слабым: грубо говоря, множеству непрерывных в указанном смысле функций в $\mathbb{HR}$ соответствует множество всех конечных функций в $\mathbb{R}$ (если под соответствием понимать продолжение вещественной функции в $\mathbb{HR}$) безо всяких предположений об их свойствах. Поэтому для ограничения класса функций разумными пределами введем принцип формальной инвариантности.

Определение 9. Формальной заменой будем называть замену величины θ на выражение вида
$$\theta = a_1\theta_1 + a_2\theta_1^2 + \ldots + a_n\theta_1^n \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{5}$$
или на выражение вида
$$\theta = a_0 + a_1\theta_1 + a_2\theta_1^2 + \ldots + a_n\theta_1^n \quad (n \in \mathbb{Z}), \tag{5'}$$
где θ_1 – другая бесконечно малая величина. В первом случае замену будем называть локальной (она оставляет на месте все обычные вещественные числа и проводит "перестройку" бесконечно малых внутри соответствующей окрестности), во втором – масштабирующей (она величины бесконечно малого масштаба переводит в величины конечные, "выплескивая" внутренность окрестности на множество $\overline{\mathbb{HR}}$ всех конечных величин).

Пусть задана функция $\eta = \phi(\xi) : \mathbb{HR} \to \mathbb{HR}$. Если представить ξ и η в виде рядов: $\xi = x_p\theta^s + \ldots + x_j\theta^j + \ldots$ и $\eta = y_q\theta^q + \ldots + y_i\theta^j + \ldots$, то задание отображения ϕ окажется эквивалентным заданию бесконечного набора обычных вещественных функций
$$y_i = f_i(\ldots, x_j, \ldots), \quad i \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$
описывающих зависимость каждого y_i от набора коэффициентов x_j.

Определение 10. Пусть функция $\phi : \mathbb{HR} \to \mathbb{HR}$ непрерывна. Будем говорить, что эта функция локально (или вполне) формально инвариантна, если формулы (6) для вычисления y_i через x_j инвариантны относительно всех локальных формальных замен (5) (или (5′) соответственно), т.е. после проведения формальной замены получим формулы $\tilde{y}_i = f_i(\ldots, \tilde{x}_j, \ldots)$ с теми же функциями f_i.

Нам будет удобно иногда пользоваться следующим замечательным следствием свойства формальной инвариантности: если провести замену (5) или (5′) и переобозначить θ_1 через θ, то получим исходную функцию, но на "измененном" множестве. Будем говорить в этом случае о преобразовании Υ самого множества $\mathbb{HR}$, ассоциированного с соответствующей формальной заменой, которое будем называть трансформатором множества $\mathbb{HR}$ и писать $\Upsilon(\xi) = \tilde{\xi}$. Свойство формальной инвариантности тогда необходимо влечет за собой равенство
$$\Upsilon(\phi(\xi)) = \phi(\Upsilon(\xi)). \tag{7}$$
Отметим, что трансформатор Υ не всегда обратим даже на множестве степенных рядов (как это имеет место, например, при замене $\theta = \theta_1^n$), поэтому равенство (7) пока можем считать только следствием, а не эквивалентом формальной инвариантности.

Формально инвариантная функция отображает вещественные числа в вещественные числа, величины неотрицательного порядка в величины неотрицательного порядка. Имеет место

Теорема 3 (о локально инвариантной функции) [18]. *Любая локально формально инвариантная функция $\phi(\xi)$ может быть на множестве $\overline{\mathbb{HR}}$ ограниченных величин представлена в виде*
$$\phi(\xi) = f_0(x_0) + f_1(x_0)\hat{\xi} + f_2(x_0)\hat{\xi}^2 + \ldots, \tag{8}$$
где $f_i(x_0)$ – некоторые вещественные функции вещественного аргумента.

Из (8) следует, что коэффициенты $f_i(x_0)$ фактически могут быть определены по одному единственному значению величины $\hat{\xi}$ и формально инвариантная функция на любой бесконечно малой окрестности любого вещественного числа x_0 однозначно определяется своим значением на единственном элементе $\xi = x_0 + \hat{\xi}$. Отсюда следует, что класс формально инвариантных функций будет одним и тем же для любого конечного расширения поля $\mathbb{HR}$, и вопрос о продолжении функции на любое такое расширение тривиален. Тем самым вопрос о возможности безграничного расширения этого поля и достижения "универсума" полностью теряет свою актуальность: формально инвариантные функции безразличны к расширениям.

8. Аналитичность и гладкость.

Теорема 4. *Любая вполне инвариантная функция имеет вид*
$$\phi(\xi) = c_0 + c_1\xi + \ldots + c_n\xi^n + \ldots,$$
где ряд $f(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx^n + \ldots$ имеет бесконечный радиус сходимости.

Ввиду теоремы 4 вполне инвариантные функции естественно называть также целыми. Для целых функций оказывается, что $f_i(x_0) = f^{(i)}(x_0)/i!$, так что представление (8) совпадает с разложением функции в ряд Тейлора в точке x_0.

Определение 11. Будем говорить, что непрерывная локально инвариантная функция $\phi : \mathbb{HR} \to \mathbb{HR}$ аналитична в точке $\xi = x_0$, если она инвариантна относительно всех замен вида (5′) с $|a_0| < R$, $R \in \mathbb{R}$.

Функцию назовем гладкой в точке $\xi = x_0$, если она непрерывна, локально инвариантна, ее коэффициенты в разложении (8) бесконечно дифференцируемы и связаны между собой соотношениями

$$f_i(x) = \frac{1}{i!} f_0^{(i)}(x). \tag{9}$$

Будем говорить, что функция является регулярной порядка k точке $\xi = x_0$, если ее коэффициент $f_0(x)$ в разложении (8) k раз дифференцируем в классическом смысле в точке $x = x_0$ и для всех $i \leq k$ выполнены соотношения (9).

Классы целых, аналитических, гладких и регулярных гипердействительных функций соответствуют (в смысле сужения на $\mathbb{R}$) классам целых, аналитических, бесконечно дифференцируемых и k раз дифференцируемых действительных функций.

9. Производные.

Определение 12. Сильной производной функции $\phi(\xi)$ назовем сильный предел (если он существует) отношения $\phi(\xi + \delta\xi) - \phi(\xi)/\delta\xi$ при $\delta\xi \to 0$ сильно. Эту производную мы будем обозначать через $\delta\phi/\delta\xi$.

Слабой производной функции $\phi(\xi)$ назовем слабый предел отношения (если он существует) $\phi(\xi + x) - \phi(\xi)/x$ при $x \to 0$ в смысле обычной сходимости в области вещественных чисел. Эту производную мы будем обозначать через $d\phi(\xi)/dx$.

И наконец, в случае, когда эти две производные совпадают, т.е. дают одно и то же значение, это значение мы будем называть полной производной и обозначать $D\phi(\xi)$.

Через $\phi'(\xi)$ будем из соображений удобства обозначать любую из перечисленных производных, оговаривая, естественно, какую именно.

Лемма 3. *Любая локально инвариантная функция (8) имеет на* $\overline{\mathbb{HR}}$ *сильную производную и она равна*

$$\frac{\delta\phi}{\delta\xi} = f_1(x) + 2f_2(x)\hat{\xi} + 3f_3(x)\hat{\xi}^2 + \ldots + nf_n(x)\hat{\xi}^{n-1} + \ldots \tag{10}$$

Лемма 4. *Локально инвариантная функция (8) имеет на* $\overline{\mathbb{HR}}$ *слабую производную в том и только в том случае, когда коэффициенты* $f_n(x)$ *дифференцируемы, и эта производная равна*

$$d\phi(\xi)/dx = f_0'(x) + f_1'(x)\hat{\xi} + f_2'(x)\hat{\xi}^2 + \ldots + f_n'(x)\hat{\xi}^n + \ldots \tag{11}$$

Следствие 1. *Для локально инвариантной функции полная дифференцируемость эквивалентна гладкости.*

Следствие 2. *Из полной однократной дифференцируемости следует существование любого количества полных производных, т.е. бесконечная полная дифференцируемость.*

Следствие 3. *В предположении слабой дифференцируемости регулярность порядка* n *эквивалентна совпадению сильной и слабой производной с точностью до* $\hat{\xi}^n$.

10. Дифференциальные уравнения.

Определение 13. Под дифференциальным уравнением первого порядка с сильной производной или локальным дифференциальным уравнением относительно функции $\xi(\tau) : \mathbb{HR} \to \to \mathbb{HR}$ будем понимать любое соотношение, связывающее значения независимой переменной τ, соответствующие значения зависимой переменной ξ и ее сильной производной. Указанную связь будем записывать формулой

$$\Phi(\tau, \xi, \delta\xi/\delta\tau) = 0 \tag{12}$$

или, если возможно выразить производную через остальные аргументы, формулой

$$\delta\xi/\delta\tau = \phi(\tau,\xi). \tag{12'}$$

Под решением дифференциального уравнения будем понимать любую локально инвариантную функцию $\xi(\tau)$, которая обращает уравнение в тождество.

Теорема 5 (локальная теорема существования и единственности). *Пусть функция $\phi(\tau,\xi)$ определена в окрестности точки $(\tau,\xi) = (t,x)$ (напомним, что окрестность понимается в "специальном" смысле – (t,x) плюс все бесконечно малые) и локально инвариантна в этой окрестности. Тогда решение $\xi(\tau)$ дифференциального уравнения (12′), удовлетворяющее условию $\xi(t) = x$, существует в окрестности точки $\tau = t$ и единственно.*

Как следует из теоремы 5, вопрос о существовании решения дифференциального уравнения в окрестности заданной точки $(\tau,\xi) = (t,x)$ по существу не встает – это решение существует всегда. Другой вопрос, насколько решения, построенные в окрестности разных таких точек, "стыкуются" друг с другом. Именно здесь "срабатывает" свойство регулярности функции.

Определение 14. Под дифференциальным уравнением первого порядка со слабой производной относительно функции $\xi(\tau) : \mathbb{HR} \to \mathbb{HR}$ будем понимать любое соотношение, связывающее значения независимой переменной τ, соответствующие значения зависимой переменной ξ и ее слабой производной:

$$\Phi(\tau,\xi,d\xi/d\tau) = 0 \tag{13}$$

или соответственно

$$d\xi/d\tau = \phi(\tau,\xi). \tag{13'}$$

Лемма 5. *Пусть функция $\phi(\tau,\xi)$ локально инвариантна ($\phi(\tau,\xi) = \sum f_{ij}(x,t)\hat{\xi}^i\hat{\tau}^j$) и пусть локально инвариантная функция $\xi(\tau)$ является решением дифференциального уравнения (12′) в некоторой области $\mathbb{D} \subset \overline{\mathbb{HR}}$. Для того чтобы эта функция была регулярной первого порядка, необходимо и достаточно, чтобы ее первая компонента x (она в силу свойств локально инвариантных функций является функцией только от t) удовлетворяла дифференциальному уравнению*

$$dx/dt = f_{00}(t,x).$$

Если при этом функция $\xi(\tau)$ слабо дифференцируема, то она удовлетворяет (правда, с точностью до бесконечно малых первого порядка) и дифференциальному уравнению в слабых производных

$$\frac{d\xi}{dt}(\tau) = \phi(\tau,\xi) + O(\hat{\tau}^2).$$

Если же функция $\phi(\tau,\xi)$ является регулярной первого порядка (что означает, что функция $f_{00}(t,x)$ дифференцируема (по Фреше) и $\partial f_{00}/\partial t = f_{10}$, $\partial f_{00}/\partial x = f_{01}$), то решение $\xi(\tau)$ будет регулярным второго порядка и

$$\ddot{x}(t) = \frac{\partial f_{00}}{\partial t} + \frac{\partial f_{00}}{\partial x}\dot{x}(t).$$

11. Суммирование расходящихся степенных рядов. Асимптотические ряды. В качестве простейшей иллюстрации приведем пример суммирования расходящегося ряда. Рассмотрим ряд

$$1 + t + 2!t^2 + 3!t^3 + \ldots + n!t^n + \ldots \tag{14}$$

Этот ряд расходится при всех $t \in \mathbb{R}$. Продолжив этот ряд в $\mathbb{HR}$, получим $1 + \tau + 2!\tau^2 + 3!\tau^3 + \ldots + n!\tau^n + \ldots$ Этот ряд уже сходится в области бесконечно малых τ (т.е. в бесконечно малой окрестности нуля), определяет в указанной окрестности функцию $\xi(\tau)$, удовлетворяющую в этой окрестности сильному дифференциальному уравнению $\tau\,\delta(\tau\xi)/\delta\tau = \xi - 1$. Переход от сильного уравнения к слабому с последующим сужением его на $\mathbb{R}^1$ приводит к уравнению $t\,d(tx)/dt = x - 1$, решение которого

$$x(t) = \frac{C}{t}e^{-1/t} - \frac{1}{t}e^{-1/t}\int\limits_{t_0}^{t} e^{1/s}\frac{ds}{s}$$

имеет асимптотическое разложение вблизи нуля, в точности совпадающее с (14).

Приведенный пример показывает, что введением бесконечно малых величин расходящиеся степенные ряды превращаются в сходящиеся в бесконечно малой окрестности нуля, и их аналитическое продолжение (например, с помощью дифференциального уравнения) позволяет получить функции, для которых исходный ряд является асимптотическим [19]. Прием, который мы применили, конечно, не новый (см., например, [20] или [21, гл. II, § Б], где указывается, что этот прием принадлежит еще Эйлеру), но без использования бесконечно малых величин он носит условный, формально-символический характер.

12. В заключение отметим, что предложенная в настоящей работе модель континуума, содержащего бесконечно малые величины, обладает двумя важными достоинствами: во-первых, она минимальна (любое неархимедово поле, содержащее $\mathbb{R}$, содержит и часть, изоморфную $\mathbb{HR}$), а во-вторых, опирается на аппарат степенных рядов (см., например, [13, гл. 4; 22]), превращая действия с бесконечно малыми величинами в оперирование рядами. При этом существенно, что при исследовании сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений оказывается возможным разлагать по степеням бесконечно малого параметра не только фазовые переменные, но и время.

Эффективность описанного приема проиллюстрируем во второй части нашей работы на двух примерах: один из них классический – уравнение Ван-дер-Поля, а второй – пара уравнений Ван-дер-Поля, для которой удается исчерпывающим образом описать как быстрые и медленные движения, так и точки перехода, что позволяет построить практически явным образом релаксационные циклы и определить области значений параметров, при которых возможны “утки” – циклы с более или менее продолжительным движением вдоль неустойчивых участков медленных траекторий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кавальери Б.* Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного. Т. 1. Основы учения о неделимых. М., 1940.
2. *Лейбниц Г.В.* // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3. Вып. 1. С. 166–173.
3. *Ньютон И.* // Математические работы / Пер. с лат. М.; Л., 1937. С. 25–166.
4. *де Лопиталь Г.Ф.* Анализ бесконечно малых. М.; Л., 1935.
5. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. М.; Л., 1949.
6. *Robinson A.* Non-standard analysis. North-Holland, Amsterdam. 1966.
7. *Nelson E.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. P. 1165–1198.
8. *Ballard D.* Foundational aspects of “non” standard mathematics. Providence, 1994.
9. *Дэвис М.* Прикладной нестандартный анализ. М., 1980.
10. *Ван-дер-Варден Б.Л.* Современная алгебра. Т. 1. М.; Л., 1934.
11. *Artin E., Schreier O.* // Abh. Math. Sem. 1926. V. 5. P. 85–115.
12. *Baer R.* // Sitzungber. Heidelb. Ak. 1927. V. 8.
13. *Уокер Р.* Алгебраические кривые. М., 1952.
14. *Henzel K.* Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig, 1908.
15. *Kurschak J.* // J. Reine und Angew. Math. 1913. V. 142. P. 211–253.
16. *Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И.* p-адический анализ и математическая физика. М., 1994.
17. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., 1969.
18. *Боровских А.В.* Анализ бесконечно малых величин. Арифметика, алгебра, функции, принцип формальной инвариантности. Деп. в ВИНИТИ 13.12.00. № 3133-В00.
19. *Poincaré H.* // Acta Math. 1886. V. 8. P. 295–344; Oeuvres. V. 1. P. 290–332.
20. *Borel E.* Leçons sur les séries divergentes. Paris, 1901.
21. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М., 1951.
22. *Puiseux V.* // J. Math. Pure et Appl. 1850. V. 15. P. 365–480.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию
14.10.2002 г.