K. A. Mirzoev, T. A. Safonova, On the Deficiency Index of the Vector-Valued Sturm–Liouville Operator, *Mat. Zametki*, 2016, Volume 99, Issue 2, 262–277

DOI: 10.4213/mzm10854

Математические заметки

Том 99 выпуск 2 февраль 2016

УДК 517.983.35+517.929.2

Об индексе дефекта векторного оператора Штурма–Лиувилля

К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова

Пусть $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, и пусть матрицы-функции P, Q и R порядка n, $n \in \mathbb{N}$, определенные на полуоси $\mathbb{R}_+$, такие, что $P(x)$ – невырожденная, $P(x)$ и $Q(x)$ – эрмитовы матрицы при $x \in \mathbb{R}_+$, а элементы матриц-функций P^{-1}, Q и R измеримы на $\mathbb{R}_+$ и суммируемы на каждом ее замкнутом конечном подынтервале. В настоящей работе изучаются операторы, порожденные в пространстве $\mathscr{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$ формальными выражениями вида

$$l[f] = -(P(f' - Rf))' - R^*P(f' - Rf) + Qf,$$

и, как частный случай, операторы, порожденные выражениями вида

$$l[f] = -(P_0 f')' + i((Q_0 f)' + Q_0 f') + P_1' f,$$

где всюду производные понимаются в смысле теории распределений, а P_0, Q_0 и P_1 – эрмитовы матрицы-функции порядка n с измеримыми по Лебегу элементами такие, что P_0^{-1} существует и $\|P_0\|, \|P_0^{-1}\|, \|P_0^{-1}\|\|P_1\|^2, \|P_0^{-1}\|\|Q_0\|^2 \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$.

Основная цель работы – это изучение вопроса об индексе дефекта минимального оператора L_0, порожденного выражением $l[f]$ в $\mathscr{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$, в терминах матриц-функций P, Q и R (P_0, Q_0 и P_1). Полученные результаты применяются к дифференциальным операторам, порожденным выражениями вида

$$l[f] = -f'' + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathscr{H}_k \delta(x - x_k) f,$$

где x_k, $k = 1, 2, \dots,$ – возрастающая последовательность положительных чисел и $\lim_{k\to+\infty} x_k = +\infty$, $\mathscr{H}_k$ – числовая эрмитова матрица порядка n, а $\delta(x)$ – δ-функция Дирака.

Библиография: 23 названия.

DOI: 10.4213/mzm10854

1. Введение. Предварительные сведения.

1.1. Пусть $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, и пусть матрицы-функции P, Q и R порядка n, $n \in \mathbb{N}$, определенные на полуоси $\mathbb{R}_+$, таковы, что $P(x)$ – невырожденная, $P(x)$ и $Q(x)$ – эрмитовы матрицы при $x \in \mathbb{R}_+$, а элементы матриц-функций P^{-1}, Q и R измери-

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-11-00754). Работа второго автора выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (грант № МК-3941.2015.1), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 14-01-31136-мол а, 14-01-00349, 15-31-50259) и Фонда содействия отечественной науке.

мы на $\mathbb{R}_+$ и суммируемы на каждом ее замкнутом конечном подынтервале. Определим первую квазипроизводную заданной локально абсолютно непрерывной вектор-функции $f = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^t$ (здесь и далее t – символ транспонирования), полагая $f^{[1]} := P(f' - Rf)$. Предположим, что функция $f^{[1]}$ также локально абсолютно непрерывна, и определим вторую квазипроизводную $f^{[2]}$, полагая $f^{[2]} := (f^{[1]})' + R^* f^{[1]} - Qf$, где * – символ сопряжения, и квазидифференциальное выражение, полагая $l[f](x) := -f^{[2]}(x)$. Таким образом,

$$l[f] = -(P(f' - Rf))' - R^* P(f' - Rf) + Qf, \tag{1.1}$$

а область определения Δ выражения $l[f]$ – это множество всех комплекснозначных вектор-функций f таких, что f и $f^{[1]}$ локально абсолютно непрерывны на $\mathbb{R}_+$ и при $f \in \Delta$ выражение $l[f]$ $(\in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+))$ определяется п.в. по формуле (1.1). Кроме того, для любых двух вектор-функций $f, g \in \Delta$ справедлива следующая лемма – векторный аналог тождества Грина.

Лемма 1. *Пусть $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ – матрицы-функции порядка n, удовлетворяющие перечисленным выше условиям. Тогда для любых двух вектор-функций $u, v \in \Delta$ и для любых двух чисел α и β таких, что $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta < \infty$, справедлива формула*

$$\int_\alpha^\beta \{(l[u](x), v(x)) - (u(x), l[v](x))\}\, dx = [u(x), v(x)](\beta) - [u(x), v(x)](\alpha), \tag{1.2}$$

где $(g, h) = \sum_{s=1}^n g_s \overline{h_s}$ – скалярное произведение векторов g и h, а форма $[u, v]$ определяется равенством

$$[u, v](x) := (u^{[1]}(x), v(x)) - (u(x), v^{[1]}(x)).$$

Пусть далее $\mathscr{L}^2_n(\mathbb{R}_+)$ – пространство классов эквивалентности всех комплекснозначных измеримых вектор-функций f, у которых сумма квадратов модулей компонент интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}_+$. В литературе, посвященной спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов, хорошо известна процедура, с помощью которой определяются минимальный и максимальный операторы L_0 и L_1 соответственно, порожденные выражением $l[f]$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{L}^2_n(\mathbb{R}_+)$. Операторы L_0, L_1 и операторы, связанные с ними, называются *векторными операторами Штурма–Лиувилля.* Используя формулу (1.2), можно доказать, что оператор L_0 является замкнутым симметрическим оператором. Кроме того, область определения оператора L_0 всюду плотна в $\mathscr{L}^2_n(\mathbb{R}_+)$. Пусть пара (d_+, d_-) – индекс дефекта оператора L_0. Согласно [1], [2] дефектные числа d_+ и d_- оператора L_0 совпадают с максимальным числом линейно независимых решений уравнения

$$l[f] = \lambda f, \tag{1.3}$$

принадлежащих $\mathscr{L}^2_n(\mathbb{R}_+)$, когда параметр λ берется из верхней $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ или нижней $(\operatorname{Im}\lambda < 0)$ полуплоскости соответственно, удовлетворяют неравенствам $n \leqslant d_+, d_- \leqslant 2n$ и, кроме того, $d_+ = 2n$ тогда и только тогда, когда $d_- = 2n$. Случай $d_+ = d_- = 2n$ реализуется тогда и только тогда, когда все решения уравнения (1.3) при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежат пространству $\mathscr{L}^2_n(\mathbb{R}_+)$. Используя аналогию со спектральной теорией скалярных операторов Штурма–Лиувилля на полуоси, иногда говорят, что для выражения $l[f]$ (оператора L_0) имеет место случай предельной точки, если $d_+ = d_- = n$, если же $d_+ = d_- = 2n$, то говорят, что для выражения $l[f]$ имеет место случай предельного круга (см., например, [2]).

Уравнение (1.3) равносильно системе дифференциальных уравнений первого порядка
$$Y' = (F - \Lambda)Y, \tag{1.4}$$
где $Y = (f, f^{[1]})^t$, матрицы F и Λ порядка $2n$ имеют вид
$$F = \begin{pmatrix} R & P^{-1} \\ Q & -R^* \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} O & O \\ \lambda I & O \end{pmatrix},$$
а O и I – как обычно, нулевая и единичная матрицы порядка n соответственно. Равносильность этих уравнений понимается в том смысле, что если n-компонентная вектор-функция f является решением (1.3), то $2n$-компонентная вектор-функция $Y = (f, f^{[1]})^t$ является решением системы (1.4); и наоборот, если Y – решение этой системы, то вектор-функция f, составленная из его первых n-компонент, – решение системы уравнений (1.3).

Заметим, что условия на элементы матриц P, Q и R, перечисленные выше, обеспечивают для системы (1.4) справедливость теоремы существования и единственности решения задачи Коши, поставленной в произвольной точке $\mathbb{R}_+$.

Используя терминологию из теории линейных квазидифференциальных уравнений, говорят, что квазипроизводные $f^{[0]}(:= f)$, $f^{[1]}$ и $f^{[2]}$ *порождены* матрицей F.

Важным в спектральной теории операторов Штурма–Лиувилля является вопрос об определении дефектных чисел оператора L_0 при данных матрицах-функциях P, Q и R; в частности, перечисление условий на эти матрицы-функции, которые обеспечивают реализацию заданной пары (d_+, d_-). Начиная с работы Лидского [3] этот вопрос для операторов, порожденных выражением вида
$$-(Pf')' + Qf,$$
где $P(x)$ и $Q(x)$ – эрмитовы матрицы порядка n такие, что элементы матриц $P^{-1}(x)$, $Q(x)$ локально интегрируемы на $\mathbb{R}_+$, находится в центре внимания многих математиков (см. работы [2]–[7] и списки цитированной в них литературы).

С другой стороны, класс операторов, порожденных выражением (1.1), намного шире и, в частности, охватывает часто встречающиеся в математической физике операторы, порожденные некоторыми дифференциальными выражениями с коэффициентами-распределениями (см. ниже, п. 1.2). Основная цель настоящей работы – изучение вопроса об индексе дефекта оператора L_0, порожденного выражением $l[f]$, в терминах матриц-функций P, Q и R. Различные аспекты этого вопроса обсуждались также в работах [8]–[10].

Справедлива следующая

Теорема 1. *Для того, чтобы дефектные числа оператора L_0 были не максимальны, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой последовательности непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset \mathbb{R}_+$, $k = 1, 2, \dots$, выполнялось условие*
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \biggl(\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^{x} \|K(x,t)\|^2 \, dt \biggr)^{1/2} = \infty, \tag{1.5}$$

где $K(x,t)$ – функция Коши уравнения $l[f]=0$, т.е. решение этого уравнения по переменной x, удовлетворяющее начальным условиям

$$K(x,t)|_{x=t}=O, \qquad K^{[1]}(x,t)|_{x=t}=I,$$

а символ $\|\cdot\|$ означает самосопряженную матричную норму.

Справедливость теоремы, аналогичной теореме 1, для случая скалярных дифференциальных операторов любого порядка и весовых пространств $\mathscr{L}^p_w$, $1\leqslant p<+\infty$, установлена в [11]. Позже подробное доказательство этой теоремы для случая скалярных дифференциальных операторов второго порядка и пространств $\mathscr{L}^2_w$ было приведено в [12]. Там же и в [13] для случая $n=1$ приведены некоторые следствия теоремы 1. Кроме того, достаточность условия (1.5) для немаксимальности дефектных чисел оператора L_0, порожденного выражением вида

$$-(Pf')'+Qf$$

(см. выше), используется в работе [6]. Однако полное доказательство теоремы 1 нигде не опубликовано. Мы в данной работе устраняем этот пробел и приводим его в начале раздела 2.

1.2. Пусть P_0, Q_0 и P_1 – эрмитовы матрицы-функции порядка n с измеримыми по Лебегу элементами такие, что P_0^{-1} существует и $\|P_0^{-1}\|$, $\|P_0^{-1}\|\|P_1\|^2$, $\|P_0^{-1}\|\|Q_0\|^2$ локально интегрируемы по Лебегу. Пусть $\varphi:=P_1+iQ_0$ и $\varphi^*:=P_1-iQ_0$. Рассмотрим матрицу

$$F=\begin{pmatrix} P_0^{-1}\varphi & P_0^{-1}\\ -\varphi^*P_0^{-1}\varphi & -\varphi^*P_0^{-1}\end{pmatrix}.$$

Используя свойства матричных норм, эрмитовость матриц-функций P_0, Q_0 и P_1 и неравенство Коши–Буняковского, легко заключить, что для любого $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}_+$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta \|\varphi^*P_0^{-1}\| = \int_\alpha^\beta \|P_0^{-1}\varphi\| &\int_\alpha^\beta \sqrt{\|P_0^{-1}\|}\cdot\sqrt{\|P_0^{-1}\|}\|\varphi\|\\ &\leqslant \biggl(\int_\alpha^\beta \|P_0^{-1}\|\biggr)^{1/2}\cdot\biggl(\int_\alpha^\beta \|P_0^{-1}\|\cdot\|\varphi\|^2\biggr)^{1/2}<+\infty,\\ \int_\alpha^\beta \|\varphi^*P_0^{-1}\varphi\| \leqslant \int_\alpha^\beta \|P_0^{-1}\|\cdot\|\varphi\|^2<+\infty.&\end{aligned}$$

Таким образом, элементы всех блоков матрицы F принадлежат пространству $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$.

Посредством матрицы F определим квазипроизводные $f^{[0]}$, $f^{[1]}$, $f^{[2]}$, полагая, как и ранее,

$$f^{[0]}=f,\quad f^{[1]}=P_0f'-\varphi f,\quad f^{[2]}=(f^{[1]})'+\varphi^*P_0^{-1}f^{[1]}+\varphi^*P_0^{-1}\varphi f.$$

Далее, применяя рассуждения п. 1.1, заключаем, что для уравнения

$$-f^{[2]}=\lambda f$$

справедлива теорема существования и единственности решения задачи Коши, поставленная в произвольной точке $\mathbb{R}_+$. Кроме того, можно показать, что перечисленные выше условия на функции $\|P_0^{-1}\|$, $\|Q_0\|$ и $\|P_1\|$ являются самыми общими условиями, обеспечивающими это (см. [14; глава 1, теорема 1.2.3]).

Если предположить, что элементы матрицы P_0 также принадлежат $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, то легко заметить, что и элементы матрицы φ будут локально интегрируемы на $\mathbb{R}_+$. Из этих предположений можно заключить, что если $'$ трактовать как операцию взятия производной в смысле теории распределений, то в выражении $f^{[2]}$ можно раскрыть все скобки и для него получим формулу

$$f^{[2]} = (P_0 f')' - i((Q_0 f)' + Q_0 f') - P_1' f.$$

Особо отметим, что в этом равенстве координаты вектор-функций $(P_0 f')'$, $(Q_0 f)'$ и $P_1' f$ являются сингулярными обобщенными функциями, причем координаты первых двух из них – производные в смысле теории распределений регулярных обобщенных функций, а координаты вектор-функций $Q_0 f'$ и $f^{[2]}$ – регулярные обобщенные функции. Таким образом, выражение $l[f]$ (см. (1.1)) в терминах обобщенных функций формально записывается в виде

$$l[f] = -(P_0 f')' + i((Q_0 f)' + Q_0 f') + P_1' f. \tag{1.6}$$

В частности, если $P(x) = I$, $R(x) = \sigma(x)$ и $Q(x) = -\sigma^2(x)$, где $\sigma(x)$ – вещественнозначная, симметрическая матрица-функция порядка n такая, что элементы матрицы $\sigma^2(x)$ локально интегрируемы на $\mathbb{R}_+$, то векторное квазидифференциальное выражение (1.6) примет вид

$$l[f] = -f'' + \sigma' f. \tag{1.7}$$

Подробный анализ билинейной формы из формулы (1.2) позволяет установить справедливость следующей теоремы (см., например, [8] и [9]).

Теорема 2. *Пусть существует последовательность попарно непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset \mathbb{R}_+$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что элементы матрицы σ абсолютно непрерывны на $[a_k, b_k]$ и $\sigma'(x) \geqslant O$ п.в. при $x \in [a_k, b_k]$, и пусть выполнено условие*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - a_k)^2 = +\infty.$$

Тогда для выражения $l[f]$ (оператора L_0) имеет место случай предельной точки.

Истоки этой теоремы восходят к Ф. Хартману, Р. С. Исмагилову, Ф. Аткинсону и М. С. П. Истхему. В векторном случае при условии, что элементы матрицы $\sigma'(x)$ принадлежат $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, аналогичная теорема была доказана Серебряковым (см., например, [5]).

Пусть теперь x_k, $k = 1, 2, \dots$, – возрастающая последовательность положительных чисел, $x_0 = 0$ и $\lim_{k\to+\infty} x_k = +\infty$. Если при этом в выражении (1.7) положить $\sigma(x) = C_k$ при $x \in [x_{k-1}, x_k)$, где C_k – вещественная симметрическая числовая матрица, то это выражение принимает вид

$$l[f] = -f'' + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathscr{H}_k \delta(x - x_k) f, \tag{1.8}$$

где $\mathscr{H}_k = C_{k+1} - C_k$, а $\delta(x)$ – δ-функция Дирака. Таким образом, теория операторов, порожденных выражениями вида (1.8), включается в теорию операторов, порожденных векторными квазидифференциальными выражениями второго порядка.

Пусть ℓ_n^2 – гильбертово пространство бесконечных последовательностей n-компонентных вектор-столбцов со стандартным скалярным произведением. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для выражения* $l[f]$ (*см.* (1.8)) *имеет место случай предельного круга в том и только том случае, когда все решения разностного векторного уравнения*

$$-\frac{Z_{k+1}}{r_{k+1}r_{k+2}d_{k+1}} + \frac{1}{r_{k+1}^2}\left[\mathscr{H}_k + \left(\frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_{k+1}}\right)I\right]Z_k - \frac{Z_{k-1}}{r_k r_{k+1} d_k} = 0, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

принадлежат пространству ℓ_n^2, *где* $d_k = x_k - x_{k-1}$, $r_{k+1} = \sqrt{d_k + d_{k+1}}$.

Эта теорема принадлежит авторам (см., например, [8] и [9]) и является обобщением одной теоремы, полученной Маламудом и Костенко для случая $n = 1$ (см. [15] и [16]).

1.3. В связи с теоремой 3 нам понадобятся следующие сведения из теории операторов, порожденных разностными выражениями второго порядка в гильбертовом пространстве ℓ_n^2, приведенные, например, в [17].

Пусть A_j, B_j, $j = 0, 1, \dots,$ – квадратные матрицы порядка n, причем B_j^{-1} существуют, а A_j – самосопряжены. Рассмотрим векторное разностное выражение второго порядка

$$(lu)_j = B_j u_{j+1} + A_j u_j + B_{j-1}^* u_{j-1}, \qquad j = 1, 2, \dots, \tag{1.9}$$

где $u_0, u_1, \dots \in \mathbb{C}^n$, и обобщенную якобиеву матрицу

$$J = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 & O & O & \dots \\ B_0^* & A_1 & B_1 & O & \dots \\ O & B_1^* & A_2 & B_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Выражение (1.9) и граничные условия $A_0 u_0 + B_0 u_1 = 0$ определяют в пространстве ℓ_n^2 минимальный замкнутый симметрический оператор L_0 с всюду плотной областью определения и индексом дефекта (d_+, d_-) $(0 \leqslant d_+, d_- \leqslant n$, и если одно из них равно n, то и другое такое же). Согласно терминологии, принятой в матричной проблеме моментов, говорят, что оператор L_0 порожден матрицей J. Кроме того, если $d_+ = d_- = 0$, то говорят, что для оператора L_0 имеет место определенный, а если $d_+ = d_- = n$, то вполне неопределенный случаи (при $n = 1$ слово "вполне" опускают). Определенный случай соответствует случаю предельной точки, а вполне неопределенный – случаю предельного круга для оператора Штурма–Лиувилля.

Теорема 3 утверждает, что дефектное число оператора $\mathscr{L}_0$, порожденного выражением (1.8) в гильбертовом пространстве $\mathscr{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$, равно $2n$ в том и только том случае, когда для матрицы J имеет место вполне неопределенный случай, где элементы этой матрицы определяются формулами

$$A_k = \frac{1}{r_{k+1}^2}\left[\mathscr{H}_k + \left(\frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_{k+1}}\right)I\right], \quad B_k = -\frac{1}{r_{k+1}r_{k+2}d_{k+1}}I, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{1.10}$$

а A_0, B_0 – произвольные вещественные симметрические матрицы порядка n такие, что B_0^{-1} существует.

Имеет место следующая теорема – аналог теоремы 1 для операторов, порожденных обобщенными якобиевыми матрицами.

Теорема 4. *Для того, чтобы для оператора* L_0 *имел место вполне неопределенный случай, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности отрезков натуральных чисел* $[n_k, m_k]$ *таких, что* $m_k \leqslant n_{k+1} \leqslant m_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$, *выполнялось условие*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \biggl(\sum_{i=n_k}^{m_k} \sum_{j=n_k}^{i} \|K_{ij}\|^2 \biggr)^{1/2} < +\infty,$$

где K_{ij} *– решение разностного уравнения* $(lu)_j = 0$ *с начальными условиями* $K_{jj} = O$ *и* $K_{j+1,j} = B_j^{-1}$, $i, j = 1, 2 \dots$.

В работах [18]–[20] обсуждаются вопросы, связанные с индексами дефекта операторов, порожденных обобщенными якобиевыми матрицами; в частности, в [18] установлена справедливость теоремы 4.

2. Теоремы о немаксимальности и минимальности дефектных чисел.

2.1. Доказательство теоремы 1. Пусть квадратные матрицы-функции Φ и Ψ порядка n являются матричными решениями уравнения $l[f] = 0$, удовлетворяющими начальным условиям $\Phi(0) = \Psi^{[1]}(0) = I$ и $\Phi^{[1]}(0) = \Psi(0) = O$. Сначала покажем, что матрицы-функции $K(x, t)$, $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ связаны соотношением

$$K(x, t) = \Psi(x)\Phi^*(t) - \Phi(x)\Psi^*(t). \tag{2.1}$$

Действительно, из определения матриц-функций Φ и Ψ легко получить, что вектор-столбцы матрицы

$$T = \begin{pmatrix} \Phi & \Psi \\ \Phi^{[1]} & \Psi^{[1]} \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений системы (1.4) при $\lambda = 0$. Кроме того, легко установить, что

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \Psi^{*[1]} & -\Psi^* \\ -\Phi^{*[1]} & \Phi^* \end{pmatrix}$$

(см. замечание 1 из [9]).

Пусть матрица-функция F определена в формуле (1.4) и вектор-функция $H := (0, h)^t$, где h – n-компонентный вектор-столбец с локально интегрируемыми координатами. Применяя метод вариации постоянных к неоднородной системе дифференциальных уравнений первого порядка $Y' = FY + H$, получим, что общее решение этой системы имеет вид

$$Y = T(x) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \int_{x_0}^{x} T(x) T^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} dt,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные n-компонентные вектор-столбцы, т.е. функция Коши этой системы равна $T(x) \cdot T^{-1}(t)$. Из последнего равенства заключаем, что для общего решения уравнения $l[f] = h$ справедливо равенство

$$f = \Phi C_1 + \Psi C_2 + \int_{x_0}^{x} \{\Psi(x)\Phi^*(t) - \Phi(x)\Psi^*(t)\} h(t)\, dt,$$

т.е. для $K(x,t)$ справедливо равенство (2.1). При этом справедливость соотношений $K(x,t)|_{x=t} = O$ и $K^{[1]}(x,t)|_{x=t} = I$ немедленно следует из представления матрицы-функции T и равенства $T(x)T^{-1}(x) = I$ (здесь I – единичная матрица порядка $2n$).

Достаточность. Из формулы (2.1) и из самосопряженности матричной нормы следует, что

$$\|K(x,t)\| \leqslant \|\Psi(x)\|\,\|\Phi(t)\| + \|\Phi(x)\|\,\|\Psi(t)\|.$$

Записав правую часть этого неравенства в виде скалярного произведения двумерных векторов $(\|\Psi(x)\|, \|\Phi(x)\|)$ и $(\|\Phi(t)\|, \|\Psi(t)\|)$ и применяя неравенство Коши–Буняковского, находим, что

$$\|K(x,t)\|^2 \leqslant (\|\Phi(x)\|^2 + \|\Psi(x)\|^2)(\|\Phi(t)\|^2 + \|\Psi(t)\|^2).$$

Интегрируя последнее неравенство по t в пределах от a до x, а затем по x в пределах от a до b, где $0 \leqslant a \leqslant b < +\infty$, после элементарных вычислений находим, что

$$\int_a^b (\|\Phi(x)\|^2 + \|\Psi(x)\|^2)\,dx \geqslant \sqrt{2}\biggl\{\int_a^b dx \int_a^x \|K(x,t)\|^2\,dt\biggr\}^{1/2}. \tag{2.2}$$

Пусть теперь $(a_k, b_k) \subset \mathbb{R}_+$ – последовательность непересекающихся интервалов, удовлетворяющая условию (1.5). Применяя неравенство

$$\int_0^{+\infty} (\|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} (\|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2),$$

а затем неравенство (2.2) к каждому слагаемому из суммы, стоящей в правой части, и равенство (1.5), находим, что

$$\int_0^{+\infty} (\|\Phi\|^2 + \|\Psi\|^2) = +\infty. \tag{2.3}$$

Таким образом, либо матрица-функция Φ, либо Ψ содержит вектор-столбец, не принадлежащий пространству $\mathscr{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$, т.е. при некотором λ (а именно, при $\lambda = 0$) не все решения уравнения (1.3) принадлежат этому пространству. Следовательно, дефектные числа оператора L_0 не максимальны (см. п. 1.1). Достаточность доказана.

Необходимость. Предположим, что для оператора L_0 не реализуется случай предельного круга, т.е. выполняется равенство (2.3). Покажем, что тогда для любого $a \in \mathbb{R}_+$ выполняется равенство

$$\int_a^{+\infty} dx \int_a^x \|K(x,t)\|^2\,dt = +\infty. \tag{2.4}$$

Допустим, что это не так, т.е. для некоторого $a_0 \in \mathbb{R}_+$

$$J := \int_{a_0}^{+\infty} dx \int_{a_0}^x \|K(x,t)\|^2\,dt < +\infty.$$

Применяя равенство (2.1), заметим, что тогда

$$\int_{a_0}^{+\infty} dx \int_{a_0}^{+\infty} \|K(x,t)\|^2\,dt = 2J < +\infty.$$

Следовательно, согласно теореме Фубини каждый столбец матрицы-функции $K(\,\cdot\,,t)$ для п.в. $t \geqslant a_0$ принадлежит пространству $\mathscr{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$. Теперь заметим, что, во-первых, существуют числа t_1^0 и t_2^0 $(> a_0)$ такие, что

$$\det \begin{pmatrix} \Phi(t_1) & \Psi(t_1) \\ \Phi(t_2) & \Psi(t_2) \end{pmatrix} \neq 0$$

при $t_1 = t_1^0$ и $t_2 = t_2^0$, поскольку противоположное допущение приводит к противоречивому равенству $\det T(t_1^0) = 0$ при некотором $t_1^0 > a_0$, а, во-вторых, в силу непрерывности матриц-функций $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ при некотором $\delta > 0$ это неравенство справедливо при всех $t_1 \in (t_1^0 - \delta, t_1^0 + \delta)$ и $t_2 \in (t_2^0 - \delta, t_2^0 + \delta)$. Таким образом, существуют числа t_1^1 и t_2^1 из соответствующих интервалов такие, что каждый столбец матрицы-функции $K(\,\cdot\,,t_i^1)$ принадлежит пространству $\mathscr{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$ при $i=1,2$. Кроме того, вектор-столбцы матрицы-функции $K(\,\cdot\,,t_1^1)$ и $K(\,\cdot\,,t_2^1)$ линейно независимы. Действительно, из равенства

$$K(x,t_1^1)\alpha + K(x,t_2^1)\beta = 0,$$

где $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)^t$, $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)^t$, формулы (2.1) и начальных условий $\Phi(0) = \Psi^{[1]}(0) = I$ и $\Phi^{[1]}(0) = \Psi(0) = O$ следует, что векторы α и β удовлетворяют однородной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \Phi^*(t_1^1)\alpha + \Phi^*(t_2^1)\beta = 0, \\ \Psi^*(t_1^1)\alpha + \Psi^*(t_2^1)\beta = 0, \end{cases}$$

определитель которой отличен от 0. Следовательно,

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \beta_1 = \dots = \beta_n = 0.$$

Таким образом, все решения уравнения (1.3) при $\lambda = 0$ принадлежат пространству $\mathscr{L}_n^2(\mathbb{R}_+)$, а это противоречит условию (2.3). Равенство (2.4) доказано. Остается заметить, что если выполняется это равенство, то можно найти последовательность непересекающихся интервалов $(a_k,b_k) \subset \mathbb{R}_+$, $k=1,2,\dots$, например, таких, что

$$\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^{x} \|K(x,t)\|^2\,dt \geqslant 1,$$

а для этой последовательности интервалов равенство (1.5), очевидно, выполняется. Теорема 1 доказана.

Пусть $(a_k,b_k) \subset \mathbb{R}_+$, $k=1,2,\dots$, – последовательность непересекающихся интервалов. Заметим, что, как известно, при фиксированном k в треугольнике

$$\{(x,t) \mid a_k < t \leqslant x < b_k\}$$

функция $K(x,t)$ однозначно определяется значениями коэффициентов выражения l. Таким образом, если выполняется условие (1.5), то независимо от значений этих функций вне множества $U_{k=1}^{+\infty}[a_k,b_k]$ для выражения l не реализуется случай предельного круга, требуется лишь, чтобы матрицы-функции $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ на $\mathbb{R}_+$ удовлетворяли условиям, перечисленным в п. 1.1. В дальнейшем мы воспользуемся этим замечанием.

2.2. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть a, b и c – положительные числа такие, что $a<c<b$, H – произвольная вещественная симметрическая матрица порядка n, и пусть $K(x,t)=(k_{ij}(x,t))_{i,j=1}^n$ – функция Коши векторного квазидифференциального уравнения*

$$-y''+H\delta(x-c)y=0. \tag{2.5}$$

Тогда

$$\int_a^b dx\int_a^x |k_{ii}(x,t)|^2\,dt \geqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}(\rho s)^2(\rho+s)\left|h_{ii}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{s}\right)\right|,$$
$$\int_a^b dx\int_a^x |k_{ij}(x,t)|^2\,dt = \frac{|h_{ij}|^2}{9}(\rho s)^3, \qquad \text{если}\quad i\neq j,$$

где $\rho=c-a$ и $s=b-c$.

Доказательство. В определении квазидифференциального выражения $l[f]$ по формуле (1.7) положим

$$\sigma(x)=\begin{cases} O, & \text{если}\quad a\leqslant x<c,\\ H, & \text{если}\quad c\leqslant x\leqslant b.\end{cases}$$

Тогда уравнение $l[f]=0$ примет вид (2.5). Пусть значение $t\in[a,b]$ фиксировано. Функция $K(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.5) при $x>t$ и начальным условиям $K(x,t)|_{x=t}=O$ и $K^{[1]}(x,t)|_{x=t}=I$. Из этого легко вывести, что

$$K(x,t)=(x-t)I$$

при $t\in[a,c]$, $x\in[t,c]$ или при $t\in[c,b]$, $x\in[t,b]$.

Пусть теперь $t\in(a,c)$ и $x\in(c,b)$. Тогда $K(x,t)=C_1(t)+xC_2(t)$ при $x\in(c,b]$, где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ – матрицы-функции порядка n, и, следовательно,

$$K(c+0,t)=C_1(t)+cC_2(t) \qquad \text{и} \qquad K^{[1]}(c+0,t)=C_2(t)-H(C_1(t)+cC_2(t)).$$

С другой стороны,

$$K(c-0,t)=(c-t)I \qquad \text{и} \qquad K^{[1]}(c-0,t)=I.$$

Используя, далее, условия непрерывности функций $K(x,t)$ и $K^{[1]}(x,t)$ в точке $x=c$, получаем, что $C_1(t)$ и $C_2(t)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} C_1(t)+cC_2(t)=(c-t)I,\\ C_2(t)-H(C_1(t)+cC_2(t))=I.\end{cases}$$

Таким образом, $C_1(t)=-tI-(c-t)cH$ и $C_2(t)=I+(c-t)H$ и, следовательно,

$$K(x,t)=(x-t)I+(c-t)(x-c)H$$

при $t\in[a,c]$, $x\in[c,b]$.

Из полученных формул для $K(x,t)$ следует, что при $1 \leqslant i \leqslant n$

$$J_{ii} := \int_a^b dx \int_a^x |k_{ii}(x,t)|^2\, dt =: J_1 + 2h_{ii}J_2 + h_{ii}^2 J_3,$$

где вычисления показывают, что

$$J_1 = \frac{1}{12}(b-a)^4, \qquad J_2 = \frac{1}{6}(b-c)^2(c-a)^2(b-a), \qquad J_3 = \frac{1}{9}(b-c)^3(c-a)^3.$$

Таким образом,

$$J_{ii} = \frac{h_{ii}^2}{9}(\rho s)^3 + \frac{h_{ii}}{3}(\rho s)^2(\rho+s) + \frac{1}{12}(\rho+s)^4.$$

Записав интеграл J_{ii} в виде

$$J_{ii} = (\rho s)^3\left[\left[\frac{h_{ii}}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{s}\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{s}\right)^2\left[\frac{1}{12}\rho s\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{s}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]\right],$$

заметим, что

$$\frac{1}{12}\rho s\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{s}\right)^2 - \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{12}.$$

Поэтому

$$J_{ii} \geqslant (\rho s)^3\left[\left[\frac{h_{ii}}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{s}\right)\right]^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{s}\right)^2\right].$$

Применив еще раз неравенство между арифметическим и геометрическим средними, окончательно находим, что справедливо первое утверждение леммы 2.

Кроме того, как мы уже показали выше, элемент $k_{ij}(x,t)$ матрицы-функции $K(x,t)$ при $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ определяется равенством $k_{ij}(x,t) = (c-t)(x-c)h_{ij}$. Поэтому

$$\int_a^b dx \int_a^x |k_{ij}(x,t)|^2\, dt = \frac{|h_{ij}|^2}{9}(\rho s)^3.$$

Лемма 2 доказана.

Используя лемму 2, докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть $(a_k,b_k) \subset \mathbb{R}_+$, $k = 1,2,\dots$, – последовательность попарно непересекающихся интервалов и c_k – последовательность положительных чисел такая, что $a_k < c_k < b_k$, и на каждом отрезке $[a_k,b_k]$ выполнены равенства*

$$P(x) = I, \qquad R(x) = \sigma(x), \qquad Q(x) = -\sigma^2(x),$$

где $\sigma(x)$ – кусочно-постоянная матрица-функция порядка n с матрицей скачков $\mathscr{H}_k = (h_{ij}^k)_{i,j=1}^n$ в точке c_k. Пусть далее, числа $\rho_k = c_k - a_k$, $s_k = b_k - c_k$ и матрица $\mathscr{H}_k$ таковы, что выполняется одно из следующих условий:

- *выполнено равенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \rho_k s_k \sqrt{\rho_k + s_k}\sqrt{\left|h_{ii}^k + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\rho_k}+\frac{1}{s_k}\right)\right|} = +\infty \tag{2.6}$$

  хотя бы для одного i такого, что $1 \leqslant i \leqslant n$; или

- *выполнено равенство*
$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\rho_k s_k)^{3/2}|h_{ij}^k| = +\infty \tag{2.7}$$
хотя бы для одной пары (i,j) такой, что $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$.

Тогда для оператора L_0 не реализуется случай предельного круга.

Доказательство. Применим лемму 2, положив $a = a_k$, $c = c_k$, $b = b_k$. Тогда
$$\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^{x} |k_{ii}(x,t)|^2\, dt \geqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}(\rho_k s_k)^2(\rho_k + s_k)\left|h_{ii}^k + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\rho_k} + \frac{1}{s_k}\right)\right|,$$
$$\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^{x} |k_{ij}(x,t)|^2\, dt = \frac{|h_{ij}^k|^2}{9}(\rho_k s_k)^3, \qquad \text{если} \quad i \neq j, \quad k = 1, 2, \ldots .$$
Полагая $\|K(x,t)\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n}|k_{ij}(x,t)|^2$ и при фиксированном $1 \leqslant i \leqslant n$ используя неравенство $\|K(x,t)\| \geqslant |k_{ii}(x,t)|$, получим
$$\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^{x} \|K(x,t)\|^2\, dt \geqslant 3^{-3/2}(\rho_k s_k)^2(\rho_k + s_k)\left|h_{ii}^k + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\rho_k} + \frac{1}{s_k}\right)\right|.$$
Извлекая квадратный корень из обеих частей этого неравенства, а затем суммируя по k, находим, что
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^{x} \|K(x,t)\|^2\, dt\right)^{1/2} \geqslant 3^{-3/4}\sum_{k=1}^{+\infty}\rho_k s_k\sqrt{(\rho_k + s_k)}\sqrt{\left|h_{ii}^k + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\rho_k} + \frac{1}{s_k}\right)\right|}.$$
Рассуждая аналогично с учетом второго утверждения леммы 2, для $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ находим, что
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\int_{a_k}^{b_k} dx \int_{a_k}^{x} \|K(x,t)\|^2\, dt\right)^{1/2} \geqslant \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}(\rho_k s_k)^{3/2}|h_{ij}^k|.$$
Остается применить теорему 1 с учетом условий (2.6) и (2.7). Теорема 5 доказана.

2.3. Приведем некоторые следствия из теоремы 5.

Формулировка теоремы 5, очевидно, упрощается, если предположить, что точки c_k являются серединами отрезков $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots$. В этой ситуации справедливо

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 5, $c_k = (a_k + b_k)/2$ и*
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\rho_k^{5/2}\sqrt{\left|h_{ii}^k + \frac{6}{\rho_k}\right|} = +\infty$$
хотя бы для одного i такого, что $1 \leqslant i \leqslant n$, или
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\rho_k^3|h_{ij}^k| = +\infty$$
хотя бы для одной пары (i,j) такой, что $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, где $\rho_k = b_k - a_k$. Тогда для оператора L_0 не реализуется случай предельного круга.

Применим теорему 5 в ситуации, когда дифференциальное выражение l имеет вид (1.8). В этом случае в качестве точек c_k, $k=1,2,\dots$, выберем точки x_k, а в качестве отрезков $[a_k,b_k]$ – отрезки $[x_k-d_k/2, x_k+d_{k+1}/2]$, где, напомним, что $d_k = x_k - x_{k-1}$ (см. формулировку теоремы 3). Справедливо

Следствие 2. *Пусть дифференциальное выражение $l[f]$ имеет вид (1.8) и*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k\, d_{k+1} r_{k+1} \sqrt{\left| h_{ii}^k + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{d_k} + \frac{1}{d_{k+1}}\right)\right|} = +\infty$$

хотя бы для одного i такого, что $1 \leqslant i \leqslant n$, или

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (d_k\, d_{k+1})^{3/2} |h_{ij}^k| = +\infty$$

хотя бы для одной пары (i,j) такой, что $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Тогда для оператора L_0 не реализуется случай предельного круга.

2.4. В пп. 2.2, 2.3 настоящего раздела было продемонстрировано, как из теоремы 1 можно получить признаки немаксимальности дефектных чисел для векторных операторов Штурма–Лиувилля, порожденных выражениями вида (1.1), (1.7) или (1.8). Применяя теорему 3, получаем, что из справедливости следствия 2 теоремы 5 следует, что для обобщенной якобиевой матрицы J с элементами вида (1.10) не реализуется вполне неопределенный случай.

В этом пункте мы получим признак реализации определенного случая для якобиевых матриц J с элементами вида (1.10). Здесь же отметим, что согласно теореме 2 он будет одновременно и признаком реализации случая предельной точки для векторного оператора Штурма–Лиувилля, порожденного выражением вида (1.8).

Справедлива следующая

Теорема 6. *Пусть последовательность d_k такова, что*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k^2 = +\infty. \tag{2.8}$$

Тогда для якобиевой матрицы J с элементами, определяемыми равенствами (1.10), имеет место определенный случай.

Доказательство. Из равенства (1.10) следует, что $\|B_k\|^{-1} = r_{k+1} r_{k+2}\, d_{k+1}/\sqrt{n}$. Кроме того,

$$\begin{aligned} d_{k+1}^2 &\leqslant \sqrt{d_k + d_{k+1}}\sqrt{d_{k+1}+d_{k+2}}\,d_{k+1} = r_{k+1} r_{k+2} d_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}(r_{k+1}^2 + r_{k+2}^2) d_{k+1} \\ &= \frac{1}{2}(d_k d_{k+1} + 2d_{k+1}^2 + d_{k+1} d_{k+2}) \leqslant \frac{1}{4}(d_k^2 + 6d_{k+1}^2 + d_{k+2}^2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\, d_{k+1}^2 \leqslant \|B_k\|^{-1} \leqslant \frac{1}{4\sqrt{n}}(d_k^2 + 6d_{k+1}^2 + d_{k+2}^2).$$

Из этого неравенства и условия (2.8) теоремы 6 следует, что

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|B_k\|^{-1} = +\infty.$$

Последнее соотношение является условием Карлемана, обеспечивающим реализацию определенного случая для матрицы J (см., например, [17; гл. VII, § 2, п. 11, теорема 2.9]). Теорема 6 доказана.

Отметим, что, рассуждая так же, как в [18], из теоремы 4 можно получить достаточные условия реализации вполне неопределенного и не вполне неопределенного случаев для матрицы J. При $n = 1$ эти признаки будут близки к некоторым результатам работ [15] и [16]. Однако мы здесь этого делать не будем.

3. Заключительные замечания. Примеры. В теоремах 2 и 5 данной работы предполагается, что квазидифференциальное выражение l имеет вид (1.7) на последовательности непересекающихся интервалов (a_k, b_k), $k = 1, 2, \dots$, где функция $\sigma(x)$ абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[a_k, b_k]$ в случае теоремы 2, и является ступенчатой функцией с одним скачком в случае теоремы 5, и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям при $x \in [a_k, b_k]$, обеспечивающим реализацию случая предельной точки для выражений вида (1.1) в случае теоремы 2 и немаксимальность дефектных чисел – в случае теоремы 5. Таким образом, в этих теоремах допускается, что коэффициенты выражения l могут быть произвольными матрицами-функциями вне отрезков $[a_k, b_k]$; требуется лишь выполнение условий, перечисленных в начале п. 1.1, т.е. элементы этих матриц-функций должны быть измеримы на $\mathbb{R}_+$ и суммируемы на каждом ее замкнутом конечном интервале. В частности, выражение l может иметь вид (1.6) при соответствующих ограничениях на коэффициенты P_0, Q_0 и P_1.

В работе [21] Крист и Штольц показали, что если $d_j = 1/j$ и $\mathscr{H}_j = (-2j-1)I$, $j = 1, 2, \dots$, то для выражения l вида (1.8) при $n = 1$ реализуется случай предельного круга и, по-видимому, впервые обнаружили, что для этого выражения такое возможно. Позже в работах [15], [16] Костенко и Маламуда и в работе [22] Конечной были построены многочисленные примеры случаев реализации предельной точки или предельного круга для выражений вида (1.8) при $n = 1$.

Обобщенные якобиевы матрицы вида J возникают в связи с матричной степенной проблемой моментов (см., например, [23]) и хорошо изучены. В частности, в работах [18]–[20] установлены критерии максимальности дефектных чисел и различные признаки реализации случаев максимальности и немаксимальности дефектных чисел в терминах элементов матрицы J. Применив эти признаки и теорему 3, можно получить условия максимальности и немаксимальности дефектных чисел оператора L_0, порожденного выражением (1.8), в терминах $\mathscr{H}_k$ и d_k. В частности, используя теорему 1 из [20] и теорему 3 данной работы, можно показать, что справедливы следующая теорема и следствие из нее.

Теорема 7. *Пусть элементы матрицы J таковы, что*

$$\text{(a)} \quad \sum_{j=1}^{+\infty} \left(r_{2j+s} \frac{d_{1+s} d_{3+s} \cdots d_{2j-1+s}}{d_s d_{2+s} \cdots d_{2j-2+s}} \right)^2 < +\infty, \qquad s = 1, 2,$$

$$\text{(b)}\quad \sum_{j=1}^{+\infty}\biggl(\frac{d_{1+s}d_{3+s}\cdots d_{2j-1+s}}{d_s d_{2+s}\cdots d_{2j-2+s}}\biggr)^2\biggl\|\mathscr{H}_{2j+s-1}+\biggl(\frac{1}{d_{2j+s-1}}+\frac{1}{d_{2j+s}}\biggr)I\biggr\| < +\infty, \qquad s=1,2.$$

Тогда для оператора L_0 реализуется случай предельного круга.

Следствие 3. *Пусть элементы матрицы J таковы, что*

1) $r_k r_{k+3} d_k d_{k+2} \geqslant r_{k+1} r_{k+2} d_{k+1}^2$ *или* $r_k r_{k+3} d_k d_{k+2} \leqslant r_{k+1} r_{k+2} d_{k+1}^2$ *для всех* $k = 1, 2, \ldots$;
2) *выполнено условие*
$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k^2 < +\infty;$$
3) *выполнено условие*
$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_{k+1}\biggl\|\mathscr{H}_k+\biggl(\frac{1}{d_k}+\frac{1}{d_{k+1}}\biggr)I\biggr\| < +\infty.$$

Тогда для выражения оператора L_0 реализуется случай предельного круга.

Теорема 7 и следствие 3 являются обобщениями некоторых результатов из работ [8] и [9].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.

[2] R. L. Anderson, “Limit-point and limit-circle criteria for a class of singular symmetric differential operators”, *Canad. J. Math.*, **28**:5 (1976), 905–914.

[3] В. Б. Лидский, “О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений $-y'' + P(t)y = \lambda y$”, *Докл. АН СССР*, **95**:2 (1954), 217–220.

[4] Г. А. Калябин, “О числе решений из $L_2(0,\infty)$ самосопряженной системы дифференциальных уравнений второго порядка”, *Функц. анализ и его прил.*, **6**:3 (1972), 74–76.

[5] В. П. Серебряков, “О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений типа Штурма–Лиувилля”, *Дифференциальные уравнения*, **24**:10 (1988), 1732–1738.

[6] В. П. Серебряков, “L^p-свойства решений систем квазидифференциальных уравнений второго порядка и возмущение их коэффициентов на множествах положительной меры”, *Дифференциальные уравнения*, **35**:7 (1999), 909–917.

[7] В. П. Серебряков, “Об индексе дефекта матричных дифференциальных операторов второго порядка с быстро осциллирующими коэффициентами”, *Изв. вузов. Матем.*, 2000, № 3, 48–53.

[8] К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, “Сингулярные операторы Штурма–Лиувилля с потенциалом-распределением в пространстве вектор-функций”, *Докл. РАН*, **441**:2 (2011), 165–168.

[9] К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, “Сингулярные операторы Штурма–Лиувилля с негладкими потенциалами в пространстве вектор-функций”, *Уфимск. матем. журн.*, **3**:3 (2011), 105–119.

[10] И. Н. Бройтигам, К. А. Мирзоев, Т. А. Сафонова, “Аналог теоремы Орлова об индексе дефекта для матричных дифференциальных операторов второго порядка”, *Матем. заметки*, **97**:2 (2015), 314–317.

[11] К. А. Мирзоев, “Функция Коши и $\mathscr{L}^p_w$-свойства решений квазидифференциальных уравнений”, *УМН*, **46**:4 (1991), 161–162.

[12] К. А. Мирзоев, “Операторы Штурма–Лиувилля”, Тр. ММО, **75**, № 2, МЦНМО, М., 2014, 335–359.

[13] K. A. Mirzoev, “New existence criteria for limit points of Sturm–Liouville operator”, *Proc. Inst. Math. Mech., Natl. Acad. Sci. Azerb.*, **40**, Special Issue (2014), 290–299.

[14] A. Zettl, *Sturm–Liouville Theory*, Math. Surveys Monogr., **121**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[15] А. С. Костенко, М. М. Маламуд, “Об одномерном операторе Шрёдингера с δ-взаимодействиями”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:2 (2010), 87–91.

[16] A. S. Kostenko, M. M. Malamud, “1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set”, *J. Differential Equations*, **249**:2 (2010), 253–304.

[17] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965.

[18] А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, “Трехчленные рекуррентные соотношения с матричными коэффициентами. Вполне неопределенный случай”, *Матем. заметки*, **63**:5 (1998), 709–716.

[19] А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, “Обобщенные якобиевы матрицы и индексы дефекта обыкновенных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами”, *Функц. анализ и его прил.*, **33**:1 (1999), 30–45.

[20] А. Г. Костюченко, К. А. Мирзоев, “Признаки вполне неопределенности якобиевых матриц с матричными элементами”, *Функц. анализ и его прил.*, **35**:4 (2001), 32–37.

[21] C. S. Christ, G. Stolz, “Spectral theory of one-dimensional Schrödinger operators with point interactions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **184**:3 (1994), 491–516.

[22] Н. Н. Конечная, “Об асимптотическом интегрировании симметрических квазидифференциальных уравнений второго порядка”, *Матем. заметки*, **90**:6 (2011), 875–884.

[23] М. Г. Крейн, “Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов”, *Докл. АН СССР*, **69**:2 (1949), 125–128.

К. А. Мирзоев
Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

Поступило
26.07.2015

Т. А. Сафонова
Северный (Арктический) федеральный университет
имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск
E-mail: tanya.strelkova@rambler.ru