П. В. Снурницын, Аддитивная задача с функцией Рамануджана, *Чебышевский сб.*, 2011, том 12, выпуск 4, 112–128

https://www.mathnet.ru/cheb115

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 12 Выпуск 4 (2011)

УДК 511.34

АДДИТИВНАЯ ЗАДАЧА С ФУНКЦИЕЙ РАМАНУДЖАНА [1]

П. В. Снурницын (г. Москва)

Аннотация

В работе рассматривается аддитивная задача с функцией Рамануджана. Доказано что множество значений функции Рамануджана является аддитивным базисом множества целых чисел порядка 7544.

Функция Рамануджана τ может быть определена как коэффициент разложения

$$q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n,$$

(см. [1, 2]). В 2008 г. М.З. Гараев, В.С. Гарсиа, С.В. Конягин [3] рассмотрели аддитивную задачу с последовательностью значений функции Рамануджана. В их работе было доказано, что эта последовательность образует конечный аддитивный базис множества целых чисел порядка 74000. Другими словами, для любого целого числа N диофантово уравнение

$$\sum_{i=1}^{74000}\tau(n_i)=N$$

разрешимо в натуральных числах $n_1,\dots n_{74000}$. При этом выполняется следующее условие

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 74000} n_i \ll |N|^{\frac{2}{11}}.$$

В работе [4] М.З. Гараев, В.С. Гарсиа, С.В. Конягин доказали, что для любого целого числа N уравнение

$$\sum_{i=1}^{148000}\tau(n_i)=N$$

разрешимо в натуральных числах $n_1,\dots n_{148000}$, причем

$$\max_{1\leqslant i\leqslant 148000} n_i \ll |N|^{\frac{2}{11}}e^{-c\frac{\log|N|}{\log\log|N|}},$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 01-00-433а.

где $c > 0$ — абсолютная постоянная.

В 2011 году в работах автора [5, 6] были получены значения порядка аддитивного базиса последовательности значений функции Рамануджана, равные 8012, 7940 соответственно. В данной работе доказывается, что значение порядка базиса равно 7544.

Теорема 1. *Для любого целого числа N уравнение*

$$\sum_{i=1}^{7544} \tau(n_i) = N$$

разрешимо в натуральных числах $n_1, \ldots, n_{7544}$, причем

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant 7544} n_i \ll |N|^{\frac{2}{11}}.$$

Пусть M — достаточно большое четное число. Приведем некоторые результаты работы М.З. Гараева, В.С. Гарсиа, С.В. Конягина [3]. Обозначим

$$\mathscr{P} = \{p : p - \text{простое}, 23 < p \leqslant M^{\frac{1}{11}}\}.$$

Следующая оценка известна как гипотеза Рамануджана и была доказана Делинем [7]

$$|\tau(n)| \ll n^{\frac{11}{2}+\varepsilon}.$$

Из этой оценки можно заключить, что N^6 чисел вида

$$\sum_{i=1}^{6} \tau(n_i), \quad 1 \leqslant n_1, \ldots, n_6 \leqslant N,$$

являются целыми числами порядка $O(N^{\frac{11}{2}+\varepsilon})$. То есть, в среднем, каждое число представимо суммой шести значений многими способами. Имея в виду это замечание, рассмотрим подмножества $\mathscr{P}_0 \in \mathscr{P}$, обладающие тем свойством, что уравнение

$$\sum_{i=1}^{6} \tau(p_i') \neq \sum_{i=7}^{12} \tau(p_i')$$

неразрешимо в числах $p_1', \ldots p_{12}' \in \mathscr{P}_0$, $p_1' < \cdots < p_6'$, $p_7' < \cdots < p_{12}'$, $(p_1', \ldots, p_6') \neq (p_7', \ldots, p_{12}')$. Такие подмножества $\mathscr{P}_0$ будем называть допустимыми. В работе [3] доказано, что допустимые подмножества $\mathscr{P}_0 \subset \mathscr{P}$ существуют и $|\mathscr{P}_0| \geqslant 12$. Обозначим через $\mathscr{P}'$ допустимое подмножество $\mathscr{P}$ наибольшей мощности. То есть $\mathscr{P}'$ — это такое подмножество $\mathscr{P}$, что $|\mathscr{P}'| \geqslant 12$, и все суммы вида

$$\tau(p_1') + \cdots + \tau(p_6'), \quad p_1' < \cdots < p_6', \quad p_1', \ldots, p_6' \in \mathscr{P}',$$

различны.

Лемма 1. *Для числа элементов множества* $\mathscr{P}'$ *выполняется оценка*

$$|\mathscr{P}'| \ll M^{\frac{1}{11}-\frac{1}{132}}.$$

Доказательство. См. [3].

Лемма 2. *Для любого* $p \in \mathscr{P} \setminus \mathscr{P}'$ *существуют* $p'_1, \dots p'_{11} \in \mathscr{P}'$ *такие, что*

$$p^{11} = \sum_{i=1}^{6} \tau(p'_i p) - \sum_{i=7}^{11} \tau(p'_i p) - \tau(p^2).$$

Доказательство. См. [3].

Лемма 3. *Любое целое число* r, $0 \leqslant r < 370944$ *представимо в виде*

$$r = \sum_{i=1}^{198} \tau(a_i),$$

где $a_i \leqslant 105$, $1 \leqslant i \leqslant 198$.

Доказательство. См. [3].

Лемма 2 устанавливает связь между рассматриваемой задачей и задачей о представлении целого числа суммой одиннадцатых степеней простых чисел. Будем использовать формулы и оценки, связанные с проблемами Варинга–Гольдбаха и Варинга. Для удобства обозначим $\nu = 1/11$. Пусть r — целое, $B > 11(r+1)$. Введем следующие обозначения

$$P_0 = M^{\nu}, \quad P = [P_0], \quad L = \log P = \nu \log M, \quad \vartheta = ML^{-B},$$

Положим

$$S(\alpha) = \sum_{p \in \mathscr{P}} e(\alpha p^{11}).$$

Рассмотрим интервал $\left[-\frac{1}{\vartheta}; 1 - \frac{1}{\vartheta}\right]$. Для целых чисел a, q таких, что $0 \leqslant a < q$, $(a, q) = 1$, $q \leqslant L^B$, положим

$$\mathfrak{M}(a, q) = \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{q\vartheta}; \frac{a}{q} + \frac{1}{q\vartheta}\right].$$

Различные интервалы $\mathfrak{M}(a, q)$ не пересекаются. Интервал $\left[-\frac{1}{\vartheta}; 1 - \frac{1}{\vartheta}\right]$ разобьем на два множества

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\substack{q \leqslant L^B, a < q \\ (a,q)=1}} \mathfrak{M}(a, q), \quad \mathfrak{m} = \left[-\frac{1}{\vartheta}; 1 - \frac{1}{\vartheta}\right] \setminus \mathfrak{M}.$$

Нам понадобится асимптотическая формула для интеграла

$$J(M,r)=\int\limits_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^r e(-\alpha M)d\alpha.$$

Пусть

$$T_{a,q}=\sum_{\substack{0\leqslant l<q\\(l,q)=1}} e_q(al^{11}),\quad A_r(M,q)=\sum_{\substack{0\leqslant a<q\\(a,q)=1}}\left(\frac{T_{a,q}}{\varphi(q)}\right)^r e_q(-aM),$$

$$\mathfrak{S}(M,r)=\sum_{q=1}^{\infty}A_r(M,q).$$

выражение $\mathfrak{S}(M,r)$ будем называть особым рядом.

Лемма 4. *При $r\geqslant 23$ имеет место асимптотическая формула*

$$J(M)=\mathfrak{S}(M)\frac{\Gamma(\nu+1)^r}{\Gamma(r\nu)}\frac{M^{r\nu-1}}{(\log M)^r}+O\left(\frac{M^{r\nu-1}}{(\log M)^r}\frac{\log\log M}{\log M}\right),$$

Доказательство. См. [8].

Лемма 5. *Если $r\geqslant 23$, $M\equiv r \pmod 2$, то существует не зависящая от M постоянная $C>0$ такая, что*

$$\mathfrak{S}(M,r)\geqslant C.$$

Доказательство. См. [8].

Лемма 6. *Для любого $B_0>0$ имеет место оценка*

$$\max_{\alpha\in\mathfrak{m}}|S(\alpha)|\ll\frac{P_0}{L^{B_0}}.$$

Доказательство. См. [9].

Пусть U — целое число, удовлетворяющее условию

$$|U|\ll P_0.$$

Введем следующие обозначения

$$S_0(\alpha)=\sum_{x\leqslant P_0}e(\alpha x^{11}),$$

$$S_{a,q}=\sum_{1\leqslant x\leqslant q}e_q(ax^{11}),\quad A'_r(U,q)=\sum_{\substack{a<q\\(a,q)=1}}\frac{|S_{a,q}|^{2r}}{q^{2r}}e_q(-aU),$$

$$\mathfrak{S}_0(U,r)=\sum_{q=1}^{\infty}A'_r(U,q),$$

выражение $\mathfrak{S}_0(U,r)$ будем называть особым рядом.

$$\gamma_0(\xi)=\int\limits_0^1 e(\xi x^{11})dx,$$

$$\Psi_0(M,U,r)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\gamma_0(z)|^{2r}e\left(-\frac{U}{M}z\right)dz,$$

интеграл $\Psi_0(M,U,r)$ будем называть особым интегралом.

Рассмотрим интервал $\left[-P_0^{11-\nu};1-P_0^{11-\nu}\right]$. Для целых чисел a, q таких, что $0\leqslant a<q$, $(a,q)=1$, $q\leqslant P_0^{\nu}$, положим

$$\mathfrak{M}'(a,q)=\left[\frac{a}{q}-P_0^{-11+\nu};\frac{a}{q}+P_0^{-11+\nu}\right].$$

Интервалы $\mathfrak{M}'(a,q)$ не пересекаются. Введем следующее разбиение промежутка $\left[-P_0^{-11+\nu};1-P_0^{-11+\nu}\right]$

$$\mathfrak{M}'=\bigcup_{\substack{q\leqslant P_0^{\nu},a<q\\(a,q)=1}}\mathfrak{M}'(a,q),$$

$$\mathfrak{m}'=\left[-P_0^{-11+\nu};1-P_0^{-11+\nu}\right]\setminus\mathfrak{M}'.$$

Нам понадобится асимптотическая формула для интеграла

$$J'(M,U,r)=\int\limits_{\mathfrak{M}'}|S_0(\alpha)|^{2r}e(-\alpha U)d\alpha.$$

Лемма 7. *Для любого $\varepsilon>0$ и для любого целого a, $(a,q)=1$ имеем*

$$S_{a,q}\ll_{\varepsilon}q^{1-\nu+\varepsilon}$$

Доказательство. См. [9].

Лемма 8. *Для $A'_r(U,q)$ имеем*

$$A'_r(U,q)\ll_{\varepsilon}q^{1-2\nu r+2\varepsilon r}.$$

Доказательство. См. [9].

Отсюда также следует, что особый ряд сходится при $r>11$.

Лемма 9. *Имеет место оценка*

$$\gamma_0(\xi)\ll Z_0(\xi)=\min(1,|\xi|^{-\nu}).$$

Доказательство. См. [9].

Из последней леммы следует сходимость особого интеграла при $2r > 11$.

Лемма 10. *При $r > 11$ имеет место равенство*

$$J'(M,U,r) = \Psi_0(M,U)\mathfrak{S}_0(U)M^{2r\nu-1} + O\left(P_0^{2r-11-8\nu}\right),$$

Доказательство. По определению $J'(M,U,r)$ и свойству множества $\mathfrak{M}'$ имеем

$$J'(M,U,r) = \sum_{q\leqslant P_0^\nu}\sum_{\substack{a<q\\(a,q)=1}}\int\limits_{\mathfrak{M}'(a,q)}|S_0(\alpha)|^{2r}e(-\alpha U)d\beta.$$

Рассмотрим интеграл отвечающий интервалу $\mathfrak{M}'(a,q)$. Запишем $\alpha\in\mathfrak{M}'(a,q)$ в виде $\alpha = \dfrac{a}{q}+\beta$ и преобразуем $S_0\left(\dfrac{a}{q}+\beta\right)$. Переменная суммирования x изменяется в пределах $1\leqslant x\leqslant P_0$, представим x в виде $x = qt+l$, где $1\leqslant l\leqslant q$, $\dfrac{1-l}{q}\leqslant t\leqslant\dfrac{P_0-l}{q}$. Тогда

$$S_0\left(\frac{a}{q}+\beta\right) = \sum_{x\leqslant P_0}e\left(\left(\frac{a}{q}+\beta\right)x^{11}\right) =$$
$$= \sum_{1\leqslant l\leqslant q}\sum_{\frac{1-l}{q}\leqslant t\leqslant\frac{P_0-l}{q}}e\left(\left(\frac{a}{q}+\beta\right)(qt+l)^{11}\right) =$$
$$= \sum_{1\leqslant l\leqslant q}e_q(al^{11})\sum_{\frac{1-l}{q}\leqslant t\leqslant\frac{P_0-l}{q}}e\left(\beta(qt+l)^{11}\right).$$

Нетрудно показать, что

$$\sum_{\frac{1-l}{q}\leqslant t\leqslant\frac{P_0-l}{q}}e(\beta(qt+l)^{11}) = \int\limits_{\frac{1-l}{q}}^{\frac{P_0-l}{q}}e(\beta(qt+l)^{11})dt + O(1) =$$
$$= \frac{1}{q}\int\limits_0^{P_0}e(\beta x^{11})dx + O(1) = \frac{1}{q}\gamma(\beta) + O(1),$$

где

$$\gamma(\beta) = \int\limits_0^{P_0}e(\beta x^{11})dx,$$

см., например, [10]. Следовательно,

$$S_0\left(\frac{a}{q}+\beta\right) = \frac{S_{a,q}}{q}\gamma(\beta) + O\left(P_0^\nu\right).$$

По лемме 9,
$$\gamma(\beta) \ll Z(\beta) = P_0 \min(1, |P_0^{11}\beta|^{-\nu}).$$
Тогда
$$\frac{S_{a,q}}{q}\gamma(\beta) \ll Z(\beta),$$
и имеем
$$\left|S_0\left(\frac{a}{q}+\beta\right)\right|^{2r} = \frac{|S_{a,q}|^{2r}}{q^{2r}}|\gamma(\beta)|^{2r} + O\left(Z(\beta)^{2r-1}P_0^{\nu}\right),$$
откуда
$$\left|S_0\left(\frac{a}{q}+\beta\right)\right|^{2r} e\left(-\left(\frac{a}{q}+\beta\right)U\right) = \\ = \frac{|S_{a,q}|^{2r}}{q^{2r}}e_q(-aU)|\gamma(\beta)|^{2r}e(-\beta U) + O\left(Z(\beta)^{2r-1}P_0^{\nu}\right).$$
Так как по лемме 9
$$\int\limits_{-P_0^{\nu-11}}^{P_0^{\nu-11}} Z(\beta)^{2r-1}P_0^{\nu}d\beta \ll P_0^{2r-1+\nu-11},$$
то для интеграла отвечающего интервалу $\left[-P_0^{\nu-11}; P_0^{\nu-11}\right]$ получим
$$\int\limits_{-P_0^{\nu-11}}^{P_0^{\nu-11}} \left|S_0\left(\frac{a}{q}+\beta\right)\right|^{2r} e\left(-\left(\frac{a}{q}+\beta\right)U\right)d\beta = \\ = \frac{|S_{a,q}|^{2r}}{q^{2r}}e_q(-aU)\int\limits_{-P_0^{\nu-11}}^{P_0^{\nu-11}} |\gamma(\beta)|^{2r}e(-\beta U)d\beta + O\left(P_0^{2r-1+\nu-11}\right).$$
Суммируя по всем промежуткам, образующим множество $\mathfrak{M}'$, получаем
$$J'(M,U,r) = \sum_{q\leqslant P_0^{\nu}}\sum_{\substack{a<q\\(a,q)=1}}\int\limits_{-P_0^{\nu-11}}^{P_0^{\nu-11}} \left|S_0\left(\frac{a}{q}+\beta\right)\right|^{2r} e\left(-\left(\frac{a}{q}+\beta\right)U\right)d\beta = \\ = \sum_{q\leqslant P_0^{\nu}}\sum_{\substack{a<q\\(a,q)=1}}\frac{|S_{a,q}|^{2r}}{q^{2r}}e_q(-aU)\int\limits_{-P_0^{\nu-11}}^{P_0^{\nu-11}} |\gamma(\beta)|^{2r}e(-\beta U)d\beta + O\left(P_0^{2r-11-8\nu}\right) = \\ = \sum_{q\leqslant P_0^{\nu}} A_r'(U,q)\int\limits_{-P_0^{\nu-11}}^{P_0^{\nu-11}} |\gamma(\beta)|^{2r}e(-\beta U)d\beta + O\left(P_0^{2r-11-8\nu}\right).$$

Преобразуя первое слагаемое последней суммы, получим

$$J'(M,U,r) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\beta)|^{2r} e(-\beta U) d\beta \sum_{q=0}^{\infty} A'_r(U,q) + O\left(P_0^{2r-11-8\nu}\right).$$

Преобразуем $\gamma(\beta)$

$$\gamma(\beta) = \int\limits_0^{P_0} e(\beta x^{11}) dx = P_0 \int\limits_0^1 e(\beta P_0^{11} x^{11}) dx = P_0 \gamma_0(\beta P_0^{11}).$$

Тогда для интеграла в асимптотической формуле получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\beta)|^{2r} e(-\beta U) d\beta = P_0^{2r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\gamma_0(\beta P_0^{11})|^{2r} e(-\beta U) dz =$$

$$= P_0^{2r-11} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\gamma_0(z)|^{2r} e\left(-\frac{U}{P_0^{11}} z\right) dz = M^{2r\nu-1} \Psi_0(M,U).$$

Окончательно, получаем

$$J'(M,U,r) = \Psi_0(M,U,r)\mathfrak{S}(M,r)M^{2r\nu-1} + O\left(P_0^{2r-11-8\nu}\right) =$$
$$= \Psi_0(M,U,r)\mathfrak{S}(M,r)M^{2r\nu-1} + O\left(M^{2r\nu-1-8\nu^2}\right).$$

Из лемм 9, 8 следует, что при $r > 11$ сходятся особый ряд и особый интеграл. Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобится также оценка тригонометрической суммы $S_0(\alpha)$ на точках второго класса.

Лемма 11. *Для точек второго класса $\mathfrak{m}'$ имеем*

$$\max_{\alpha \in \mathfrak{m}'} |S_0(\alpha)| \ll P_0^{1-\rho},$$

где $\rho = \dfrac{1}{7657}$.

Доказательство. См. [9].

Докажем следующее утверждение о представимости чисел суммой одиннадцатых степеней простых чисел.

Лемма 12. *Для достаточно большого четного M уравнение*

$$\sum_{i=1}^{204} p_i^{11} = M$$

разрешимо в числах $p_1, \ldots, p_{204} \in \mathscr{P} \backslash \mathscr{P}'$.

Доказательство. Пусть s — натуральное число. Положим

$$P_0 = M^{\frac{1}{11}},\ P_1 = \tfrac{1}{4}P_0,\ P_2 = \tfrac{1}{2}P_1^{1-\frac{1}{11}},\ \ldots,\ P_s = \tfrac{1}{2}P_{s-1}^{1-\frac{1}{11}}.$$

Определим следующие множества

$$\mathscr{U}_i = \{u : u \in \mathscr{P} \setminus \mathscr{P}', P_i < u < 2P_i\},\ 1 \leqslant i \leqslant s.$$

Из асимптотического закона распределения простых чисел (см. [10]) для числа элементов в множестве $\mathscr{U}_i$ имеем

$$|\mathscr{U}_i| \asymp \pi(2P_i) - \pi(P_i),$$

или

$$|\mathscr{U}_i| \asymp \frac{P_i}{\log P_i}. \tag{1}$$

Пусть r — натуральное число. Рассмотрим уравнение

$$p_1^{11} + \cdots + p_r^{11} + u_1^{11} + \cdots + u_s^{11} + u_{s+1}^{11} + \cdots + u_{2s}^{11} = M, \tag{2}$$

в числах, удовлетворяющих условиям

$$p_1, \ldots, p_r \in \mathscr{P}, \quad u_1, u_{s+1} \in \mathscr{U}_1, \ldots, u_s, u_{2s} \in \mathscr{U}_s.$$

Прежде всего, покажем, что уравнение

$$u_1^{11} + \cdots + u_s^{11} = u_{s+1}^{11} + \cdots + u_{2s}^{11} \tag{3}$$

имеет только решения вида $u_1 = u_{s+1}, u_2 = u_{s+2}, \ldots, u_s = u_{2s}$. Действительно, пусть $u_1 \neq u_{s+1}$. Тогда, с одной стороны,

$$|u_1^{11} - u_{s+1}^{11}| = |u_1 - u_{s+1}||u_1^{10} + u_1^9 u_{s+1} + \ldots u_{s+1}^{10}| \geqslant 11|u_1 - u_{s+1}|P_1^{10},$$

с другой стороны,

$$|u_2^{11} + \cdots + u_s^{11} - u_{s+2}^{11} - \cdots - u_{2s}^{11}| \leqslant (2P_2)^{11} = P_1^{10},$$

что невозможно. Из этого следует, что число решений уравнения (3) не превосходит

$$|\mathscr{U}_1||\mathscr{U}_2| \ldots |\mathscr{U}_s|.$$

Пусть $I(M) = I(M; r, s)$ — число решений уравнения (2). Как и выше положим $\vartheta = M(\log M)^{-B}$, $B > 11(r+1)$. Тогда

$$I(M) = \int_0^1 S(\alpha)^r T_1(\alpha)^2 \ldots T_s(\alpha)^2 e(-\alpha M) d\alpha =$$

$$= \int_{-\frac{1}{\vartheta}}^{1-\frac{1}{\vartheta}} S(\alpha)^r T_1(\alpha)^2 \ldots T_s(\alpha)^2 e(-\alpha M) d\alpha,$$

где

$$T_i(\alpha)=\sum_{u\in\mathscr{U}_i}e(\alpha u^{11}),\quad 1\leqslant i\leqslant s.$$

Рассмотрим разбиение интервала интегрирования.

$$\mathfrak{M}=\bigcup_{\substack{q\leqslant L^B, a<q\\(a,q)=1}}\mathfrak{M}(a,q),\quad \mathfrak{m}=\left[-\frac{1}{\vartheta};1-\frac{1}{\vartheta}\right]\setminus\mathfrak{M}.$$

Соответственно этому разбиению для $I(M)$ имеем

$$I(M)=I_{\mathfrak{M}}(M)+I_{\mathfrak{m}}(M),$$

где

$$I_{\mathfrak{M}}(M)=\int\limits_{\mathfrak{M}}S(\alpha)^rT_1(\alpha)^2\dots T_s(\alpha)^2e(-\alpha M)d\alpha,$$

$$I_{\mathfrak{m}}(M)=\int\limits_{\mathfrak{m}}S(\alpha)^rT_1(\alpha)^2\dots T_s(\alpha)^2e(-\alpha M)d\alpha.$$

Рассмотрим $I_{\mathfrak{M}}(M)$. Меняя порядок интегрирования и суммирования в $T_i(\alpha)$, получим

$$I_{\mathfrak{M}}(M)=\sum_{u_1,u_{s+1}\in\mathscr{U}_1}\cdots\sum_{u_s,u_{2s}\in\mathscr{U}_s}\int\limits_{\mathfrak{M}}S(\alpha)^re(-\alpha(M-u_1^{11}-\dots-u_{2s}^{11}))d\alpha.$$

Для интеграла

$$\int\limits_{\mathfrak{M}}S(\alpha)^re(-\alpha M_1)d\alpha$$

по леммам 4, 5 при $r\geqslant 23$ справедлива асимптотическая формула

$$\int\limits_{\mathfrak{M}}S(\alpha)^re(-\alpha M_1)d\alpha=\mathfrak{S}(M_1)\frac{\Gamma(\frac{1}{11})^r}{\Gamma(\frac{1}{11}r)}\frac{M_1^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M_1)^r}+O\left(\frac{M_1^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M_1)^r}\frac{\log\log M_1}{\log M_1}\right),$$

Следовательно, при достаточно большом M имеем неравенства

$$\int\limits_{\mathfrak{M}}S(\alpha)^re(-\alpha M_1)d\alpha\leqslant C\frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r},\quad \int\limits_{\mathfrak{M}}S(\alpha)^re(-\alpha M_1)d\alpha\geqslant C\frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r}.$$

Откуда получаем следующие неравенства для $I_{\mathfrak{M}}(M)$

$$I_{\mathfrak{M}}(M)\leqslant C\left(|\mathscr{U}_1|\dots|\mathscr{U}_s|\right)^2\frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r},\quad I_{\mathfrak{M}}(M)\geqslant C\left(|\mathscr{U}_1|\dots|\mathscr{U}_s|\right)^2\frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r}.$$

В интеграле по точкам второго класса $I_{\mathfrak{m}}(M)$ вынесем максимум модуля суммы $S(\alpha)$ и распространим интегрирование по всему отрезку

$$|I_{\mathfrak{m}}(M)| = \Big|\int\limits_{\mathfrak{m}} S(\alpha)^r T_1(\alpha)^2 \dots T_s(\alpha)^2 e(-\alpha M)d\alpha\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^{r_0} \int\limits_{\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^{r-1}|T_1(\alpha)|^2 \dots |T_s(\alpha)|^2 d\alpha \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^{r_0} \int\limits_0^1 |S(\alpha)|^{2r_1}|T_1(\alpha)|^2 \dots |T_s(\alpha)|^2 d\alpha,$$

где $r = r_0 + 2r_1$, $r_0 = 1$, если r нечетно, $r_0 = 2$, если r четно. Последний интеграл равен числу решений уравнения

$$p_1^{11} + \dots + p_{r_1}^{11} + u_1^{11} + \dots + u_s^{11} = p_{r_1+1}^{11} + \dots + p_{2r_1}^{11} + u_{s+1}^{11} + \dots + u_{2s}^{11},$$

где $p_1, p_{r_1+1} \dots, p_{r_1}, p_{2r_1} \in \mathscr{P}$, $u_1, u_{s+1} \in \mathscr{U}_1, \dots, u_s, u_{2s} \in \mathscr{U}_s$. В свою очередь, число решений этого уравнения не превосходит числа решений уравнения

$$x_1^{11} + \dots + x_{r_1}^{11} + u_1^{11} + \dots + u_s^{11} = x_{r_1+1}^{11} + \dots + x_{2r_1}^{11} + u_{s+1}^{11} + \dots + u_{2s}^{11},$$

где $1 \leqslant x_1, \dots, x_r \leqslant M^{\frac{1}{11}}$, $u_1, u_{s+1} \in \mathscr{U}_1, \dots, u_s, u_{2s} \in \mathscr{U}_s$. Поэтому

$$|I_{\mathfrak{m}}(M)| \leqslant \max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^{r_0} \int\limits_0^1 |S_0(\alpha)|^{2r_1}|T_1(\alpha)|^2 \dots |T_s(\alpha)|^2 d\alpha,$$

где

$$S_0(\alpha) = \sum_{x\leqslant M^{\frac{1}{11}}} e(\alpha x^{11}).$$

Рассмотрим интеграл

$$J(M) = \int\limits_0^1 |S_0(\alpha)|^{2r_1}|T_1(\alpha)|^2 \dots |T_s(\alpha)|^2 d\alpha =$$
$$= \int\limits_{-P^{-11+\nu}}^{1-P^{-11+\nu}} |S_0(\alpha)|^{2r_1}|T_1(\alpha)|^2 \dots |T_s(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Рассмотрим разбиение отрезка интегрирования

$$\mathfrak{M}' = \bigcup_{\substack{q\leqslant P^{\nu}, a<q\\ (a,q)=1}} \mathfrak{M}'(a,q), \quad \mathfrak{m}' = \Big[-P^{\frac{1}{11}-11}; 1 - P^{\frac{1}{11}-11}\Big] \setminus \mathfrak{M}'.$$

Соответственно разбиению, имеем

$$J(M) = J_{\mathfrak{M}'}(M) + J_{\mathfrak{m}'}(M),$$

где

$$J_{\mathfrak{M}'}(M) = \int\limits_{\mathfrak{M}'} |S_0(\alpha)|^{2r_1} |T_1(\alpha)|^2 \dots |T_s(\alpha)|^2 d\alpha,$$

$$J_{\mathfrak{m}'}(M) = \int\limits_{\mathfrak{m}'} |S_0(\alpha)|^{2r_1} |T_1(\alpha)|^2 \dots |T_s(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Рассмотрим $J_{\mathfrak{M}'}(M)$. Меняя порядок интегрирования и суммирования в $T_i(\alpha)$, запишем $J_{\mathfrak{M}'}(M)$ в виде

$$\sum_{u_1, u_{s+1} \in \mathscr{U}_1} \cdots \sum_{u_s, u_{2s} \in \mathscr{U}_s} \int_{\mathfrak{M}'} |S_0(\alpha)|^{2r_1} e(\alpha(u_1^{11} + \dots + u_s^{11} - u_{s+1}^{11} - \dots - u_{2s}^{11})) d\alpha,$$

при этом

$$\left| u_1^{11} + \dots + u_s^{11} - u_{s+1}^{11} - \dots - u_{2s}^{11} \right| \leqslant (2P_1)^{11} = 2^{11} M^{\frac{1}{11}} \ll M^{\frac{1}{11}}.$$

Для интеграла

$$\int_{\mathfrak{M}'} |S_0(\alpha)|^{2r_1} e(-\alpha U) d\alpha,$$

где

$$U = U(u_1, \dots u_{2s}) = -u_1^{11} - \dots - u_s^{11} + u_{s+1}^{11} + \dots + u_{2s}^{11},$$

по лемме 10 при $r_1 > 11$ имеем

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} |S_0(\alpha)|^{2r_1} e(-\alpha U) d\alpha = \Psi_0(M, U) M^{\frac{2}{11} r_1 - 1} + O\left(M^{\frac{2}{11} r_1 - 1 - \frac{8}{121}} \right),$$

откуда

$$J_{\mathfrak{M}'}(M) = M^{\frac{2}{11} r_1 - 1} \sum_{u_1, u_{s+1} \in \mathscr{U}_1} \cdots \sum_{u_s, u_{2s} \in \mathscr{U}_s} \Psi_0(M, U(u_1, \dots u_{2s})) +$$

$$+ O\left((|\mathscr{U}_1| \dots |\mathscr{U}_s|)^2 M^{\frac{2}{11} r_1 - 1 - \frac{8}{121}} \right).$$

Так как особый интеграл ограничен, то получаем следующее равенство

$$J_{\mathfrak{M}'}(M) = O\left((|\mathscr{U}_1| \dots |\mathscr{U}_s|)^2 M^{\frac{2}{11} r_1 - 1} \right) + O\left((|\mathscr{U}_1| \dots |\mathscr{U}_s|)^2 M^{\frac{2}{11} r_1 - 1 - \frac{8}{121}} \right),$$

или

$$J_{\mathfrak{M}'}(M) = O\left((|\mathscr{U}_1| \dots |\mathscr{U}_s|)^2 M^{\frac{2}{11} r_1 - 1} \right).$$

Перейдем к оценке $J_{\mathfrak{m}'}(M)$. Вынесем максимум модуля тригонометрической суммы на втором классе за знак интеграла и распространим интегрирование на единичный отрезок, получим

$$|J_{\mathfrak{m}'}(M)| \leqslant \max_{\alpha\in\mathfrak{m}'} |S_0(\alpha)|^{2r_1} \int\limits_0^1 T_1(\alpha)^2 \dots T_s(\alpha)^2 d\alpha.$$

Интеграл в правой части равен числу решений уравнения (3), то есть не превосходит $|\mathscr{U}_1|\dots|\mathscr{U}_s|$. По лемме 11 имеем

$$\max_{\alpha\in\mathfrak{m}'} |S_0(\alpha)| \ll M^{\frac{1}{11}(1-\rho)},\ \rho = \frac{1}{7657}.$$

Отсюда получаем оценку

$$|J_{\mathfrak{m}'}(M)| \ll |\mathscr{U}_1|\dots|\mathscr{U}_s|\ M^{\frac{1}{11}(1-\rho)2r_1}.$$

Таким образом, для интеграла $J(M)$ получаем

$$J(M) = O\left((|\mathscr{U}_1|\dots|\mathscr{U}_s|)^2 M^{\frac{2}{11}r_1-1}\right) + O\left(|\mathscr{U}_1|\dots|\mathscr{U}_s|\ M^{\frac{2}{11}r_1-\frac{2}{11}\rho r_1}\right).$$

Возвращаясь к оценке $I_{\mathfrak{m}}(M)$, имеем

$$I_{\mathfrak{m}}(M) = O\left(\max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^{r_0}(|\mathscr{U}_1|\dots|\mathscr{U}_s|)^2 M^{\frac{2}{11}r_1-1}\right) + \\ + O\left(\max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |S(\alpha)|^{r_0}|\mathscr{U}_1|\dots|\mathscr{U}_s|\ M^{\frac{2}{11}r_1-\frac{2}{11}\rho r_1}\right).$$

По лемме 6 для любого B_0

$$\max_{\alpha\in\mathfrak{m}} |S(\alpha)| \ll \frac{M^{\frac{1}{11}}}{(\log M)^{B_0}}.$$

Отсюда

$$I_{\mathfrak{m}}(M) = O\left((|\mathscr{U}_1|\dots|\mathscr{U}_s|)^2 \frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^{B_0}}\right) + O\left(|\mathscr{U}_1|\dots|\mathscr{U}_s|\ \frac{M^{\frac{1}{11}r-\frac{2}{11}\rho r_1}}{(\log M)^{B_0}}\right).$$

Тогда для $I(M) = I_{\mathfrak{M}}(M) + I_{\mathfrak{m}}(M)$ получаем

$$I(M) \geqslant C_1\, (|\mathscr{U}_1|\dots|\mathscr{U}_s|)^2\ \frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r} - \\ - C_2(|\mathscr{U}_1|\dots|\mathscr{U}_s|)^2 \frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^{B_0}} - C_3|\mathscr{U}_1|\dots|\mathscr{U}_s|\ \frac{M^{\frac{1}{11}r-\frac{2}{11}\rho r_1}}{(\log M)^{B_0}}.$$

Выбирая B_0 достаточно большим так, чтобы $B_0 > r$, получаем

$$I(M) \geqslant C_1 \left(|\mathscr{U}_1| \dots |\mathscr{U}_s|\right)^2 \frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r} - C_2|\mathscr{U}_1| \dots |\mathscr{U}_s| \ \frac{M^{\frac{1}{11}r-\frac{2}{11}\rho r_1}}{(\log M)^r}. \tag{4}$$

Из оценки (1) имеем

$$C_3\frac{M^{1-(\frac{10}{11})^s}}{(\log M)^s} \leqslant |\mathscr{U}_1| \dots |\mathscr{U}_s| \leqslant C_4\frac{M^{1-(\frac{10}{11})^s}}{(\log M)^s}.$$

Подставляя эти оценки в (4), будем иметь

$$I(M) \geqslant C_1\frac{M^{2-2(\frac{10}{11})^s}}{(\log M)^{2s}}\frac{M^{\frac{1}{11}r-1}}{(\log M)^r} - C_2\frac{M^{1-(\frac{10}{11})^s}}{(\log M)^s}\frac{M^{\frac{1}{11}r-\frac{2}{11}\rho r_1}}{(\log M)^r}. \tag{5}$$

Для того, чтобы выполнялось неравенство $I(M) > 0$, достаточно чтобы в (5) первое слагаемое было по порядку больше второго, то есть, чтобы

$$2 - 2\Big(\frac{10}{11}\Big) + \frac{1}{11}r - 1 > 1 - \Big(\frac{10}{11}\Big)^s + \frac{1}{11}r - \frac{2}{11}\rho r_1,$$

или

$$s > \frac{\log(\frac{2}{11}\rho r_1)}{\log(\frac{10}{11})}.$$

Значения параметров r_1, s, при которых выполняется последнее неравенство, составляют

$$s \geqslant 80, \quad r_1 \geqslant 21$$

или

$$s \geqslant 80,$$
$$r \geqslant \begin{cases} 43, & \text{если } r \equiv 1 \pmod 2, \\ 44, & \text{если } r \equiv 0 \pmod 2). \end{cases}$$

При этом выполняется оценка снизу

$$I(M) = I(M, r, s) \geqslant C\frac{M^{\frac{1}{11}r+1-\eta}}{(\log M)^{r+2s}},$$

где $\eta = 2(\frac{10}{11})^{80}$. Имеем также оценку сверху

$$I(M) = I(M, r, s) \leqslant C\frac{M^{\frac{1}{11}r+1-\eta}}{(\log M)^{r+2s}}.$$

Таким образом, полагая $s = 80$, при $r \geqslant 43$ имеем

$$C_1\frac{M^{\frac{1}{11}r+1-\eta}}{(\log M)^{r+160}} \leqslant I(M) \leqslant C_2\frac{M^{\frac{1}{11}r+1-\eta}}{(\log M)^{r+160}}, \tag{6}$$

Рассмотрим уравнение (6) при $r = 44$. Пусть $I'(M)$ — число решений этого уравнения, а $I''(M)$ — число таких решений, что по крайней мере одно $p_{j_0} \in \mathscr{P}'$. Для $I'(M)$ из (6) при $r = 44$ получаем оценку снизу

$$I'(M) \geqslant C \frac{M^{\frac{55}{11}-\eta}}{(\log M)^{204}}.$$

А для $I''(M)$ из (6) при $r = 43$ и леммы 1 получаем оценку сверху

$$I''(M) \leqslant C|\mathscr{P}'| \frac{M^{\frac{54}{11}-\eta}}{(\log M)^{203}} \ll \frac{M^{\frac{55}{11}-\eta-\frac{1}{132}}}{(\log M)^{203}}.$$

Таким образом $I'(M) > I''(M)$, и уравнение

$$p_1^{11} + \dots + p_{44}^{11} + u_1^{11} + \dots + u_{160}^{11} = M,$$

разрешимо в числах $p_1, \dots, p_{44}, u_1 \dots, u_{160} \in \mathscr{P} \setminus \mathscr{P}'$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству основного результата.

Доказательство теоремы 1. Будем следовать схеме доказательства работы [3]. Из лемм 2, 12 получаем, что для достаточно большого четного M

$$M = \sum_{i=1}^{204} p_i^{11} = \sum_{i=1}^{204} \Big(\sum_{j=1}^{6} \tau(p'_{ij} p_i) - \sum_{j=7}^{11} \tau(p'_{ij} p_i) - \tau(p_i^2) \Big),$$

где $p_i \in \mathscr{P} \setminus \mathscr{P}'$, $1 \leqslant i \leqslant 204$, $p'_{ij} \in \mathscr{P}'$, $1 \leqslant i \leqslant 204$, $1 \leqslant j \leqslant 11$, или

$$M = \sum_{i=1}^{1224} \tau(n_i) - \sum_{j=1}^{1224} \tau(m_j), \tag{7}$$

причем из условий на p_i, p'_{ij} имеем $n_i, m_j \leqslant M^{\frac{2}{11}}$, $(n_i m_j, 23!) = 1$. Здесь $1224 = 204 \times 6$.

Умножая уравнение (7) на -1, получим аналогичное представление для $-M$. Заменяя M на $M - \tau(1)$ или $M - \tau(29)$, получим что любое целое число M с достаточно большим $|M|$ может быть представлено в виде

$$M = \sum_{i=1}^{1224} \tau(n_i) - \sum_{i=1}^{1225} \tau(m_i), \tag{8}$$

где $n_i, m_j \leqslant |M|^{\frac{2}{11}} + 1$, $(n_i m_j, 23!) = 1$. Известно, что

$$-\tau(12) = 370944 = \tau(27) + \tau(55) + \tau(69) + \tau(90) + \tau(105)$$

[3]. Умножим (8) на $-\tau(12)$, из мультипликативности и условий на n_i, m_j получим

$$370944M = \sum_{i=1}^{7345} \tau(n_i), \tag{9}$$

где $n_i \leqslant 106|M|^{\frac{2}{11}} + 1$. Здесь $7345 = 1224 \times 5 + 1225$.

Пусть K — произвольное целое число с достаточно большим модулем. По лемме 3 найдутся числа $a_1, \dots a_{198} \leqslant 105$ такие, что

$$K \equiv \sum_{i=1}^{198} \tau(a_i) \pmod{370944}.$$

Следовательно, из (9) имеем

$$K = \sum_{i=1}^{198} \tau(a_i) + 370944M = \sum_{i=1}^{7543} \tau(n_i),$$

где число 7543 получается как $198 + 7345$, причем

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant 7543} n_i \ll |K|^{\frac{2}{11}}.$$

Таким образом, существует целое положительное число K_0 такое, что для любого целого K, $|K| \geqslant K_0$ уравнение

$$K = \sum_{i=1}^{7543} \tau(n_i)$$

имеет решение.

Пусть N — произвольное целое число. Если $|N| > K_0$, то $|N - \tau(1)| \geqslant K_0$ и число $N - \tau(1)$ представимо суммой 7543 значений $\tau(n)$ при $n \ll |N|^{\frac{2}{11}}$. В этом случае теорема доказана.

Пусть $|N| \leqslant K_0$. Существует n_0 такое, что $|\tau(n_0)| > 2K_0$. Тогда $|N - \tau(n_0)| > K_0$, и $K - \tau(n_0)$ представимо суммой 7543 значений $\tau(n)$ при $n \ll 1$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ramanujan S. On certain arithmetical functions // Trans. Cambridge Philos. Soc. 1916. V. 22. no. 9. P. 159–184.

[2] Iwaniec H. Topics in classical automorphic forms. Grad. Stud. Math., Amer. Math. Soc. Providence, RI. 1997.

[3] Гараев М.З., Гарсиа В.С., Конягин С.В. Проблема Варинга с τ-функцией Рамануджана // Изв. РАН. Сер. матем. 2008. Т. 72. вып.1. С. 39–50.

[4] Garaev M.Z., Garcia V.C., Konyagin S.V. The Waring problem with the Ramanujan τ-function. II // Canad. Math. Bull, 2009. V. 52. no. 2. P. 195–199.

[5] Снурницын П.В. О базисных свойствах τ-функции Рамануджана // Матем. заметки. 2011. Т. 90. вып. 5. С. 736–743.

[6] Снурницын П.В. О представимости целых чисел значениями функции Рамануджана // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2011. Т. 6. С. 49–52.

[7] Deligne P. La conjecture de Weil. I // Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci. 1974. V. 43. P. 273–307.

[8] Хуа Ло-Кен. Аддитивная теория простых чисел // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1947. Т. 22. Изд-во АН СССР. М.–Л. С. 3–179.

[9] Виноградов И.М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1980.

[10] Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.

Московский педагогический государственный университет
Поступило 23.12.2011