A. A. Osinovskaya, Weyl submodules in the restrictions of representations of simple algebraic groups to subgroups $SL_2(K)$, *Tr. Inst. Mat.*, 2023, Volume 31, Number 2, 57–62

Национальная академия наук Беларуси
Труды Института математики. 2023. Том 31. № 2. С. 57–62

УДК 512.554.32

ПОДМОДУЛИ ВЕЙЛЯ В ОГРАНИЧЕНИЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПРОСТЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП НА ПОДГРУППЫ $SL_2(K)$

А. А. Осиновская

Институт математики НАН Беларуси
e-mail: anna@im.bas-net.by
Поступила 23.11.2023

При некоторых ограничениях найдены подмодули Вейля с малыми старшими весами в ограничениях неприводимых представлений простых алгебраических групп на подсистемные подгруппы типа A_1 над полем положительной характеристики.

В работе исследовались подмодули Вейля в ограничениях неприводимых модулярных представлений простых алгебраических групп.

На проблему нахождения подмодулей Вейля в таких ограничениях обратил внимание В. Щиголев, который в работах [1] и [2] нашел условие, при котором некоторые подмодули Вейля могут быть вложены в ограничения простых модулей специальной линейной группы. Однако пока известно очень мало о подмодулях Вейля в ограничениях даже на «малые» подгруппы. В то же время их наличие может быть полезным при нахождении правил ветвления представлений, а также при исследовании структуры унипотентных элементов в таких представлениях и распознавания представлений по наличию особых элементов.

Напомним вначале необходимые обозначения и определения.

Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$; G – простая односвязная алгебраическая группа над K ранга $r \geqslant 2$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ – базис системы корней группы G относительно фиксированного максимального тора $T \subset G$ и подгруппы Бореля $B \supset T$; $\omega_1, \ldots, \omega_r$ – соответствующие этому базису фундаментальные веса; $L(\omega)$ – неприводимый модуль группы G со старшим весом $\omega = a_1\omega_1 + \ldots + a_r\omega_r$, в котором реализуется неприводимое представление φ; $V(\omega)$ – модуль Вейля для веса ω; $M|S$ – ограничение G-модуля M на подгруппу $S \subset G$. Вес ω называется p-ограниченным, если все $a_i < p$ при $1 \leqslant i \leqslant r$.

Подгруппа группы G называется подсистемной, если она порождается всеми корневыми подгруппами группы G, связанными с определенной подсистемой ее системы корней. Если $\beta_1, \ldots, \beta_s$ – базис такой подсистемы, обозначим эту подгруппу символом $G(\beta_1, \ldots, \beta_s)$. Положим $G(i_1, \ldots, i_s) = G(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s})$.

Далее $H \subset G$ – подсистемная подгруппа типа A_1. Если в системе корней группы есть корни двух разных длин, то H может соответствовать длинному или короткому корню. В таких случаях мы называем H длинной или короткой соответственно. Все подгруппы одной длины сопряжены в G. Можно взять, например, $H = G(1)$ для $G = A_r(K)$. Множество весов подгруппы H может быть отождествлено со множеством целых чисел с помощью отображения $x\omega_1 \mapsto x$, а множество всех доминантных весов такой подгруппы – со множеством $\mathbb{N}$ неотрицательных целых чисел. Пусть $\alpha_{\max}$ – максимальный корень той же длины, что и корень, которому соответствует H и $a = \langle \omega, \alpha_{\max} \rangle$ – значение веса ω на $\alpha_{\max}$. Величины $\alpha_{\max}$ и a для всех типов простых алгебраических групп приведены в таблицах 1 и 2.

Лемма 1 [3, лемма 2]. *Пусть $V(x)$ – модуль Вейля подгруппы H, $x < 3p - 1$.*

(i) *Если $x \leqslant p - 1$ или $x = 2p - 1$, то $V(x) \cong L(x)$.*

(ii) *Если* $p \leqslant x < 2p-1$, *то* $V(x)$ *имеет два композиционных фактора:*

$$L(x) \quad \textit{и} \quad L(2p-x-2) \cong V(2p-x-2).$$

(iii) *Если* $2p \leqslant x < 3p-1$, *то* $V(x)$ *имеет два композиционных фактора:*

$$L(x) \quad \textit{и} \quad L(4p-x-2) \cong V(4p-x-2)/L(x-2p) \ \textit{при}\ p > 2,$$

и три композиционных фактора:

$$L(x), L(4p-x-2) \cong V(4p-x-2)/L(x-2p) \quad \textit{и} \quad L(x-2p) \cong V(x-2p) \ \textit{при}\ p = 2.$$

Все факторы имеют кратность 1.

Таблица 1. Максимальный корень $\alpha_{\max}$

Тип	Длинный корень	Короткий корень
A_r	$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r$	
B_r	$\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+2\alpha_r$	$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r$
C_r	$2\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+2\alpha_{r-1}+\alpha_r$	$\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+2\alpha_{r-1}+\alpha_r$
D_r	$\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+2\alpha_{r-2}+\alpha_{r-1}+\alpha_r$	
E_6	$\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6$	
E_7	$2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+3\alpha_5+2\alpha_6+\alpha_7$	
E_8	$2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+6\alpha_4+5\alpha_5+4\alpha_6+3\alpha_7+2\alpha_8$	
F_4	$2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4$	$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4$
G_2	$3\alpha_1+2\alpha_2$	$2\alpha_1+\alpha_2$

Таблица 2. Значение $a = \langle \omega, \alpha_{\max} \rangle$

Тип	Длинный корень	Короткий корень
A_r	$a_1+a_2+\ldots+a_r$	
B_r	$a_1+2a_2+\ldots+2a_{r-1}+a_r$	$2a_1+2a_2+\ldots+2a_{r-1}+a_r$
C_r	$a_1+a_2+\ldots+a_r$	$a_1+2a_2+\ldots+2a_{r-1}+2a_r$
D_r	$a_1+2a_2+\ldots+2a_{r-2}+a_{r-1}+a_r$	
E_6	$a_1+2a_2+2a_3+3a_4+2a_5+a_6$	
E_7	$2a_1+2a_2+3a_3+4a_4+3a_5+2a_6+a_7$	
E_8	$2a_1+3a_2+4a_3+6a_4+5a_5+4a_6+3a_7+2a_8$	
F_4	$2a_1+3a_2+2a_3+a_4$	$2a_1+4a_2+3a_3+2a_4$
G_2	a_1+2a_2	$2a_1+3a_2$

Замечание 1. Фактически, при $p=2$ в пункте (iii) есть только один случай, $x=4$, и факторы $L(4)$, $L(2)$ и $L(0)$.

Для некоторого весового вектора v из G-модуля V символ $\omega(v)$ обозначает его вес, а для веса μ группы G символ $\mu|S$ означает его ограничение на S.

Лемма 2. *Если* ω *– доминантный вес группы* G *и подмодуль* $V(x)$ *содержится в ограничении* $L(\omega)|H$, *то* $0 \leqslant x \leqslant a$.

Доказательство. Поскольку все подгруппы H, соответствующие корням одной длины, изоморфны, мы можем считать, что $H = G(\alpha_{\max})$.

Произвольный вес λ модуля $L(\omega)$ группы G имеет вид $\lambda = \omega - \sum\limits_{i=1}^{r} b_i\alpha_i$, где b_i – неотрицательные целые числа (см. [4, теорема 39]). Ограничивая вес на подгруппу H, получаем, что $\lambda|H = \langle \lambda, \alpha_{\max} \rangle = a - \sum\limits_{i=1}^{r} b_i \langle \alpha_i, \alpha_{\max} \rangle$. Все $\langle \alpha_i, \alpha_{\max} \rangle \geqslant 0$. Это следует из максимальности корня $\alpha_{\max}$. Действительно, согласно следствию теоремы 1 из § 1 главы VI [5], если $\langle \alpha_i, \alpha_{\max} \rangle < 0$, то $\alpha_i + \alpha_{\max}$ является корнем, что невозможно. Поэтому $\lambda|H \leqslant a$, а значит, $x \leqslant a$ для любого подмодуля $V(x)$ в этом ограничении. $\square$

Лемма 3. *Пусть $G = A_2(K)$ и вес ω является p-ограниченным.*

(i) *Если $a_1 + a_2 + 2 \leqslant p$, или $a_1 + 1 = p$, или $a_2 + 1 = p$, то $V(\omega) \cong L(\omega)$.*

(ii) *В противном случае $L(\omega) \cong V(\omega)/V(\omega')$, где $\omega' = \omega - (a_1 + a_2 + 2 - p)(\alpha_1 + \alpha_2)$ и $V(\omega') \cong L(\omega')$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из [6, часть II, предложение 8.19]. □

Зафиксируем вектор старшего веса v^+ в модуле $L(\omega)$.

Лемма 4 [7]. *Пусть $S = G(i_1, \ldots, i_k)$ – некоторая подсистемная подгруппа группы G. Тогда $KSv^+ \cong L(\omega|S)$ – подмодуль в ограничении $L(\omega)|S$.*

Нам понадобится действие гипералгебры $\mathscr{U}$ группы G на модуле $L(\omega)$, оно вводится следующим образом. Пусть Φ – система корней группы G, $\mathscr{L}$ – простая алгебра Ли над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с системой корней Φ. Для корней $\alpha \in \Phi$ определим корневые элементы $X_\alpha \in \mathscr{L}$ (см. [4, § 1]).

Как в теореме 2 из [4], обозначим через $\mathscr{U}_\mathbb{Z}$ подкольцо универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли $\mathscr{L}$, порожденное элементами $X_\alpha^k/k!$, где $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \Phi$. Гипералгебра группы G – это тензорное произведение $\mathscr{U} = \mathscr{U}_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} K$. Элементы $X_{\alpha,k} = (X_\alpha^k/k!) \otimes 1_K$ порождают $\mathscr{U}$ как K-алгебру. Каждый рациональный G-модуль V можно превратить в $\mathscr{U}$-модуль по правилу

$$x_\alpha(t)v = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k X_{\alpha,k} v,$$

где $x_\alpha(t) \in G$ для $\alpha \in \Phi$ и $t \in K$ – корневой элемент группы G. Будем сокращенно писать $X_\alpha = X_{\alpha,1} \in \mathscr{U}$ (это не внесет путаницу, поскольку мы все время работаем с группой G и ее гипералгеброй $\mathscr{U}$, а не с комплексной алгеброй Ли $\mathscr{L}$). Если $\alpha = \pm\alpha_i$, то используются обозначения $X_{\pm i,k}$ и $X_{\pm i}$.

Вектор v некоторого G-модуля V называется примитивным относительно подсистемной подгруппы $S \subset G$, если v – ненулевой весовой вектор и все корневые элементы для положительных корней α из системы корней подгруппы S оставляют v на месте.

Введем серию примитивных векторов, которая нам понадобится при доказательстве. Пусть $1 \leqslant i, j \leqslant r$ и все корни α_t с индексом t в интервале с концами i и j образуют цепь на диаграмме Дынкина. Положим $b_k = -\langle \alpha_{k+1}, \alpha_k \rangle$ и $c_k = \langle \alpha_{k-1}, \alpha_k \rangle$. Для целого числа d в интервале $0 < d \leqslant a_j$ определим вектор $v(i, j, d)$ следующим образом. Положим $d_j = d$. Если $i < j$, положим $d_k = a_k + d_{k+1} b_k$ для $i \leqslant k < j$. Если $i > j$, положим $d_k = a_k + d_{k-1} c_k$ для $i \geqslant k > j$. Теперь обозначим

$$v(i, j, d) = X_{-i,d_i} \ldots X_{-k,d_k} \ldots X_{-j,d} v^+.$$

При $i = j$ положим $v(i, j, d) = X_{-j,d} v^+$. Тогда вектор $v(i, j, d)$ примитивен относительно подгруппы $G(1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, r)$ согласно лемме 2.46 из [8].

Лемма 5. *Пусть $G = A_2(K)$ и вес ω является p-ограниченным. Тогда если*

$$a_1 + 1, a_2 + 1 < p < a_1 + a_2 + 2,$$

то в ограничении $L(\omega)|H$ есть только подмодули Вейля $V(x)$ со старшими весами

$$\min\{p - a_1 - 1, p - a_2 - 1\} \leqslant x \leqslant a_1 + a_2.$$

В остальных случаях есть все подмодули Вейля $V(x)$ для $0 \leqslant x \leqslant a_1 + a_2$.

Доказательство. Из [9] известно, что при $a_1 + 1, a_2 + 1 < p < a_1 + a_2 + 2$ ограничение $L(\omega)|H$ не содержит неприводимых композиционных факторов $L(x)$ со старшими весами $0 \leqslant x \leqslant \min\{p - a_1 - 2, p - a_2 - 2\}$. Следовательно, это ограничение не может содержать и подмодули Вейля $V(x) \cong L(x)$ с такими старшими весами. Построим теперь другие подмодули Вейля. Поскольку по лемме 1, $L(a_1) \cong V(a_1)$, то из теоремы A (ii) [2] для

$H = G(1)$ вытекает, что H-подмодуль модуля $L(\omega)|H$, порожденный вектором $X_{-2,k}v^+$, $0 \leqslant k \leqslant a_2$, изоморфен модулю Вейля $V(a_1+k)$. Аналогично, используя теорему A (i) из [2] и $H = G(2)$, получаем подмодули Вейля $V(a_2+m)$, $0 \leqslant m \leqslant a_1$. Таким образом, при $a_1a_2 = 0$ лемма доказана.

Предположим, что $a_1a_2 \neq 0$ и будем искать в ограничении малые подмодули Вейля. Положим $H = G(1)$.

Пусть сначала $a_1+a_2+2 \leqslant p$, или $a_1+1 = p$, или $a_2+1 = p$. Тогда по лемме 3 (i), $L(\omega) \cong V(\omega)$. Согласно лемме 6 из [3], существуют примитивные относительно H векторы $v(k) \in V(\omega), 0 \leqslant k \leqslant a_1$, с весами $\omega(v(k)) = \omega - k(\alpha_1+\alpha_2)$. Имеем $\omega(v(k))|H = a_1 - k$. Таким образом, используя лемму 1 (i), получаем, что $KHv(k) = L(a_1-k) \cong V(a_1-k)$ является подмодулем ограничения $L(\omega)|H$.

Теперь пусть $a_1+1, a_2+1 < p < a_1+a_2+2$. По лемме 3 (ii),

$$L(\omega) \cong V(\omega)/V(\omega - (a_1+a_2+2-p)(\alpha_1+\alpha_2)).$$

Отсюда следует, что вышеприведенные примитивные векторы $v(k) \in L(\omega)$ при $0 \leqslant k \leqslant$ $\leqslant a_1+a_2+1-p$. Применяя лемму 1 (i), получаем, что $KHv(k) = L(a_1-k) \cong V(a_1-k)$ является подмодулем ограничения $L(\omega)|H$, где

$$p - a_2 - 1 \leqslant a_1 - k \leqslant a_1.$$

Аналогичным образом, рассматривая $H = G(2)$ вместо $G(1)$, получаем подмодули $V(x)$ со старшими весами $p - a_1 - 1 \leqslant x \leqslant a_2$. □

Лемма 6. *Пусть $G = B_3(K)$, $C_3(K)$ или $F_4(K)$, подгруппа H длинная в случае $G =$ $= B_3(K)$ и короткая в случае $G = C_3(K)$, и вес ω является p-ограниченным. Тогда в ограничении $L(\omega)|H$ есть все подмодули Вейля $V(x)$ со старшими весами $0 \leqslant x \leqslant a_1+a_2$ ($0 \leqslant x \leqslant a_3+a_4$, если $G = F_4(K)$ и подгруппа H короткая).*

Доказательство.

1. Предположим сначала, что $G = B_3(K)$. Положим

$$S = G(1,2) \text{ и } \lambda = \omega|S = a_1\omega_1 + a_2\omega_2.$$

Мы можем считать, что $H = G(2) \subset S$.

Пусть $a_1+a_2+2 \leqslant p$, или $a_1+1 = p$, или $a_2+1 = p$. Тогда по лемме 4, $KSv^+ \cong L(\lambda)$ – подмодуль в $L(\omega)|S$. Применяя теперь лемму 5, получаем в ограничении $L(\lambda)|H$ подмодули Вейля со старшими весами $V(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a_1+a_2$.

Теперь пусть $a_2+a_3+2 > p$, тогда существует целое число k, $0 \leqslant k \leqslant a_3$, такое, что $a_2+k = p-1$. Положим $v = X_{-3,k}v^+$, $\mu = \omega(v)|S = a_1\omega_1 + (p-1)\omega_2$, $M = KSv$ – подмодуль в ограничении $L(\omega)|S$. Тогда согласно лемме 3 (i) $L(\mu) \cong V(\mu) \cong M$. Из леммы 5 получаем подмодули Вейля со старшими весами $V(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a_1+p-1$, в ограничении $M|H$.

Следовательно, можно считать, что $a_1+1 < p < a_1+a_2+2$ и $a_2+a_3+2 \leqslant p$. Положим $S_2 = G(2,3)$, $H \subset S_2$. Из леммы 2.46 в [8] вытекает, что для $0 \leqslant i \leqslant a_2$ вектор

$$v_2(i) = v(3,2,i) = X_{-3,2i+a_3}X_{-2,i}v^+$$

примитивен относительно подгруппы S_2. Его вес относительно S_2 равен

$$\omega(v_2(i))|S_2 = (a_1+i)\omega_1 + (a_2+a_3)\omega_2.$$

Из наших условий следует, что существует целое число i_0 такое, что $(a_1+i_0) = p-1$. Модуль $N = KSv_2(i_0)$ является подмодулем ограничения $L(\omega)|S_2$ и порождается вектором $v_2(i_0)$ старшего веса $\nu = \omega(v_2(i_0))|S_2$. По лемме 3 (i), $L(\nu) \cong V(\nu)$, а значит, модуль $N \cong$ $\cong L(\nu)$. Ограничивая этот подмодуль в свою очередь на подгруппу H и используя лемму 5, получаем подмодули Вейля со старшими весами $V(x)$,

$$0 \leqslant x \leqslant a_1+i_0+a_2+a_3,$$

т. е. все недостающие.

2. Пусть $G = C_3(K)$. Рассуждаем по той же схеме, что и в пункте 1. Положим $S = G(1,2)$, $H = G(2)$ и $\lambda = \omega|S = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$. По лемме 4, $KSv^+ \cong L(\lambda)$ – подмодуль $L(\omega)|S$.

Если $a_1 + a_2 + 2 \leqslant p$, или $a_1 + 1 = p$, или $a_2 + 1 = p$, то по лемме 5 в ограничении $L(\lambda)|H$ есть подмодули Вейля со старшими весами $V(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a_1 + a_2$.

Значит, можно считать, что $a_1 + 1, a_2 + 1 < p < a_1 + a_2 + 2$. Из леммы 5 следует, что в ограничении $L(\lambda)|H$ есть подмодули Вейля со старшими весами $V(x)$, $\min\{p - a_1 - 1, p - a_2 - 1\} \leqslant x \leqslant a_1 + a_2$. Найдем подмодули Вейля с малыми весами.

Предположим сначала, что $a_2 + 2a_3 + 2 > p$. Определим вектор $v = X_{-3,k}v^+$, $0 \leqslant k \leqslant a_3$, и положим $\mu = \omega(v)|S = a_1\omega_1 + (a_2 + 2k)\omega_2$, $M = KSv$. Тогда M будет подмодулем в ограничении $L(\omega)|S$. Из нашего условия следует, что мы можем выбрать число k_0, такое что $a_2 + 2k_0 = p - 1$ или $p - 2$. Если $a_2 + 2k_0 = p - 1$, то согласно лемме 3 (i) $L(\mu) \cong V(\mu) \cong M$. По лемме 5 получаем подмодули Вейля со старшими весами $V(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a_1 + p - 1$, в ограничении $M|H$. Пусть теперь $a_2 + 2k_0 = p - 2$. Согласно лемме 2.13 из [6] и лемме 3 модуль M – это $L(\mu)$ либо $V(\mu)$. Положим на время $H = G(1)$. В обоих случаях по лемме 6 из [3], существуют примитивные относительно H векторы $v(i) \in M$, $0 \leqslant i \leqslant a_1 - 1$, с весами $\omega(v(i))|S = \mu - i(\alpha_1 + \alpha_2)$. Имеем $\omega(v(i))|H = a_1 - i$. По лемме 1 (i) порожденные ими подмодули будут подмодулями Вейля. Значит, нам осталось найти только подмодуль $V(0)$. Снова пусть $H = G(2)$. Взяв $k = k_0 + 1$, получаем $\mu = a_1\omega_1 + p\omega_2$. По теореме Стейнберга [4] $L(\mu) = L(a_1\omega_1) \otimes L(\omega_2)^p$. Используя лемму 5, находим в S-модуле $L(a_1\omega_1)$ подмодуль $V(0) \cong L(0)$, который очевидно порождается примитивным относительно H вектором v_1 со старшим весом 0. Аналогично в $L(\omega_2)$ находим примитивный вектор v_2 со старшим весом 0. Тогда $v = v_1 \otimes v_2^p \in M$ – примитивный относительно H вектор со старшим весом 0. Он порождает подмодуль $V(0) \cong L(0)$ ограничения $M|H$.

Следовательно, остается случай $a_1 + 1 < p < a_1 + a_2 + 2$ и $a_2 + 2a_3 + 2 \leqslant p$. Положим $v = X_{-3,a_3}v^+$, $\mu = \omega(v) = a_1\omega_1 + (a_2 + a_3)\omega_2$, $M = KSv$. Тогда M будет подмодулем в ограничении $L(\omega)|S$. Применяя лемму 2.13 из [6] и лемму 3, получаем, что модуль M – это $L(\mu)$ либо $V(\mu)$. Как и в пункте 1, обозначим $S_2 = G(2,3)$. Из леммы 2.46 в [8] вытекает, что для $0 \leqslant i \leqslant a_2$ вектор

$$v_2(i) = v(3,2,i) = X_{-3,i+a_3}X_{-2,i}v^+$$

примитивен относительно подгруппы S_2. Его вес равен

$$\omega(v_2(i))|S_2 = (a_1 + i)\omega_1 + (a_2 + 2a_3)\omega_2.$$

Из наших условий следует, что существует целое число i_0 такое, что $(a_1 + i_0) = p - 1$. Модуль $N = KSv_2(i_0)$ является подмодулем ограничения $L(\omega)|S$ и порождается вектором старшего веса $\nu = \omega(v_2(i_0))$. По лемме 3 (i), $L(\nu) \cong V(\nu)$, а значит, модуль $N \cong L(\nu)$. Ограничивая этот подмодуль в свою очередь на подгруппу H и используя лемму 5, получаем подмодули Вейля со старшими весами $V(x)$, $0 \leqslant x \leqslant a_1 + i_0 + a_2 + 2a_3$, т. е. все недостающие.

3. Наконец, пусть $G = F_4(K)$. Полагая $S = G(1,2,3) \cong B_3(K)$ и рассматривая S-модуль KSv, из леммы 4 и пункта 1 получаем искомое, если подгруппа H длинная. Если же H короткая, то положим $S' = G(2,3,4) \cong C_3(K)$ и воспользуемся пунктом 2. □

Теорема 1. *Пусть $G \neq F_4(K)$ – простая односвязная алгебраическая группа, ранг группы $r \geqslant 3$ при $G = A_r(K)$, $r \geqslant 4$ в остальных случаях, и вес ω является p-ограниченным. Также предположим, что подгруппа H длинная в случае $G = B_r(K)$ и короткая, в случае $G = C_r(K)$. Тогда в ограничении $L(\omega)|H$ есть все подмодули Вейля $V(x)$ со старшими весами $0 \leqslant x \leqslant b$, где*

$$b = \max\{a_i + a_j + a_k\}.$$

Здесь максимум берется по всем таким индексам i, j, k, что подгруппа $G(i,j,k) \cong A_3(K)$.

Доказательство. Рассмотрим случай $G = A_3(K)$. Положим $S_1 = G(1,2)$ и $S_2 = G(2,3)$, $\lambda = \omega|S_1 = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ и $\mu = \omega|S_2 = a_2\omega_1 + a_3\omega_2$. Мы можем считать, что $H = G(2) \subset S_i$ для $i = 1$ и 2.

Пусть сначала $a_1 + a_2 + 2 \leqslant p$. Тогда по лемме 3 (i), $L(\lambda) \cong V(\lambda)$. Поэтому из теоремы A (ii) в [2] следует, что S_1-подмодуль модуля $L(\omega)|S_1$, порожденный вектором $X_{-3,a_3}v^+$, изоморфен модулю Вейля $V(a_1\omega_1 + (a_2+a_3)\omega_2)$. Ограничивая последний модуль Вейля на H, получаем искомые подмодули Вейля $V(x)$ со старшими весами $0 \leqslant x \leqslant a = b$.

Если же $a_2 + a_3 + 2 \leqslant p$, то рассуждая аналогично для подгруппы S_2 и используя теперь теорему A (i) из [2], снова в ограничении $L(\omega)|H$ находим подмодули Вейля $V(x)$ со старшими весами $0 \leqslant x \leqslant a = b$.

Следовательно, можно считать, что $a_1 + a_2 + 2 > p$ и $a_2 + a_3 + 2 > p$. Тогда существует целое число k, $0 \leqslant k \leqslant a_3$, такое, что $a_2 + k = p - 1$. Снова, воспользовавшись теоремой A (ii) из [2], получаем, что S_1-подмодуль модуля $L(\omega)|S_1$, порожденный вектором $X_{-3,a_3}v^+$, изоморфен модулю Вейля $V(a_1\omega_1 + (a_2+a_3)\omega_2)$. Теорема для $G = A_3(K)$ доказана.

Теперь, применяя лемму 4 к подгруппе $G(i,j,k)$, получаем искомое для остальных групп. □

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф23-050).

Литература

1. *Shchigolev V.* A local criterion for Weyl modules for groups of type A // Journal of Pure and Applied Algebra. 2009. Vol. 213, N 9. P. 1681–1701.
2. *Shchigolev V.* Weyl submodules in restrictions of simple modules // J. Algebra. 2009. Vol. 321. P. 1453–1462.
3. *Osinovskaya A. A.* The restrictions of representations of special linear groups to subsystem subgroups of type $A_1 \times A_1$ // Тр. Ин-та математики. 2021. Т. 29, № 1–2. С. 175–187.
4. *Стейнберг Р.* Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.
5. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли, гл. IV–VI. М.: Мир, 1972.
6. *Jantzen J. C.* Representations of Algebraic Groups. Second edition. Providence: Amer. Math. Soc., 2003.
7. *Smith S.* Irreducible modules and parabolic subgroups // J. Algebra. 1982. Vol. 75. P. 286–289.
8. *Suprunenko I. D.* The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic // Memoirs of the AMS. 2009. Vol. 200, N 939.
9. *Osinovskaya A. A.* Restrictions of irreducible representations of classical algebraic groups to root A_1-subgroups // Commun. in Algebra. 2003. Vol. 31, N 5. P. 2357–2379.

A. A. Osinovskaya

Weyl submodules in the restrictions of representations of simple algebraic groups to subgroups $SL_2(K)$

Summary

Under certain restrictions, Weyl submodules with small highest weights in the restrictions of irreducible representations of simple algebraic groups to subsystem subgroups of type A_1 over a field of positive characteristic are found.