Ю. И. Волков, О монотонности последовательностей линейных положительных операторов, порожденных мерами, *Матем. заметки*, 1985, том 38, выпуск 5, 658–664

https://www.mathnet.ru/mzm5577

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 38, № 5 (1985)

О МОНОТОННОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДЕННЫХ МЕРАМИ

Ю. И. Волков

В настоящей работе продолжается изучение многомерных положительных операторов, порожденных мерами [1]. Говорят, что последовательность линейных положительных операторов (л.п.о.) обладает свойством монотонности, если последовательность их значений на выпуклых функциях монотонна. В одномерном случае многие последовательности л.п.о. обладают свойством монотонности. Например, для многочленов Бернштейна такое свойство было установлено О. Араме [2] (см. также [3, 4]). Здесь устанавливается, что многомерные л.п.о., порожденные мерами, обладают свойством монотонности.

Пусть $\mathbf{R}^m$ — m — мерное евклидово пространство, $\mathfrak{B}$ — σ — алгебра борелевских множеств в $\mathbf{R}^m$, μ — σ — конечная невырожденная мера, определенная на $\mathfrak{B}$, и для нее существует m-мерное двустороннее преобразование Лапласа (дв. п. Л), E — класс функций f, определенных и непрерывных на R^m таких, что $|f(t)| \leqslant M \exp(c\|t\|)$, $\forall t \in \mathbf{R}^m$, M, c — некоторые неотрицательные числа.

2 f
сф

Будем говорить, что последовательность $\{L_n(f;\ x)\}$ л.п.о., определенных на E, порождается мерой μ (принадлежит классу B), если

$$L_n(f,\ x) = \int f\left(\frac{t}{n}\right) \exp\left(-s(x)t' - n\ln u(s(x))\right) \mu^{*(n-1)}(\mathrm{d}t), \tag{1}$$

где $u(s) = \int e^{-st'} \mu(dt)$, $s \in S$, — некоторая область в $\mathbf{R}^m$, st' — скалярное произведение вектора s на вектор t (штрих здесь и далее обозначает операцию транспонирования) $s(x)$— отображение, обратное к отображению $x(s) = -\frac{d}{ds} \ln u(s)$ (существование $s(x)$ доказано [1, с. 439]), $x \in X = x(S)$, $\mu^{*0} = \mu$, $\mu^{*1} = \mu * \mu, \ldots$, $\mu^{*(n-1)}$ — $(n-1)$-кратная свертка меры μ.

Многие известные последовательности л.п.о. порождаются мерами. Таковы, например, последовательности многочленов Бернштейна, операторов Миракьяна — Саса, Баскакова (другие примеры см. [5]). В многомерном случае ограничимся таким примером: пусть мера μ сосредоточена в вершинах $a_0, a_1, \ldots, a_m$ невырожденного m-мерного симплекса T и имеет в них единичные массы. Такая мера порождает многочлены (будем их называть симплициальными многочленами Бернштейна)

$$B_n^{\Delta}(f;\ x) = \sum f\left(a_0 \frac{k_0}{n} + \ldots + a_m \frac{k_m}{n}\right) \frac{n!}{k_0! \ldots k_m!} \cdot (\beta_0(x))^{k_0} \ldots (\beta_m(x))^{k_m},$$

где суммирование производится по всем неотрицательным целочисленным решениям уравнения $k_0 + k_1 + \ldots + k_m = n$, $\beta_0(x), \beta_1(x), \ldots, \beta_m(x)$ — барицентрические координаты точки x относительно вершин симплекса T. В случае $m = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$,

$$B_n^{\Delta}(f;\ x) = B_n(f;\ x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

— обычные полиномы Бернштейна.

Отметим некоторые свойства операторов $L_n(f;\ x)$: $L_n(1;\ x) = 1$, $L_n(t;\ x) = x$, $L_n(t_i t_j;\ x) = x_i x_j + v_{ij}(x)/n$, $i, j = \overline{1, m}$, $v_{ij}(x)$ — элементы матрицы $V = \left(-\frac{ds}{dx}\right)^{-1}$.

Функции $L_n(f;\ x)$ являются аналитическими в X и

$$\frac{d}{dx} L_n(f;\ x) = nV^{-1}(x) L_n(f(t)(t-x)';\ x).$$

Эти свойства установлены в [1].

Оказывается, что последнее свойство — «характеристическое». Точнее, справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Пусть последовательность л.п.о. $\{L_n(f;\ x)\}$ вида $L_n(f;\ x) = \int f(t)\ Q_n(x)\ (\mathrm{d}t)$, $f \in E$, $x \in X$ — некоторая область в $\mathbf{R}^m$, обладает свойствами:*

1) $L_n(1;\ x) = 1\ \forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in X$;

2) *в области X функции $L_n(f;\ x)$ дифференцируемы;*

3) *существует симметричная положительно определенная матрица $W(x) = (w_{ij}(x))$, $i,\ j = \overline{1,\ m}$, такая, что*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L_n(f;\ x) = nW(x)\,L_n(f(t)(t-x)';\ x), \tag{2}$$

причем элементы матрицы $W(x)$ аналитичны в X и удовлетворяют условиям:

$$\frac{\partial w_{ki}(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial w_{kj}(x)}{\partial x_i}, \qquad i,\ j,\ k = \overline{1,\ m}. \tag{3}$$

Тогда существует мера μ, которая порождает последовательность $\{L_n(f;\ x)\}$.

Доказательство. Представим операторы $L_n(f;\ x)$ в виде

$$L_n(f;\ x) = \int f(t/n)\ \lambda_n(x)\ (\mathrm{d}t),$$

где $\lambda_n(x)(B) = Q_n(x)\ (n^{-1}B)\ \forall B \in \mathfrak{B}$, и рассмотрим функцию $\varphi_n(z,\ x) = L_n(\mathrm{e}^{-nzt'};\ x)$, z — любой комплексный вектор. $\varphi_n(z,\ x)$ — это дв. п. Л. меры $\lambda_n(x)$. В силу (2) эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + W(x)\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} + nW(x)\,x'\varphi_n = 0, \tag{4}$$

причем, ввиду условия теоремы,

$$\varphi_n(0,\ x) = 1 \qquad \forall x \in X. \tag{5}$$

Уравнение (4) при условии (5) имеет единственное решение, которое можно записать в виде

$$\varphi_n(z,\ x) = \exp\ (n\,(b\,(s\,(x)) - b\,(s\,(x) + z))), \tag{6}$$

где $s(x)$ — какое-либо решение уравнения $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = -W(x)$ (существует в силу (3)). А $b(s)$ — какое-либо решение уравнения $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}s} = x(s)$, где $x(s)$ — отображение, обратное к отображению $s(x)$ (существует, ибо матрица $W(x)$ — положительно определенная для всякого $x \in X$ и выполняются условия $\frac{\partial x_i}{\partial s_j} = \frac{\partial x_j}{\partial s_i}$, $i, j = \overline{1, m}$, в силу симметрии матрицы $W(x)$). То, что правая часть (6) удовлетворяет уравнению (4), проверяется непосредственно.

Рассмотрим далее меру

$$\mu(\mathrm{d}t) = \exp(s(x)t' - b(s(x)))\lambda_1(x)(\mathrm{d}t), \tag{7}$$

эта мера не зависит от x, ибо ее дв. п. Л. будет функция $\exp(-b(z))$. Мера μ порождает последовательность операторов $\Lambda_n(f; x) = \int f\left(\frac{t}{n}\right) q_n(x)(\mathrm{d}t)$, где $q_n(x)(\mathrm{d}t) = \exp(-s(x)t' + nb(s(x)))\,\mu^{*(n-1)}(\mathrm{d}t)$; дв. п. Л. меры q_n будет функция $\exp(n(b(s(x)) - b(z + s(x))))$, т. е. $\varphi_n(z, x)$, а в силу взаимно однозначного соответствия между мерами и их дв. п. Л. это означает, что $q_n = \lambda_n$, и, значит, $\Lambda_n(f; x) = L_n(f; x)$. Итак, мера μ, определенная при помощи соотношения (7),— искомая.

Следствие 1. *Пусть функция f r раз дифференцируема на $\mathbf{R}^m$ и для всякого ν, $|\nu| = r$ ($\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m)$ — мультииндекс, $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_m$), $f^{(\nu)} \in E$. Тогда, если выполняются условия теоремы* 1, *то*

$$\lim_{n\to\infty} (L_n(f; x))_x^{(\nu)} = f^{(\nu)}(x) \qquad \forall x \in X. \tag{8}$$

Действительно, в этом случае операторы $L_n(f; x)$ можно представить в виде (1), а поскольку функции $L_n(f; x)$ аналитичны в X, если $f \in E$, и

$$(L_n(f; x))_x^{(\nu)} = L_n^{(\nu)}(f; x) =$$
$$= \int f\left(\frac{t}{n}\right)(\exp(-s(x)t' - n\ln u(s(x))))_x^{(\nu)}\mu^{*(n-1)}(\mathrm{d}t),$$

то в силу теоремы 5.1 [1, с. 447] $\lim_{n\to\infty} L_n^{(\nu)}(f; x) = f^{(\nu)}(x)$ $\forall x \in X$.

Замечание. Условия теоремы 1 не являются необходимыми для выполнения соотношения (8). Действительно, рассмотрим последовательность функций Стеклова (в случае $m = 1$): $C_n(f; x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x + tn^{-1/2})\,\mathrm{d}t$. Если функция f r раз непрерывно дифференцируема на $\mathbf{R}$, то $C_n^{(r)}(f; x) \to f^{(r)}(x)$ $\forall x \in \mathbf{R}$, но последовательность л.п.о. $\{C_n(f; x)\}$ не порождается никакой мерой (функции $C_n(f; x)$ не аналитические, если f — не аналитическая).

ТЕОРЕМА 2. *Если функция $f \in E$ и выпукла на $\mathbf{R}^m$, то при каждом фиксированном $x \in X$ последовательность $\{L_n(f;\ x)\}$ не возрастает.*

Доказательство этой теоремы основывается на следующей лемме.

ЛЕММА. *Для любых натуральных n_1 и n_2 имеет место соотношение*

$$L_{n_1+n_2}(f;\ x) = L_{n_1}\left(L_{n_2}\left(f\left(\frac{n_1t^1 + n_2t^2}{n_1 + n_2}\right);\ x\right);\ x\right), \qquad (9)$$

где t^1 — связанная («немая») переменная для оператора L_{n_1}, а t^2 — для L_{n_2}.

Доказательство леммы.

$$L_{n_2}\left(f\left(\frac{n_1t^1 + n_2t^2}{n_1 + n_2}\right);\ x\right) =$$

$$= \int f\left(\frac{n_1t^1 + t^2}{n_1 + n_2}\right) \exp\left(-s(x)\,t^2 - n_2 \ln u(s(x))\right) \mu^{*(n_2-1)}(\mathrm{d}t^2).$$

Подействуем на это соотношение оператором L_{n_1}, получим, используя теорему Фубини и свойства свертки мер,

$$L_{n_1}\left(L_{n_2}\left(f\left(\frac{n_1t^1 + n_2t^2}{n_1 + n_2}\right);\ x\right);\ x\right) =$$

$$= \iint f\left(\frac{t^1 + t^2}{n_1 + n_2}\right) \exp\left(-s(x)\,(t^1 + t^2)' -\right.$$

$$\left.-(n_1 + n_2) \ln u(s(x))\right) \mu^{*(n_1-1)}(\mathrm{d}t^1)\, \mu^{*(n_2-1)}(\mathrm{d}t^2) =$$

$$= \int f\left(\frac{t}{n_1 + n_2}\right) \exp\left(-s(x)\,t' -\right.$$

$$\left.-(n_1 + n_2) \ln u(s(x))\right) \mu^{*(n_1+n_2-1)}(\mathrm{d}t) = L_{n_1+n_2}(f;\ x).$$

Доказательство теоремы 2. Для этого нужно доказать неравенство

$$L_{n+1}(f;\ x) \leqslant L_n(f;\ x) \qquad \forall n \in \mathbf{N}. \qquad (10)$$

Для $n = 1$ в силу (9), в силу выпуклости f и того, что $L_n(1;\ x) = 1$, имеем:

$$L_2(f;\ x) = L_1\left(L_1\left(f\left(\frac{t^1 + t^2}{2}\right);\ x\right);\ x\right) \leqslant$$

$$\leqslant L_1\left(L_1\left(\frac{1}{2} f(t^1) + \frac{1}{2} f(t^2);\ x\right);\ x\right) = L_1(f;\ x).$$

Допустим, что неравенство (10) справедливо для числа n, тогда в силу (9)

$$L_{n+1}(f;\ x) = L_1\left(L_n\left(f\left(\frac{t^1 + t^2n}{1 + n}\right);\ x\right);\ x\right).$$

Но в силу выпуклости функции f

$$f\left(\frac{t^1+nt^2}{1+n}\right)\leqslant\frac{n}{n+1}f\left(\frac{t^1+(n-1)\,t^2}{n}\right)+\frac{1}{n+1}f(t^2),$$

поэтому в силу предположения индукции и соотношения (9)

$$L_{n+1}(f;\ x)\leqslant\frac{n}{n+1}L_1\left(L_{n-1}\left(f\left(\frac{t^1+(n-1)\,t^2}{n}\right);\ x\right);\ x\right)+$$
$$+\frac{1}{n+1}L_n(f;\ x)=L_n(f;\ x).$$

Теорема доказана.

Следствие 2. *Если функция f выпукла, то для симплициальных многочленов Бернштейна справедливо неравенство*

$$\int_T f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_T B_n^{\Delta}(f;\ x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{|\det A|}{(m+1)!}\sum_{k=0}^{m}f(a_k),\qquad(11)$$

где $A=\begin{pmatrix}a_0' & a_1' & \dots & a_m'\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$, $a_0,\ a_1,\ \dots,\ a_m$ — *вершины симплекса* T.

Действительно, из теоремы 2 вытекает неравенство

$$f(x)\leqslant B_n^{\Delta}(f;\ x)\leqslant B_1^{\Delta}(f;\ x)=\textstyle\sum_{j=0}^{m}\beta_j(x)\,f(a_j),$$

интегрируя его, получим (11).

Следствие 3. *Пусть* α — *произвольный фиксированный вектор из* $\mathbf{R}^m$. *Тогда последовательность* $\varphi_n(x)=L_n(e^{\alpha t'};\ x)$ *равномерно сходится к функции* $\exp(\alpha x')$ *на всяком компакте* $A\subset X$.

Действительно, функции $e^{\alpha t'}$ непрерывны, поэтому в силу теоремы 5.1 [1, с. 447] последовательность $\varphi_n(x)$ поточечно сходится к функции $e^{\alpha x'}$, а так как функция $e^{\alpha t'}$ выпукла на $\mathbf{R}^m$, то последовательность $\varphi_n(x)$ — невозрастающая. Применяя теперь теорему Дини [6, с. 116], получим требуемое утверждение.

Винницкий политехнический институт

Поступило 16.04.84

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Волков Ю. И. Многомерные аппроксимационные операторы, порожденные мерами Лебега — Стилтьеса.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1983, т. 47, № 3, с. 435—454.

[2] Aramă O. Proprietati privind monotonia surului si aplicarea de interpolare ale lui S. N. Bernstein si aplicarea lor la studine aproximarii functiolor.— Acad. Rep. Pop. Rom., Fil. Cluj., Stud. Cerc. Mat., 1957, № 8, p. 195—210.
[3] Lupas A. On Bernstein power series.— Mathematica, 1966, v. 8 (31), № 2, p. 287—296.
[4] Jakimovski A. Generalised Bernstein polynomials for discontionuous and convex funcftions.— J. Analyse Math., 1970, v. 23, p. 171—183.
[5] Волков Ю. И. Новые примеры аппроксимационных линейных положительных операторов.— В кн.: Методы теории приближения и их приложения. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982, с. 10—19.
[6] Рудин У. Основы математического анализа.— М.: Мир, 1966.