Ю. В. Бородина, Синтез легкотестируемых схем в базисе $\{\&, \vee, ^{-}\}$ для систем булевых функций, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 1, 70–78

DOI: 10.4213/dm1173

Дискретная математика

том 24 выпуск 1 * 2012

УДК 519.7

Синтез легкотестируемых схем в базисе $\{\&, \vee, \bar{\ }\}$ для систем булевых функций

© 2012 г. Ю. В. Бородина

Предложены методы синтеза легкотестируемых схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \bar{\ }\}$ для систем из m булевых функций, отличных от констант. В качестве неисправностей предполагаются константные неисправности типа 1 на выходах элементов. Доказано, что для таких схем полный проверяющий тест имеет длину не более $1 + q$, где $q \leqslant m$ есть число функций из системы, сохраняющих единицу. Значение $1+q$ в этой оценке длины теста в общем случае нельзя заменить ни на какое число, меньшее q. Для систем функций, каждая из которой монотонна по каждой из l переменных $x_2, x_3, \ldots, x_{l+1}$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, и антимонотонна по каждой из $n-l-1$ переменных $x_{l+2}, \ldots, x_n$, строятся схемы с полным проверяющим тестом длины 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 08–01–00863, и Программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения», проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем».

Пусть S — некоторая схема из функциональных элементов (см. [1, 2]), реализующая систему (упорядоченный набор) из m булевых функций $f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{x}), \ldots, f_m(\tilde{x})$, $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Функции, реализуемые на выходах схемы при наличии в схеме неисправных элементов, называются функциями неисправности. Набор $(g_1(\tilde{x}), \ldots, g_m(\tilde{x}))$ функций неисправности будем считать нетривиальным, если хотя бы одна какая-нибудь функция $g_i(\tilde{x})$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, отлична от соответствующей ей функции $f_i(\tilde{x})$, то есть $g_i(\tilde{x}) \not\equiv f_i(\tilde{x})$. Множество T входных наборов схемы S называется полным проверяющим тестом для этой схемы, если для любого нетривиального набора функций неисправности $(g_1(\tilde{x}), \ldots, g_m(\tilde{x}))$ в T найдется хотя бы один такой набор $\tilde{\sigma}$, что $(f_1(\tilde{\sigma}), \ldots, f_m(\tilde{\sigma})) \neq (g_1(\tilde{\sigma}), \ldots, g_m(\tilde{\sigma}))$ (здесь равенство булевых наборов, как обычно, покомпонентное, то есть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ означает, что $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_m = \beta_m$). Число наборов, составляющих этот тест, называется длиной теста. В качестве тривиального теста всегда можно взять тест, содержащий все 2^n наборов значений переменных булевой функции от n переменных [3].

В данной работе рассматривается задача построения легкотестируемых схем из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \bar{\ }\}$ для систем булевых функций из различных классов. В качестве неисправностей предполагаются константные неисправности типа 1, на выходах элементов (при переходе в неисправное состояние элемент выдает единицу независимо от подаваемых на его входы значений).

Пусть $\mathcal{F}_{n,m}$ — система, состоящая из m булевых функций $f_1(\tilde{x}), \ldots, f_m(\tilde{x})$, где $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; у функций из $\mathcal{F}_{n,m}$ могут быть фиктивные переменные из числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Согласно результатам работы [4], каждую из функций $f_1, \ldots, f_m$ можно реализовать схемой, допускающей полный проверяющий тест длины не более 2. Таким образом, систему $\mathcal{F}_{n,m}$ можно реализовать схемой, допускающей полный проверяющий тест длины не более $2m$. Эту очевидную оценку можно уменьшить, используя некоторые детали доказательства упомянутого результата из [4].

Теорема 1. *Любую систему $\mathcal{F}_{n,m}$ из m булевых функций, отличных от констант, можно реализовать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест длины не более $1+q$, где $q \leqslant m$ — число функций из $\mathcal{F}_{n,m}$, сохраняющих единицу, то есть равных* 1 *на наборе* $(1, \ldots, 1)$. *Значение $1+q$ в этой оценке длины теста в общем случае нельзя заменить ни на какое число, меньшее q.*

Доказательство. Пусть функция f_i не сохраняет единицу, то есть $f_i(1, \ldots, 1) = 0$. Тогда, согласно теореме 1 из [4], ее можно реализовать схемой S_i, допускающей полный проверяющий тест, состоящий только из набора $(1, \ldots, 1)$.

В противном случае, если $f_i(1, \ldots, 1) = 1$, согласно теореме 2 из [4], функцию f_i можно реализовать схемой S_i, полный проверяющий тест для которой состоит из набора $(1, \ldots, 1)$ и любого нулевого набора $\tilde{\sigma}_i$ функции f_i.

Схему S, реализующую систему, составим из m подсхем $S_1, S_2, \ldots, S_m$. Нетрудно видеть, что в качестве полного проверяющего теста для схемы S можно взять множество, состоящее из набора $(1, \ldots, 1)$ и указанных нулевых наборов $\tilde{\sigma}_i$ тех функций f_i, которые сохраняют единицу. Таким образом, длина теста не превосходит $1+q$ (среди наборов $\tilde{\sigma}_i$ могут быть одинаковые).

Если те функции $f_{i_1}, \ldots, f_{i_q}$, которые сохраняют единицу, таковы, что множества их нулевых наборов попарно не пересекаются, то есть на каждом наборе значений переменных не более чем одна из этих функций равна нулю, то любой полный проверяющий тест для любой схемы, реализующей систему $\mathcal{F}_{n,m}$, должен содержать не менее q наборов: на любом наборе может быть проверен не более чем один из выходных элементов указанных функций.

Следствие 1. *Любую систему $\mathcal{F}_{n,m}$ из m монотонных булевых функций, отличных от констант, можно реализовать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест длины* 2.

Доказательство. В данном случае все функции f_i сохраняют единицу. Но у них есть общий нулевой набор $(0, \ldots, 0)$, поскольку все они отличны от константы 1. Следовательно, в качестве полного проверяющего теста для схемы из доказательства теоремы 1 можно взять множество, состоящее из наборов $(1, \ldots, 1)$ и $(0, \ldots, 0)$.

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{F}_{n,m}$ — система из m булевых функций, отличных от констант, каждая из которых монотонна по каждой из l переменных $x_1, x_2, \ldots, x_l$ и антимонотонна по каждой из k переменных $x_{l+1}, \ldots, x_{l+k}$, $l+k \leqslant n$. Тогда систему $\mathcal{F}_{n,m}$ можно реализовать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест, длина которого не превосходит* $1 + \min\{m, 2^{n-k-l}\}$.

Доказательство. В данном случае все функции f_i могут сохранять единицу. Но для каждой из них можно взять нулевой набор вида $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{l}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \sigma_{l+k+1}, \ldots, \sigma_n)$. Всего

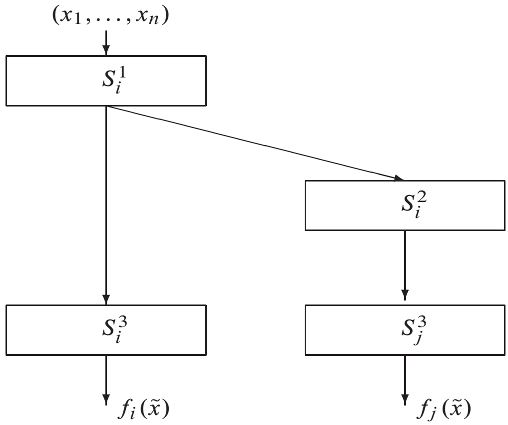

Рис. 1.

таких наборов 2^{n-k-l}. Следовательно, в качестве полного проверяющего теста для схемы из доказательства теоремы 1 можно взять множество, состоящее из набора $(1, \ldots, 1)$ и выбранных нулевых наборов указанного вида.

В связи со следствием 1 естественно возникает вопрос о точности оценки длины полного проверяющего теста для схем, реализующих системы монотонных булевых функций. На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 2. *Любую систему $\mathcal{F}_{n,m}$ из m монотонных булевых функций, отличных от констант, можно реализовать схемой из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee\}$, допускающей полный проверяющий тест длины* 1.

Доказательство. Для каждой функции $f_i(\tilde{x})$, $1 \leqslant i \leqslant m$, возьмем тупиковую дизъюнктивную нормальную форму F_i.

Рассмотрим набор $\tilde{\sigma}$, являющийся нулевым для всех функций системы $\mathcal{F}_{n,m}$, то есть, $f_i(\tilde{\sigma}) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$, и содержащий максимальное число единиц; если таких наборов несколько, возьмем один из них. Без ограничения общности можем считать, что $\tilde{\sigma} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{l}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k})$, $l + k = n$. В силу монотонности рассматриваемых функций, $k < n$.

Рассмотрим общий вид схемы. Схему S, реализующую систему $\mathcal{F}_{n,m}$, составим из m подсхем $S_1, \ldots, S_m$. Каждую подсхему S_i, реализующую функцию f_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, составим из трех подсхем S_i^1, S_i^2, S_i^3 (рис. 1) (некоторые подсхемы могут отсутствовать).

Подсхема S_i^1 реализует все конъюнкции, входящие в указанную дизъюнктивную нормальную форму F_i функции $f_i(\tilde{x})$, цепями из конъюнкторов [3]; эти цепи будем считать главными. Первыми на входы верхних конъюнкторов каждой цепи подаем переменные x_p, где $1 \leqslant p \leqslant l$. Такие переменные есть в каждой конъюнкции в силу выбора параметра l.

Схема S_i^2 служит для контроля исправности конъюнкторов подсхемы S_i^1. Каждому элементу E из S_i^1 в подсхеме S_i^2 соответствует цепь Z из конъюнкторов (назовем ее контрольной). На левый вход верхнего элемента E_1 цепи Z подается выход элемента E. На левые входы последующих конъюнкторов $E_2, \ldots, E_k$ подаются значения с выходов предыдущих, на правые же входы — переменные $x_{l+1}, \ldots, x_n$. Каждый элемент E из S_i^1 реализует некоторую конъюнкцию $K = x_{p_1} \& \ldots \& x_{p_q}$, а на выходе соответствующей ему цепи в подсхеме S_i^2 реализуется функция $K \,\&\, x_{l+1} \,\&\, \ldots \,\&\, x_n$. Выход этой цепи подадим на вход подсхемы S_j^3 такой функции f_j, что $f_j \vee K \,\&\, x_{l+1} \,\&\, \ldots \,\&\, x_n = f_j$. Докажем, что для любой конъюнкции K такая функция f_j существует.

Пусть это не так, то есть $f_j(\tilde{x}) \vee K \,\&\, x_{l+1} \,\&\ldots\&\, x_n = g_j(\tilde{x})$ для любого j, $1 \leqslant j \leqslant m$, и существует такой набор $\tilde{\sigma}_j$ значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что $g_j(\tilde{\sigma}_j) \neq f_j(\tilde{\sigma}_j)$. Если $f_j(\tilde{\sigma}_j) = 1$, то и $g_j(\tilde{\sigma}_j) = 1$. Следовательно, единственно возможный вариант выполнения неравенства $g_j(\tilde{\sigma}_j) \neq f_j(\tilde{\sigma}_j)$ — это случай, когда $f_j(\tilde{\sigma}_j) = 0$, а $g_j(\tilde{\sigma}_j) = 1$. Тогда выражение $K \,\&\, x_{l+1} \,\&\, \ldots \,\&\, x_n$ равно 1 на наборе $\tilde{\sigma}_j$, так что этот набор содержит единицы на всех местах, соответствующих переменным, входящим в K, и переменным $x_{l+1}, \ldots, x_n$. Рассмотрим набор $\tilde{\nu}$ длины n, который содержит единицы только на местах, соответствующих переменным, входящим в K, и переменным $x_{l+1}, \ldots, x_n$. Число единиц в наборе $\tilde{\nu}$ больше k (согласно построению схемы, в K найдется хотя бы одна переменная x_r, где $1 \leqslant r \leqslant l$), и в силу монотонности рассматриваемых функций справедливо равенство $f_j(\tilde{\nu}) \leqslant f_j(\tilde{\sigma}_j) = 0$, то есть $f_j(\tilde{\nu}) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$, что невозможно в силу выбора параметра k как максимального числа единиц в наборах, нулевых для всех функций системы $\mathcal{F}_{n,m}$.

Подсхема S_i^3 представляет собой цепь из дизъюнкторов и реализует дизъюнкцию всех выходных функций подсхемы S_i^1 и поданных на входы подсхемы S_i^3 контрольных цепей подсхем S_p^2, где $1 \leqslant p \leqslant m$.

В случае $k = 0$ для каждой переменной x_r, $1 \leqslant r \leqslant n$, существует функция f_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, в дизъюнктивной нормальной форме F_j которой есть эта переменная в виде отдельного слагаемого (иначе набор $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ с единицей на r-ом месте был бы нулевым для всех функций системы). В этом случае в схеме отсутствуют все подсхемы S_i^2, а контроль исправности конъюнкторов подсхем S_i^1 осуществляется следующим образом. Выход каждого элемента E из S_i^1, реализующего некоторую конъюнкцию $K = x_{p_1} \& \ldots \& x_{p_q}$, $p_1 < \ldots < p_q$, подадим на вход подсхемы S_j^3, реализующей на выходе функцию f_j, форма F_j которой содержит в качестве отдельного слагаемого переменную x_{p_1} (для определенности возьмем здесь переменную с наименьшим индексом). В силу закона поглощения функция, реализуемая на выходе подсхемы S_j^3, не изменится при таком действии.

Построенная вышеописанным способом схема S реализует на своих m выходах функции $f_1, \ldots, f_m$.

Докажем, что полным проверяющим тестом для построенной схемы S является набор $\tilde{\sigma}$.

Заметим, что согласно построению в исправном состоянии значение на выходах всех элементов схемы на этом наборе равно 0.

При возникновении неисправности любого элемента подсхемы S_i^3, $1 \leqslant i \leqslant m$, или при подаче на любой ее вход единицы, схема S_i^3 выдает единицу.

При переходе в неисправное состояние какого-либо элемента E подсхемы S_i^1, на все входы отвечающей ему контрольной цепи Z в подсхеме S_i^2 будут поданы единицы, то есть мы получим единицу на выходе этой цепи, которая, в свою очередь, будет подана на вход соответствующей ей подсхемы S_j^3. Таким образом, мы получим единицу на выходе всей подсхемы S_j. Аналогично рассматривается случай неисправности элемента подсхемы S_i^2.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{F}_{n,m}$ — система из m булевых функций, отличных от констант, каждая из которых монотонна по каждой из l переменных $x_1, x_2, \ldots, x_l$, $0 \leqslant l \leqslant n$, и антимонотонна по каждой из $n-l$ переменных $x_{l+1}, \ldots, x_n$. Тогда систему $\mathcal{F}_{n,m}$ можно*

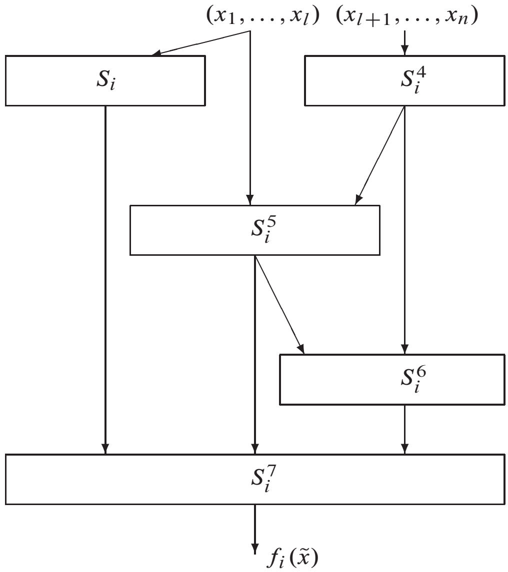

Рис. 2.

реализовать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест длины 1.

Доказательство. Возьмем для каждой функции $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, тупиковую дизъюнктивную нормальную форму F_i, в которую переменные из множества $\{x_1, \ldots, x_l\}$ входят без отрицаний, а переменные из множества $\{x_{l+1}, \ldots, x_n\}$ — только с отрицаниями. Слагаемые из F_i разобьем на два непересекающихся подмножества A_i' и A_i''. К A_i' отнесем слагаемые, не содержащие переменные с отрицаниями. В A_i'' войдут все оставшиеся конъюнкции.

Искомая схема S^* состоит из m подсхем S_i^*, каждая из которых реализует функцию f_i (рис. 2) и, в свою очередь, является объединением подсхем $S_i \cup S_i^4 \cup S_i^5 \cup S_i^6 \cup S_i^7$.

Схема

$$S_i = S_i^1 \cup S_i^2 \cup S_i^3$$

(см. также рис. 1), реализующая дизъюнкцию всех конъюнкций из A_i', устроена так, как указано в доказательстве теоремы 2. Выходы элементов подсхемы S_i^2 могут подаваться на входы подсхем S_j^3, $1 \leqslant j \leqslant m$, а подсхема S_i^3 реализует дизъюнкцию всех поданных на ее входы выходных значений подсхем S_j^2 и подсхемы S_i^1 согласно доказательству теоремы 2. Схема S_i^4 содержит $n - m$ инверторов, на выходах которых реализуются $\bar{x}_{l+1}, \ldots, \bar{x}_n$. Схема S_i^5 реализует все конъюнкции из множества A_i'' цепями из конъюнкторов, причем на левый вход первого конъюнктора каждой цепи подается выход одного из инверторов (для той переменной, отрицание которой присутствует в данной конъюнкции) схемы S_i^4.

Схема S_i^6 служит для контроля исправности элементов из подсхем S_i^4 и S_i^5. В S_i^6 содержится столько конъюнкторов, сколько инверторов и конъюнкторов содержится в схемах S_i^4 и S_i^5, и каждый конъюнктор E из S_i^6 однозначно соответствует некоторому элементу E' одной из схем S_i^4 или S_i^5. Если E' — инвертор из S_i^4, то один вход E соединяется с выходом E', а второй вход E соединяется с тем входом схемы S_i^4, с которым соединен вход инвертора E'. Предположим теперь, что E' — конъюнктор из S_i^5, то есть элемент некоторой цепи Z из конъюнкторов. В этом случае один вход конъюнктора E соединяем с выходом E', а на второй вход подается значение той переменной, отрицание которой подается на левый вход верхнего элемента соответствующей цепи Z. Если все элементы из S_i^4 и S_i^5 исправны, то на выходе элемента E реализуется некоторая конъюнкция, содержащая в качестве сомножителя конъюнкцию $\bar{x}_i \mathbin{\&} x_i$ с некоторым $i > l$. Таким образом, при отсутствии неисправных элементов в схемах S_i^4, S_i^5 и S_i^6 на выходах всех конъюнкторов из S_i^6 реализуются тождественные нули.

Схема S_i^7, представляющая собой цепь из дизъюнкторов, реализует дизъюнкцию всех выходных функций подсхем S_i, S_i^5 и S_i^6.

Построенная схема S_i^* при отсутствии неисправностей реализует функцию f_i.

Согласно теореме 2, схема

$$S = \bigcup_i S_i$$

допускает полный проверяющий тест, состоящий из набора $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_l)$. Докажем, что в качестве полного проверяющего теста для схемы S^* можно взять набор $\tilde{\sigma}^* = (\sigma_1, \ldots, \sigma_l, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-l})$. Нетрудно видеть, что в исправном состоянии значение на выходах всех элементов схемы S^* на данном наборе равно нулю.

При возникновении неисправности любого элемента подсхемы S_i^7 или при подаче на любой из ее входов единицы, схема S_i^* выдает единицу.

При неисправности любого элемента подсхемы S_i (при ее наличии), получим единицу на выходе некоторой подсхемы S_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, а значит, получим единицу и на выходе всей схемы S_j^* (см. теорему 2).

При неисправности какого-либо элемента E' из подсхем S_i^4 или S_i^5, на оба входа соответствующего ему конъюнктора E из S_i^6 подаются единицы. Следовательно, на выходе этого конъюнктора E, а, вслед за ним, и на выходе подсхемы S_i^7 тоже получим единицу.

При переходе в неисправное состояние одного из элементов подсхемы S_i^6, на вход некоторого элемента подсхемы S_i^7 будет подана единица. В этом случае опять же единицу получим и на выходе всей схемы. Таким образом, набор $\tilde{\sigma}^*$ действительно составляет полный проверяющий тест для S^*.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{F}_{n,m}$ — система из m булевых функций, отличных от констант, каждая из которых монотонна по каждой из l переменных $x_2, x_3, \ldots, x_{l+1}$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, и антимонотонна по каждой из $n-l-1$ переменных $x_{l+2}, \ldots, x_n$. Тогда систему $\mathcal{F}_{n,m}$ можно реализовать схемой из функциональных элементов, допускающей полный проверяющий тест длины* 1.

Доказательство. Искомая схема S^{**} состоит из m подсхем S_i^{**}, каждая из которых реализует функцию f_i. Разложим функцию $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ по первой переменной:

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \mathbin{\&} f_i^1 \vee \bar{x}_1 \mathbin{\&} f_i^0,$$

где

$$f_i^1 = f_i(1, x_2, \ldots, x_n),$$
$$f_i^0 = f_i(0, x_2, \ldots, x_n).$$

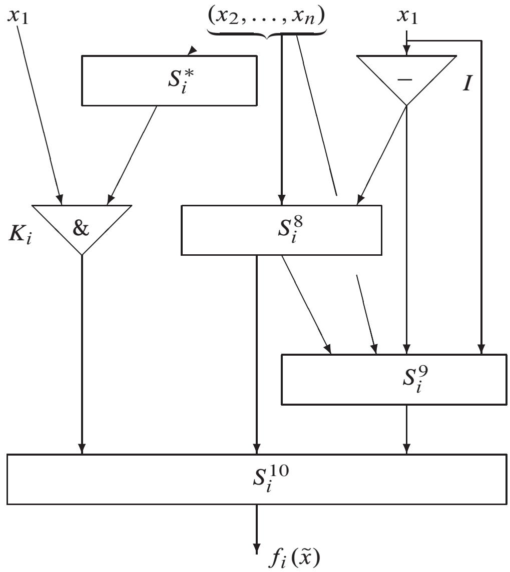

Рис. 3.

Для функций f_i^1 и f_i^0 возьмем тупиковые дизъюнктивные нормальные формы F_i^1 и F_i^0 соответственно. Каждая из переменных множества $\{x_2, \ldots, x_n\}$ входит в обе эти формы либо только с отрицанием, либо только без отрицания.

Искомая схема является объединением схем S_i^{**}, реализующих функции f_i соответственно, каждая из которых состоит из подсхем S_i^*, S_i^8, S_i^9, S_i^{10}, одного конъюнктора K_i и инвертора I (рис. 3).

Схема

$$S_i^* = S_i \cup S_i^4 \cup S_i^5 \cup S_i^6 \cup S_i^7$$

реализует F_i^1 согласно теореме 3. Выход этой схемы подается на правый вход конъюнктора K_i, на левый вход которого подается значение переменной x_1.

Схема S_i^8 реализует все конъюнкции, входящие в дизъюнктивную нормальную форму F_i^0 функции f_i^0 цепями из конъюнкторов, причем на левый вход верхнего конъюнктора каждой цепи подается выход инвертора I, на вход которого подано значение переменной x_1. Если функция f_i^0 зависит от переменной x_j, $l+2 \leqslant j \leqslant n$, то мы добавляем соответствующий инвертор E^- в схему S_i^8; на вход инвертора E^- подаем переменную x_j, а выход инвертора E^- подаем на входы соответствующих конъюнкторов этой схемы.

Схема S_i^9 служит для контроля исправности элементов из схемы S_i^8 и инвертора I. В S_i^9 содержится столько конъюнкторов, сколько инверторов и конъюнкторов содержится в схеме S_i^8 плюс один, и каждый конъюнктор из S_i^9 однозначно соответствует некоторому элементу схемы S_i^8 или инвертору I. Пусть конъюнктор E из S_i^9 соответствует элементу E'. Если E' — инвертор для переменной x_j, то один вход элемента E соединяется с выходом E', а на второй вход элемента E подается переменная x_j. Предположим теперь, что E' — конъюнктор из S^8, то есть элемент некоторой цепи из конъюнкторов. Тогда один вход элемента E соединяется с выходом E', а на второй вход элемента E подается x_1.

Если все элементы из S_i^8 и инвертор I исправны, то на выходе элемента E реализуется некоторая конъюнкция, содержащая в качестве сомножителя конъюнкцию $\bar{x}_j \mathbin{\&} x_j$. Таким образом, при отсутствии неисправных элементов в схемах S_i^8, S_i^9 и исправном инверторе I на выходах всех конъюнкторов из S_i^9 реализуются тождественные нули.

Схема S_i^{10} представляет собой цепь из дизъюнкторов и реализует дизъюнкцию функций, реализуемых на выходах схем S_i^8, S_i^9 и конъюнктора K_i.

Отметим, что если функция $f_i^1 \equiv 1$ (то есть $f_i = x_1 \vee \bar{x}_1 \mathbin{\&} f_i^0$), то в схеме S_i^{**} отсутствуют подсхема S_i^* и конъюнктор K_i, а значение переменной x_1 подается на вход подсхемы S_i^{10}. Если же $f_i^0 \equiv 1$ (то есть $f_i = x_1 \mathbin{\&} f_i^1 \vee \bar{x}_1$), то в схеме S_i^{**} отсутствует подсхема S_i^8, выход инвертора I подается на вход подсхемы S_i^{10}, а подсхема S_i^9 состоит из одного конъюнктора.

Построенная схема S_i^{**} при отсутствии неисправностей реализует заданную функцию f_i.

Пусть все функции f_i^1, $1 \leqslant i \leqslant m$, существенно зависят от переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_p}$, $2 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n$. Тогда согласно теореме 3, схема

$$S^* = \bigcup_i S_i^*$$

допускает полный проверяющий тест, состоящий из набора $\tilde{\sigma}^* = (\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_p})$ значений этих переменных.

Докажем, что в качестве полного проверяющего теста для схемы S^{**} можно взять набор $\tilde{\sigma}^{**} = (1, \dots, \sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_p}, \dots)$, в котором первый разряд равен единице, значения σ_{i_k} $(1 \leqslant k \leqslant p)$ из $\tilde{\sigma}^*$ стоят на своих местах, а на оставшихся местах стоит либо 0, если все функции f_i монотонны по соответствующей переменной x_j, либо 1 в противном случае. На последних $n-l-1$ местах в наборе $\tilde{\sigma}^{**}$ стоят единицы. Заметим, что набор $\tilde{\sigma}^{**}$ является нулевым для любой функции $f_i(\tilde{x})$. Достаточно доказать, что при возникновении неисправностей в S_i^{**} одна из подсхем S_j^{**} на данном наборе будет выдавать значение 1.

Нетрудно заметить, что в исправном состоянии значение на выходах всех элементов схемы на данном наборе равно 0.

При возникновении неисправности любого элемента подсхемы S_i^{10} или при подаче на любой из ее входов 1, схема S_i^{**} выдает значение 1.

При переходе в неисправное состояние конъюнктора K_i, на один из входов схемы S_i^{10} будет подаваться значение 1, поэтому мы получим это значение и на выходе всей схемы S_i^{**}.

При возникновении неисправности любого элемента подсхемы S_i^*. на выходе одной подсхемы S_j^*, а значит, и на выходе всей схемы S_j^{**} получим 1 (в силу того, что на наборе $(\sigma_{i_1}^k, \dots, \sigma_{i_p}^k)$ в этом случае на оба входа конъюнктора K_j подаются значения 1).

При неисправности какого-либо элемента E' из подсхем S_i^8 или инвертора I, на оба входа соответствующего ему конъюнктора E из S_i^9 подаются единицы (поскольку значения всех переменных, подаваемые на правые входы конъюнкторов из S_i^9, в наборе $\tilde{\sigma}^{**}$ равны 1). Следовательно, на выходе этого конъюнктора, а вслед за ним и на выходе всей схемы тоже получим единицу.

При переходе в неисправное состояние одного из элементов подсхемы S_i^9, на вход некоторого дизъюнктора схемы S_i^{10} будет подано значение 1. В этом случае единицу получим опять же и на выходе всей схемы.

Замечание 1. Теоремы 2–4 для систем, состоящих из одной функции, были доказаны в [5]. Кроме того, в условиях теорем 2 и 3 легкотестируемые схемы с неточными оценками длин тестов строились в [6].

Замечание 2. В силу самодвойственности рассматриваемого базиса аналоги теорем 1–4 и следствия 2 справедливы и при константных неисправностях типа 0 на выходах элементов.

Автор благодарен Н. П. Редькину за постановку задачи и Л. А. Шоломову за указание на возможность вывода следствия 1 из теоремы 1.

Список литературы

1. Лупанов О. Б., *Асимптотические оценки сложности управляющих систем*. МГУ, Москва, 1984.
2. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Высшая школа, Москва, 2002.
3. Редькин Н. П., *Надежность и диагностика схем*. МГУ, Москва, 1992.
4. Бородина Ю. В., О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов. *Вестник Московского ун-та. Сер. 15: Вычислительная математика и кибернетика* (2008) №1, 40–44..
5. Бородина Ю. В., Синтез легкотестируемых схем в базисе $\{\&, \vee, \bar{\ }\}$ при однотипных константных неисправностях на выходах элементов. *Дискретная математика* (2005) **17**, №1, 129–140.
6. Бородина Ю. В., Синтез легкотестируемых схем в базисе $\{\&, \vee, \bar{\ }\}$ для систем функций из некоторых классов. *Вестник Московского ун-та. Сер. 1: Математика и механика* (2007) №4, 68–72..

Статья поступила 23.11.2010.