



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

M. S. Nikol'skii, Zh. Peng, A differential pursuit game with
a breakdown in the dynamics,
Differ. Uravn., 1994, Volume 30, Number 11, 1923–1927

<https://www.mathnet.ru/eng/de8489>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have
read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.175

May 20, 2025, 10:37:36



УДК 517.977.1

М. С. НИКОЛЬСКИЙ, ЧЖ. ПЭН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С НАРУШЕНИЕМ В ДИНАМИКЕ

Настоящая работа продолжает исследования [1, 2] по задачам управления с возможными нарушениями в динамике управляемой системы.

Рассмотрим линейную дифференциальную игру, в ходе которой возможно появление нарушения в механизме преследующего игрока, например: помехи, ослабление тяги двигателя или даже поломка управляющего блока на некоторое время. В настоящей статье рассмотрим последний случай. Пусть игра описывается следующим уравнением и начальным условием:

$$\dot{x} = Ax - \alpha_\theta(t)u + v, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

где x — вектор, принадлежащий n -мерному евклидову арифметическому пространству R^n ; A — $(n \times n)$ -матрица; u и v — управления, подчиненные соответственно догоняющему и убегающему игрокам, причем $u \in P$, $v \in Q$, где P и Q суть непустые выпуклые компакты из R^n ; скалярная функция $\alpha_\theta(t)$ определяется формулой

$$\alpha_\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \notin [\theta, \theta + h], \\ 0 & \text{при } t \in [\theta, \theta + h], \end{cases}$$

где $h > 0$ — константа, характеризующая длительность нарушения у догоняющего игрока. Величина θ обозначает момент появления нарушения: при $t \in [\theta, \theta + h]$ догоняющий теряет контроль над динамической системой (1), а через определенное время h этот контроль восстанавливается (предполагается, что догоняющий игрок всегда может справиться с нарушением за время h). В R^n задано непустое выпуклое замкнутое множество M — терминальное множество.

Предполагается, что догоняющий игрок знает матрицу A , выпуклые компакты P , Q , начальное состояние x_0 , терминальное множество M и функцию $v_t(\cdot) = \{v(s), 0 \leq s \leq t\}$ при $t \geq 0$.

Считается, что начальный момент нарушения догоняющему неизвестен и что о его наступлении он узнает в момент $\theta \geq 0$.

Цель догоняющего игрока — выведение точки $x(t)$ на терминальное множество M из начальной точки x_0 за конечное время при произвольном $\theta \geq 0$ и произвольной измеримой функции $v(t) \in Q$, $t \geq 0$.

Введем класс \mathfrak{C} управлений догоняющего с памятью.

Определение 1. Обозначим через \mathfrak{C} однопараметрическое семейство отображений $\mathcal{F}(t, v_t(\cdot))$ в множество P , определенных $\forall t > 0$ на множестве измеримых функций $v(s) \in Q$, $0 \leq s \leq t$, и обладающих свойством суперпозиционной измеримости: функция $u(t) = \mathcal{F}(t, v_t(\cdot))$ измерима при $t \geq 0$ для произвольной измеримой функции $v(s) \in Q$, $s \geq 0$.

В качестве допустимых стратегий догоняющего будем рассматривать пары $\mathcal{U} = (\mathcal{F}_1(\cdot), \mathcal{F}_2^\theta(\cdot))$, где $\mathcal{F}_1(\cdot) \in \mathfrak{C}$, $\mathcal{F}_2^\theta(\cdot) \in \mathfrak{C}$ $\forall \theta \geq 0$. Решение задачи Коши (1) при фиксированных \mathcal{U} , $\theta \geq 0$ и измеримой

функции $v(t) \in Q, t \geq 0$, понимается так. При $0 \leq t \leq \theta$ оно совпадает с решением $y(t)$ следующей задачи Коши:

$$\dot{y} = Ay - \mathcal{F}_1(t, v(\cdot)) + v(t), \quad (2)$$

$$y(0) = x_0. \quad (3)$$

При $t \geq \theta$ оно совпадает с решением $z(t)$ следующей задачи Коши:

$$\dot{z} = Az - \alpha_\theta(t) \mathcal{F}_2^\theta(t, v(\cdot)) + v(t), \quad (4)$$

$$z(\theta) = y(\theta). \quad (5)$$

В силу сделанных соглашений любая тройка $\mathcal{U}, \theta \geq 0$ и измеримая функция $v(t) \in Q, t \geq 0$, однозначно определяют момент первого попадания соответствующего решения $x(t, \mathcal{U}, \theta, v(\cdot))$ задачи Коши (1) на терминальное множество M , его мы обозначим через $T(x_0, \mathcal{U}, \theta, v(\cdot))$ (если $x(t, \mathcal{U}, \theta, v(\cdot)) \notin M$ при всех $t \geq 0$, то полагаем $T(x_0, \mathcal{U}, \theta, v(\cdot)) = +\infty$).

Займемся следующей задачей. Найти начальные точки x_0 , из которых игра преследования может быть закончена за конечное время на терминальном множестве M при произвольных $\theta \geq 0$ и измеримой функции $v(t) \in Q, t \geq 0$, т. е.

$$\inf_{\mathcal{U}} \sup_{\theta \geq 0} \sup_{v(\cdot)} T(x_0, \mathcal{U}, \theta, v(\cdot)) < +\infty. \quad (6)$$

Такую задачу иногда называют задачей качества.

Здесь дадим достаточные условия, при которых для данного $x_0 \notin M$ выполняется (6).

Используемый нами метод решения задачи качества основывается на формуле Коши для решения уравнения (1) при начальном условии $x(0) = x_0$ и измеримых $u(t) \in P, v(t) \in Q, t \geq 0$ и $\theta \geq 0$:

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} (-\alpha_\theta(s) u(s) + v(s)) ds.$$

В дальнейшем будут использоваться операции интегрирования многозначных отображений (см., например, [3]), алгебраического суммирования множеств «+», геометрической разности «*» множеств [4, 5] и альтернированный интеграл Л. С. Понтрягина [4, 5] в нестационарном варианте (см. [6]).

Алгебраической суммой множеств A и B называется множество $A+B = \{a+b: a \in A, b \in B\}$. Если A и B непусты, замкнуты и выпуклы, причем одно из них компактно, то $A+B$ суть непустое выпуклое замкнутое множество.

Геометрической разностью множеств A и B называется множество $A*B = \{c: c+B \in A\}$. Если A и B непусты, замкнуты и выпуклы, то $A*B$ будет выпуклое замкнутое множество.

Пусть Ω — многозначное отображение из R^1 в множество всех непустых компактных подмножеств из R^n . Интегралом от многозначного отображения $\Omega(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$ называется множество $G = \int_{t_0}^{t_1} \Omega(t) dt = \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt: f(t) \in \Omega(t) \right\}$. Здесь в правой части интеграл Лебега берется по всем однозначным суммируемым ветвям $f(t)$ многозначного отображения $\Omega(t)$. О свойствах этого интеграла см., например, [3].

Перейдем к определению альтернированного интеграла Л. С. Понтрягина [4, 5] в нестационарном варианте (см. [6]).

Пусть на отрезке $[p, q]$, где $p < q$, заданы измеримые многозначные отображения $U(t), V(t)$ [3], равномерно ограниченные на $[p, q]$, т. е. $U(t) \subset S_R(0), V(t) \subset S_R(0) \forall t \in [p, q]$, где $S_R(0) = \{x \in R^n: |x| \leq R\}$, $R > 0$ — достаточно большая константа. Пусть в R^n фиксировано

некоторое непустое замкнутое выпуклое множество B — концевое множество интегрирования.

Рассмотрим рациональное разбиение ω отрезка $[p, q]: p = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = q$, где $\tau_1, \dots, \tau_{k-1}$ — рациональные числа. Ему поставим в соответствие следующее множество:

$$\Sigma_\omega = \left(\dots \left(B + \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} U(\tau) d\tau \right) * \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} V(\tau) d\tau \right) + \\ + \int_{\tau_{k-2}}^{\tau_{k-1}} U(\tau) d\tau * \int_{\tau_{k-2}}^{\tau_{k-1}} V(\tau) d\tau + \dots + \int_{\tau_0}^{\tau_1} U(\tau) d\tau * \int_{\tau_0}^{\tau_1} V(\tau) d\tau,$$

где порядок выполнения операций $+$, $*$ определяется скобками в направлении изнутри вовне. Множество Σ_ω называется альтернированной суммой. Заметим, что Σ_ω может оказаться пустым множеством.

О п р е д е л е н и е 2. Будем называть пересечение множеств Σ_ω по всем возможным рациональным разбиениям ω альтернированным интегралом Л. С. Понтрягина. Обозначим его символом

$$\int_p^{B, q} [U(\tau) d\tau * V(\tau) d\tau]. \quad (7)$$

Используя известные свойства операций $+$, $*$ (см. [4, 5]) и свойства многозначных отображений (см. [3]), можно показать, что если $\bigcap_\omega \Sigma_\omega$ непусто, то альтернированный интеграл является замкнутым выпуклым множеством.

Аналогично работе [6] без больших изменений доказывается следующий факт. Пусть рассматриваемый альтернированный интеграл (см. (7)) непуст. Тогда $\forall \varepsilon > 0$, где $p + \varepsilon \leq q$, справедливо следующее включение:

$$\int_p^{B, q} [U(\tau) d\tau * V(\tau) d\tau] \subset \left(\int_{p+\varepsilon}^{B, q} [U(\tau) d\tau * V(\tau) d\tau] + \right. \\ \left. + \int_p^{p+\varepsilon} U(\tau) d\tau \right) * \int_p^{p+\varepsilon} V(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Теперь вернемся к исходной задаче. Построим альтернированный интеграл

$$W_\theta(t, \tau) = \int_t^{M, \tau} [e^{(\tau-s)A} \alpha_\theta(s) P ds * e^{(\tau-s)A} Q ds], \quad (9)$$

где $0 \leq t \leq \tau$, $\theta \geq 0$.

Положим

$$W(t, \tau) = \bigcap_{\theta \in [t, \tau]} W_\theta(t, \tau). \quad (10)$$

Оказывается, справедлива

Т е о р е м а. Пусть для некоторого $x_0 \notin M$ существует такое $\tau_0 > 0$, при котором выполняется следующее включение:

$$e^{\tau_0 A} x_0 \in W(0, \tau_0). \quad (11)$$

Пусть для любого $t: 0 \leq t \leq \tau_0$ существует $\gamma \in [t, \tau_0]$ такое, что для него имеет место равенство

$$W(t, \tau_0) = W_\gamma(t, \tau_0). \quad (12)$$

Тогда игру преследования (1) можно закончить за время τ_0 при любом

измеримом управлении убегающего игрока $v(t) \in Q$, $t \geq 0$, и при любом $\theta \geq 0$, т. е. выполняется соотношение (6).

Доказательство. Из (10), (11) и свойств альтернированного интеграла следует, что $W_\theta(t, \tau_0) \neq \emptyset$ при $t \in [0, \tau_0]$ и $\theta \in [0, \tau_0]$. В силу (8) имеем включение

$$W_\theta(t, \tau_0) \subset (W_\theta(t + \varepsilon, \tau_0) + \int_t^{t+\varepsilon} e^{(\tau_0-s)A} \alpha_\theta(s) P ds) * \int_t^{t+\varepsilon} e^{(\tau_0-s)A} Q ds \quad (13)$$

при любых $\varepsilon \in [0, \tau_0 - t]$, $\theta \in [0, \tau_0]$.

Для дальнейшего нам будет полезен следующий факт. Пусть $\{\Phi_r\}$ — некоторое семейство непустых множеств, зависящих от параметра $r \in I$, где I — некоторое множество индексов. Пусть существует некоторый индекс $r' \in I$, для которого $\bigcap_{r \in I} \Phi_r = \Phi_{r'}$. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\bigcap_{r \in I} (\Phi_r + S) = (\bigcap_{r \in I} \Phi_r) + S, \quad (14)$$

$$\bigcap_{r \in I} (\Phi_r * S) = (\bigcap_{r \in I} \Phi_r) * S, \quad (15)$$

где S — некоторое непустое множество, не зависящее от параметра r . Пусть S_1, S_2 — некоторые непустые не зависящие от r множества, тогда с помощью (14), (15) легко показать, что

$$\bigcap_{r \in I} ((\Phi_r + S_1) * S_2) = ((\bigcap_{r \in I} \Phi_r) + S_1) * S_2. \quad (16)$$

Из (10), (12) с помощью (16) получаем

$$\begin{aligned} \bigcap_{\theta \in [t+\varepsilon, \tau_0]} W_\theta(t, \tau_0) &\subset \bigcap_{\theta \in [t+\varepsilon, \tau_0]} \{ (W_\theta(t + \varepsilon, \tau_0) + \\ &+ \int_t^{t+\varepsilon} e^{(\tau_0-s)A} P ds) * \int_t^{t+\varepsilon} e^{(\tau_0-s)A} Q ds \} = \{ (\bigcap_{\theta \in [t+\varepsilon, \tau_0]} W_\theta(t + \varepsilon, \tau_0)) + \\ &+ \int_t^{t+\varepsilon} e^{(\tau_0-s)A} P ds \} * \int_t^{t+\varepsilon} e^{(\tau_0-s)A} Q ds. \end{aligned} \quad (17)$$

Так как

$$\bigcap_{\theta \in [t, \tau_0]} W_\theta(t, \tau_0) \subset \bigcap_{\theta \in [t+\varepsilon, \tau_0]} W_\theta(t, \tau_0), \quad (18)$$

то из (13) следует

$$\begin{aligned} \bigcap_{\theta \in [t, \tau_0]} W_\theta(t, \tau_0) &\subset \bigcap_{\theta \in [t+\varepsilon, \tau_0]} \{ (W_\theta(t + \varepsilon, \tau_0) + \\ &+ \int_t^{t+\varepsilon} e^{(\tau_0-s)A} \alpha_\theta(s) P ds) * \int_t^{t+\varepsilon} e^{(\tau_0-s)A} Q ds \}. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как $\alpha_\theta(s) = 1$ для $s \in [t, t + \varepsilon]$, $\theta \in [t + \varepsilon, \tau_0]$, то правая часть включения (19) равна множеству

$$\bigcap_{\theta \in [t+\varepsilon, \tau_0]} \{ (W_\theta(t + \varepsilon, \tau_0) + \int_t^{t+\varepsilon} e^{(\tau_0-s)A} P ds) * \int_t^{t+\varepsilon} e^{(\tau_0-s)A} Q ds \}.$$

Из (10), (17)—(19) следует

$$W(t, \tau_0) \subset (W(t + \varepsilon, \tau_0) + \int_t^{t+\varepsilon} e^{(\tau_0-s)A} P ds) * \int_t^{t+\varepsilon} e^{(\tau_0-s)A} Q ds, \quad (20)$$

где $0 \leq t \leq \tau_0$, $\varepsilon \leq \tau_0 - t$.

Используя определение множества $W(t, \tau)$ и свойство (20), можно показать, что множество $B = \{(t, x) : t \in [0, \tau_0], e^{(\tau_0-t)A} x \in W(t, \tau_0)\}$ является u -стабильным (см. [7]) для дифференциальной игры $\dot{x} = Ax - u + v$, $u \in P$, $v \in Q$ с терминальным множеством M .

Отсюда и в силу теоремы 2 из [8] следует существование такого $\tilde{\mathcal{F}}_1 \in \mathcal{C}$, что при любой измеримой функции $v(\cdot)$ решение $y(t) = y(t, x_0, \tilde{\mathcal{F}}_1(\cdot), v(\cdot))$ задачи Коши (2), (3) с $\mathcal{F}_1 = \tilde{\mathcal{F}}_1$ удовлетворяет следующему включению:

$$e^{(\tau_0-t)A} y(t, x_0, \tilde{\mathcal{F}}_1(\cdot), v(\cdot)) \in W(t, \tau_0) \quad (21)$$

для $t \in [0, \tau_0]$.

Допустим, нарушение происходит в момент $\theta \in [0, \tau_0]$, тогда в силу (21) имеем $e^{(\tau_0-\theta)A} y(\theta, x_0, \tilde{\mathcal{F}}_1(\cdot), v(\cdot)) \in W(\theta, \tau_0)$. Но из определения $W(t, \tau)$ следует $W(\theta, \tau_0) \subset W_\theta(\theta, \tau_0)$. Поэтому имеет место включение

$$e^{(\tau_0-\theta)A} y(\theta, x_0, \tilde{\mathcal{F}}_1(\cdot), v(\cdot)) \in W_\theta(\theta, \tau_0).$$

Теперь пусть $\theta \in [0, \tau_0]$ и $\xi \in R^n$ таковы, что $e^{(\tau_0-\theta)A} \xi \in W_\theta(\theta, \tau_0)$. Тогда в силу теоремы 2 из [8] следует существование такого $\mathcal{F}^{\theta, \xi} \in \mathcal{C}$, что для решения $x(t, \mathcal{F}^{\theta, \xi}(\cdot), v(\cdot))$ задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - \alpha_\theta(t) \mathcal{F}^{\theta, \xi}(t, v_t(\cdot)) + v(t), \\ x(\theta) &= \xi, \end{aligned}$$

при произвольной измеримой функции $v(t) \in Q$, $t \geq 0$, выполняется включение

$$x(\tau_0, \mathcal{F}^{\theta, \xi}(\cdot), v(\cdot)) \in M. \quad (22)$$

Положим при $\theta \in [0, \tau_0]$ $\tilde{\mathcal{F}}_2^\theta$ равной $\mathcal{F}^{\theta, \xi}$, где $\xi = y(\theta, x_0, \tilde{\mathcal{F}}_1(\cdot), v(\cdot))$, а при $\theta > \tau_0$ положим $\tilde{\mathcal{F}}_2^\theta$ равной $\tilde{\mathcal{F}}_2^{\tau_0}$. Используя соотношения (21), (22) и определение $\tilde{u} = (\tilde{\mathcal{F}}_1, \tilde{\mathcal{F}}_2^\theta)$, нетрудно видеть, что стратегия \tilde{u} гарантирует для преследующего игрока окончание преследования на множество M за время τ_0 при произвольной измеримой $v(t) \in Q$, $t \geq 0$, и при любом $\theta \geq 0$. Итак, теорема доказана.

Литература

1. Никольский М. С. // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287, № 6. С. 1317—1320.
2. Никольский М. С. // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1988. Т. 185. С. 181—186.
3. Благодатских В. И., Филиппов А. Ф. // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 169. С. 194—252.
4. Понтрягин Л. С. // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 764—766.
5. Понтрягин Л. С. // Мат. сб. Нов. сер. 1980. Т. 112, вып. 3. С. 307—330.
6. Никольский М. С. // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1969. № 3. С. 65—73.
7. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М., 1974.
8. Гусятников П. Б. // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, № 5. С. 917—924.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
6 июня 1994 г.