МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 3 (1972), 303—311

УДК 512.4

ПОДАЛГЕБРЫ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ АЛГЕБР МНОГООБРАЗИЯ $\mathfrak{A}_{m,n}$

В. Н. Матус

Многообразие $\mathfrak{A}_{m,n}$ определяется системой n-арных операций $\omega_1, \ldots, \omega_m$, системой m-арных операций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, $1 \leqslant m \leqslant n$, системой тождеств

$$x_1 \ldots x_n\omega_1 \ldots x_1 \ldots x_n\omega_m\varphi_i = x_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$
$$x_1 \ldots x_m\varphi_1 \ldots x_1 \ldots x_m\varphi_n\omega_j = x_j \quad (j = 1, \ldots, m).$$

В статье доказывается, что подалгебра U свободного произведения $\Pi^*_{i\in I}A_i$ алгебр A_i $(i \in I)$ разлагается в свободное произведение непустых пересечений $U \cap A_i$ $(i \in I)$ и свободной алгебры. Библ. 4 назв.

Многообразие $\mathfrak{A}_{m,n}$ (см. [1]—[4]) задается системой n-арных операций $\omega_1, \ldots, \omega_m$, системой m-арных операций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, $1 \leqslant m \leqslant n$, системой тождеств:

$$x_1 \ldots x_n\omega_1 \ldots x_1 \ldots x_n\omega_m\varphi_i = x_i \; (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

$$x_1 \ldots x_m\varphi_1 \ldots x_1 \ldots x_m\varphi_n\omega_j = x_j \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{2}$$

Пусть A_i, $i \in I$,— система алгебр многообразия $\mathfrak{A}_{m,n}$, $A^{(0)} = \bigcup_{i\in I} A_i$, где $A_i \cap A_j = \phi$, если $i \neq j$, $i, j \in I$. Будем считать, что $a_1 \ldots a_n\omega_i$, $i = 1, \ldots, m$, в $A^{(0)}$, если в I найдется индекс i_0 такой, что $a_1, \ldots, a_n \in A_{i_0}$ (а поэтому и $a_1 \ldots a_n\omega_i \in A_{i_0}$). Аналогично $a_1 \ldots a_m\varphi_i$, $i = 1, \ldots, n$, в $A^{(0)}$, если в I существует индекс j_0 такой, что $a_1, \ldots, a_m \in A_{j_0}$ $(a_1 \ldots a_m\varphi_i \in A_{j_0})$.

При таком определении операций множество $A^{(0)}$ превращается в частичную алгебру, в которой выполняются условия:

α) если для некоторых элементов частичной алгебры $y_1, \ldots, y_n$ определены значения $u_j = y_1 \ldots y_n\omega_j$, $j = 1, \ldots, m$, то значение $u_1 \ldots u_m\varphi_i$ также определено и равно y_i для каждого i, $i = 1, \ldots, n$;

β) если для элементов частичной алгебры $y_1, \ldots, y_m$ определены значения $y_1 \ldots y_m\varphi_i = v_i$, $i = 1, \ldots, n$, то значение $v_1 \ldots v_n\omega_j$ также определено и равно y_j для каждого j, $j = 1, \ldots, m$.

Предположим, что мы уже построили последовательность частичных алгебр

$$A^{(0)} \subset A^{(1)} \subset A^{(2)} \subset \ldots \subset A^{(2s-1)} \subset A^{(2s)} \tag{3}$$

такую, что:

1) $A^{(i)}$ удовлетворяет условию α, β, $i = 0, 1, \ldots, 2s$;

2) $A^{(2e+1)} = A^{(2e)} \cup \omega_1(A^{(2e)}) \cup \ldots \cup \omega_m(A^{(2e)})$, где $\omega_j(A^{(2e)})$ обозначает множество термов вида $y_1 \ldots y_n\omega_j$, где $y_1, \ldots, y_n \in A^{(2e)}$ и $y_1 \ldots y_n\omega_j$ в $A^{(2e)}$ не определен, $j = 1, \ldots, m$, $e = 0, 1, 2, \ldots, s-1$;

3) $A^{(2e)} = A^{(2e-1)} \cup \varphi_1(A^{(2e-1)}) \cup \ldots \cup \varphi_n(A^{(2e-1)})$, где $\varphi_i(A^{(2e-1)})$ обозначает множество термов вида $y_1 \ldots y_m\varphi_i$, где $y_1, \ldots, y_m \in A^{(2e-1)}$ и $y_1 \ldots y_m\varphi_i$ в $A^{(2e-1)}$ не определен, $i = 1, \ldots, n$, $e = 1, 2, \ldots, s$;

4) Операции $\omega_1, \ldots, \omega_m, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ в $A^{(2e+1)}$ ($e = 0, 1, \ldots, s-1$) определены по правилу:

$y_1 \ldots y_n\omega_i$, $i = 1, \ldots, m$, в $A^{(2e+1)}$ тогда и только тогда, когда $y_1, \ldots, y_n \in A^{(2e)}$ и либо $y_1 \ldots y_n\omega_i$ в $A^{(2e)}$, либо $y_1 \ldots y_n\omega_i \in \omega_i(A^{(2e)})$;

$y_1 \ldots y_m\varphi_j$, $j = 1, \ldots, n$, в $A^{(2e+1)}$, $y_1, \ldots, y_m \in A^{(2e+1)}$ либо при условии, что $y_1, \ldots, y_m \in A^{(2e)}$ и $y_1 \ldots y_m\varphi_j \in A^{(2e)}$, либо если среди $y_1, \ldots, y_m$ есть y_k, $y_k \notin A^{(2e)}$ и в $A^{(2e)}$ разрешима система уравнений

$$y_j = x_1 \ldots x_n\omega_j \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{4}$$

относительно $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — решение системы (4) (это решение единственно: если $v_1, \ldots, v_n$ — еще одно решение, то из соотношений $y_k \notin A^{(2e)}$, $u_1 \ldots u_n\omega_k = v_1 \ldots v_n\omega_k$ следует, что $u_1 = v_1, \ldots, u_n = v_n$). Тогда считаем, что

$$y_1 \ldots y_m \cdot \varphi_j = u_j, \qquad j = 1, \ldots, n;$$

5) Операции $\omega_1, \ldots, \omega_m, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ в $A^{(2e)}$ ($e = 1, 2, \ldots, s$) определены по правилу:

$y_1 \ldots y_m\varphi_i$, $i = 1, \ldots, n$, в $A^{(2e)}$ тогда и только тогда, когда $y_1, \ldots, y_m \in A^{(2e-1)}$ и либо $y_1 \ldots y_m\varphi_i$ в $A^{(2e-1)}$, либо $y_1 \ldots y_m\varphi_i \in \varphi_i(A^{(2e-1)})$;

$y_1 \ldots y_n\omega_j$, $j = 1, \ldots, m$, в $A^{(2e)}$, $y_1, \ldots, y_n \in A^{(2e)}$ либо при условии, что $y_1, \ldots, y_n \in A^{(2e-1)}$ и $y_1 \ldots y_n\omega_j \in A^{(2e-1)}$, либо если среди $y_1, \ldots, y_n$ есть y_k, $y_k \notin A^{(2e-1)}$ и в $A^{(2e-1)}$ разрешима система уравнений

$$y = x_1 \ldots x_m\varphi_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

относительно $x_1, \ldots, x_m$. Если $u_1, \ldots, u_m$ — решение системы (5) (а из существования следует единственность этого решения), то полагаем $y_1 \ldots y_n\omega_j = u_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Полагаем $A^{(2s+1)} = A^{(2s)} \cup \omega_1(A^{(2s)}) \cup \ldots \cup \omega_m(A^{(2s)})$, где $\omega_j(A^{(2s)})$ обозначает множество термов вида $y_1 \ldots y_n\omega_j$, где $y_1, \ldots, y_n \in A^{(2s)}$ и $y_1 \ldots y_n\omega_j$ в $A^{(2s)}$ не определен, $j = 1, \ldots, m$.

Операции в $A^{(2s+1)}$ зададим по правилу 4) при $e = s$;

$$A^{(2s+2)} = A^{(2s+1)} \cup \varphi_1(A^{(2s+1)}) \cup \ldots \cup \varphi_n(A^{(2s+1)}),$$

где $\varphi_i(A^{(2s+1)})$ обозначает множество термов вида $y_1 \ldots y_m\varphi_i$, где $y_1, \ldots, y_m \in A^{(2s+1)}$ и $y_1 \ldots y_m\varphi_i$ в $A^{(2s+1)}$ не определен, $i = 1, \ldots, n$.

Операции в $A^{(2s+2)}$ задаем правилом 5) при $e = s + 1$. Покажем, что при этом в $A^{(2s+1)}$ и $A^{(2s+2)}$ выполняются условия α, β. Для $A^{(2s+1)}$: условие α выполняется в силу задания операций по правилу 4); пусть для элементов $y_1, \ldots, y_m \in A^{(2s+1)}$ определены значения $v_i = y_1 \ldots y_m\varphi_i$, $i = 1, \ldots, n$, тогда, если $y_1, \ldots, y_m \in A^{(2s)}$, то $y_1 \ldots y_m\varphi_i \in A^{(2s)}$ и в силу предположения 1) $v_1 \ldots v_n\omega_j = y_j$, $j = 1, \ldots, m$. Если же среди $y_1, \ldots, y_m$ есть y_k, $y_k \notin A^{(2s)}$, то система (4) разрешима и $v_1, \ldots, v_n$ — как раз решение этой системы, а поэтому $y_j = v_1 \ldots v_n\omega_j$, $j = 1, \ldots, m$. Для $A^{(2s+2)}$ рассуждение аналогично.

Последовательность (3) пополнилась:

$$A^{(0)} \subset \ldots \subset A^{(2s-1)} \subset A^{(2s)} \subset A^{(2s+1)} \subset A^{(2s+2)}.$$

Пусть $A = \bigcup\limits_{e=0}^{\infty} A^{(e)}$. Тогда $A \in \mathfrak{A}_{m,\,n}$. Покажем, что A является свободным произведением в $\mathfrak{A}_{m,\,n}$ алгебр

A_i, $i \in I$. По построению $A_i \subset A^{(0)} \subset A \forall i$, $i \in I$. Пусть $H \in \mathfrak{A}_{m,\, n}$ и $\rho_i\colon A_i \to H$, $i \in I$,— гомоморфизмы. Тогда $\bigcup\limits_{i \in I} \rho_i = \lambda_0\colon A^{(0)} \to H$ также будет гомоморфизмом. Предположим, что мы построили систему гомоморфизмов $\lambda_0 \subset \lambda_1 \subset \lambda_2 \subset \ldots \subset \lambda_{2s-1} \subset \lambda_{2s}$, где $\lambda_i\colon A^{(i)} \to H$, $i = 0, 1, \ldots, 2s$. Построим тогда отображение λ_{2s+1}: $A^{(2s+1)} \to H$ по правилу: если $y \in A^{(2s)}$, то $y\lambda_{2s+1} = y\lambda_{2s}$; если $y \in A^{(2s+1)} \setminus A^{(2s)}$, то y однозначно представим в виде $y = y_1 \ldots y_n \omega_i$, $i = 1, \ldots, m$. Полагаем в этом случае

$$y\lambda_{2s+1} = y_1\lambda_{2s} \ldots y_n\lambda_{2s}\omega_i. \tag{6}$$

В силу такого определения λ_{2s+1} является $\langle \omega_1, \ldots, \omega_m \rangle$-гомоморфизмом. Пусть теперь для $y_1, \ldots, y_m \in A^{(2s+1)}$ в $A^{(2s+1)}$ определен элемент $y_1 \ldots y_m\varphi_i$. Если $y_1, \ldots, y_m \in A^{(2s)}$, то $y_1 \ldots y_m\varphi_i \in A^{(2s)}$, а поэтому

$$y_1 \ldots, y_m\varphi_i\lambda_{2s+1} =$$
$$= y_1 \ldots y_m\varphi_i\lambda_{2s} = y_1\lambda_{2s} \ldots y_m\lambda_{2s}\varphi_i = y_1\lambda_{2s+1} \ldots y_m\lambda_{2s+1}\varphi_i.$$

Пусть среди $y_1, \ldots, y_m$ есть y_k, $y_k \notin A^{(2s)}$. Тогда в $A^{(2s)}$ разрешима система уравнений (4). Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — решение системы (4). Тогда $y_1 \ldots y_m\varphi_i = u_i$, а поэтому в силу (6) $y_1 \ldots y_m\varphi_i\lambda_{2s+1} = u_i\lambda_{2s+1} = u_i\lambda_{2s} = u_1\lambda_{2s} \ldots u_n\lambda_{2s}\omega_1 \ldots u_1\lambda_{2s} \ldots u_n\lambda_{2s}\omega_m\varphi_i = y_1\lambda_{2s+1} \ldots y_m\lambda_{2s+1}\varphi_i$. Таким образом, λ_{2s+1} — гомоморфизм и

$$\lambda_0 \subset \lambda_1 \subset \ldots \subset \lambda_{2s-1} \subset \lambda_{2s} \subset \lambda_{2s+1}. \tag{7}$$

Построим гомоморфизм λ_{2s+2}: $A^{(2s+2)} \to H$ по правилу: если $y \in A^{(2s+1)}$, то $y\lambda_{2s+2} = y\lambda_{2s+1}$; если $y \in A^{(2s+2)} \setminus A^{(2s+1)}$, то $y \in \varphi_i(A^{(2s+1)})$ и $y = y_1 \ldots y_m\varphi_i$, $i = 1, \ldots, n$. Полагаем тогда

$$y\lambda_{2s+2} = y\lambda_{2s+1} \ldots y_m\lambda_{2s+1}\varphi_i. \tag{8}$$

По определению, λ_{2s+2} является $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$-гомоморфизмом. Пусть для элементов $y_1, \ldots, y_n \in A^{(2s+2)}$ $y_1 \ldots y_n\omega_j \in A^{(2s+2)}$. Если $y_1, \ldots, y_n \in A^{(2s+1)}$, то $y_1 \ldots y_n\omega_j \in A^{(2s+1)}$. В этом случае, по построению, λ_{2s+2} сохраняет ω_j: $y_1 \ldots y_n\omega_j\lambda_{2s+2} = y_1 \ldots y_n\omega_j\lambda_{2s+1} = y_1\lambda_{2s+1} \ldots y_n\lambda_{2s+1}\omega_j = y_1\lambda_{2s+2} \ldots y_n\lambda_{2s+2}\omega_j$. Пусть теперь y_k — один из $y_1, \ldots, y_n$ и $y_k \notin A^{(2s+1)}$. Тогда в $A^{(2s+1)}$ разрешима система уравнений (5). Пусть $u_1, \ldots, u_m$ — решение этой системы. Тогда $y_1 \ldots y_n\omega_j = u_j$. В силу (8) $y_1 \ldots y_n\omega_j\lambda_{2s+2} = u_j\lambda_{2s+2} = u_j\lambda_{2s+1} = u_1\lambda_{2s+1} \ldots u_m\lambda_{2s+1}\ \varphi_1 \ldots u_1\lambda_{2s+1} \ldots u_m\lambda_{2s+1}\varphi_n\omega_j = y_1\lambda_{2s+2} \ldots y_n\lambda_{2s+2}\omega_j$. Последовательность (7) пополнилась:

$$\lambda_0 \subset \lambda_1 \subset \ldots \subset \lambda_{2s} \subset \lambda_{2s+1} \subset \lambda_{2s+2}.$$

Пусть $\lambda = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \lambda_i$: λ: $A \to H$ и λ является гомоморфизмом. Мы доказали, что A является свободным произведением алгебр A_i, $i \in I$: $A = \Pi^*_{i\in I}A_i$.

ТЕОРЕМА. *Подалгебра U свободного произведения $\Pi^*_{i\in I}A_i$ алгебр A_i $(i \in I)$ разлагается в свободное произведение непустых пересечений $U \cap A_i$ $(i \in I)$ и свободной алгебры.*

Доказательство. Положим, что U_{2e+1} обозначает множество термов $y_1 \ldots y_n\omega_i$, $i = 1, \ldots, m$, таких, что $y_1 \ldots y_n\omega_i \in U \cap \omega_i(A^{(2e)})$, а среди $y_1, \ldots, y_n$ существует y_k такой, что $y_k \notin U$, $e = 0, 1, 2, \ldots$ U_{2e+2} обозначает множество термов $y_1 \ldots y_m\varphi_i$, $i = 1, \ldots, n$, таких, что $y_1 \ldots y_m\varphi_i \in U \cap \varphi_i(A^{(2e+1)})$ и среди $y_1, \ldots, y_m$ есть y_k такой, что $y_k \notin U$, $e = 0, 1, 2, \ldots$ Пусть $Z = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_{2s+1} \cup U_{2s+2} \cup \ldots$ Докажем, что $U = \Pi^*_{i\in I}(U \cap A_i) * F(Z)$, где $F(Z)$ — свободная $\mathfrak{A}_{m,n}$-алгебра с системой свободных образующих Z.

Проверим вначале, что Z является $\langle\omega_1, \ldots, \omega_m, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\rangle$-чистым множеством. Множество U_1 состоит из термов $y_1 \ldots y_n\omega_i \in \omega_i(A^{(0)})$, $i = 1, \ldots, m$, где $y_1, \ldots, y_n \in A^{(0)}$ и среди $y_1, \ldots, y_n$ есть элемент y_k, $y_k \notin U$, в то время как все $y_1 \ldots y_n\omega_i$ из U. По построению, U_1 является $\langle\omega_1, \ldots, \omega_m\rangle$-чистым. U_1 также $\langle\varphi_1, \ldots, \varphi_n\rangle$-чисто, так как результат операции φ_i над элементами из $A^{(1)} \setminus A^{(0)}$ принадлежит $A^{(0)}$. Рассмотрим $U_1 \cup U_2$. Пусть $y_1, \ldots, y_n \in U_1 \cup U_2$ и в $U_1 \cup U_2$ определен терм $y_1 \ldots y_n\omega_i$, $i = 1, \ldots, m$. Если среди $y_1, \ldots, y_n$ есть элементы из U_1, то обязательно есть и элементы из U_2 (U_1 — $\langle\omega_i\rangle$-чисто), а поэтому разрешима в $A^{(1)}$ система уравнений (5). Пусть $y_k \notin U_1$, $k = 1, \ldots, n$. Если $u_1, \ldots, u_m$ — решение системы (5), то $y_1 \ldots y_n\omega_i = u_i \in U$, $\forall i$, $i = 1, \ldots, m$, а поэтому $u_1 \ldots u_m\varphi_k = y_k \notin U_2$. Это противоречие доказывает $\langle\omega_1, \ldots, \omega_m\rangle$-

чистоту множества $U_1 \cup U_2$. По определению U_2 и заданию операций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ в $A^{(2)}$ $U_1 \cup U_2$ будет $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$-чистым.

Предположим, что мы доказали $\langle \omega_1, \ldots, \omega_m, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$-чистоту множества $\bigcup_{i=1}^{2s} U_i$.

Рассмотрим множество $\bigcup_{i=1}^{2s+1} U_i$. Само задание множества $\bigcup_{i=1}^{2s+1} U_i$ обеспечивает его $\langle \omega_1, \ldots, \omega_m \rangle$-чистоту. Пусть $y_1, \ldots, y_m \in \bigcup_{i=1}^{2s+1} U_i$ и $y_1 \ldots y_m \varphi_i \in \bigcup_{i=1}^{2s+1} U_i$. В силу чистоты $\bigcup_{i=1}^{2s} U_i$ среди $y_1, \ldots, y_m$ есть y_k такой, что $y_k \in U_{2s+1}$. Тогда в $A^{(2s)}$ разрешима система уравнений (4). Если $u_1, \ldots, u_n$ — решение этой системы, то $y_k = u_1 \ldots u_n \omega_k \notin U_{2s+1}$, вопреки предположению, так как $u_1, \ldots, u_n \in U$.

Рассмотрим множество $\bigcup_{i=1}^{2s+2} U_i$. Это множество $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$-чисто по самому его заданию. Пусть $y_1, \ldots, y_n$, $y_1 \ldots y_n \omega_i \in \bigcup_{i=1}^{2s+2} U_i$. Среди элементов $y_1, \ldots, y_n$ есть тогда y_k, $y_k \in U_{2s+2}$. В $A^{(2s+1)}$ разрешима система (5), и если $u_1, \ldots, u_m$ — решение системы (5), то $y_k = u_1 \ldots u_m \varphi_k \notin U_{2s+2}$, так как $y_1 \ldots y_n \omega_i = u_i \in U \, \forall i$, $i = 1, \ldots, m$.

Таким образом, Z — $\langle \omega_1, \ldots, \omega_m, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$-чистое множество. Покажем, что $\{Z\} = F(Z)$. Пусть $H \in \mathfrak{A}_{m,n}$ и $\rho\colon Z \to H$ — произвольное отображение. Будем считать, что $\rho = \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho_i$, где $\rho_i\colon U_i \to H$. Зададим отображение $\bar{\rho}_2\colon A^{(2)} \cap \{Z\} \to H$ по правилу: если $y \in A^{(1)} \cap \{Z\} = U_1$, то $y\bar{\rho}_2 = y\rho_1$; если $y \in U_2$, то $y\bar{\rho}_2 = y_2\rho$; если

$$y \in A^{(2)} \cap \{Z\} \setminus [U_1 \cup U_2],$$

то $y = y_1 \ldots y_m \varphi_i$ (причем это представление однозначно: $y \in \varphi_i(A^{(1)})$), где $y_1, \ldots, y_m \in A^{(1)} \cap \{Z\}$. Полагаем в этом случае

$$y\bar{\rho}_2 = y_1\rho_1 \ldots y_m\rho_1\varphi_i. \tag{9}$$

Так определенное отображение $\bar\rho_2$ является в силу (9) $\langle\varphi_1, \ldots, \varphi_n\rangle$-гомоморфизмом и $\rho_1 \cup \rho_2 \subset \bar\rho_2$. Пусть в $A^{(2)} \cap \{Z\}$ для некоторых $y_1, \ldots, y_n$ определен терм $y_1 \ldots y_n\omega_i$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда среди $y_1, \ldots, y_n$ существует y_k, $y_k \notin A^{(1)} \cap \{Z\}$ и разрешима система (5). Пусть $u_1, \ldots, u_m$ — решение системы (5). Тогда $u_1, \ldots, u_m \in A^{(1)} \cap \{Z\}$. Получаем, $y_1 \ldots y_n\omega_i = u_i$. В силу (9) $y_1 \ldots y_n\omega_i\bar\rho_2 = u_i\bar\rho_2 = u_i\rho_1 = u_1\rho_1 \ldots u_m\rho_1\varphi_1 \ldots u_1\rho_1 \ldots u_m\rho_1\varphi_n\omega_1 = y_1\bar\rho_2 \ldots y_m\bar\rho_2\omega_i$, а поэтому $\bar\rho_2$ является гомоморфизмом. Пусть мы уже построили гомоморфизм $\bar\rho_{2s}$: $A^{(2s)} \cap \{Z\} \to H$, который продолжает отображение $\bigcup\limits_{i=1}^{2s} \rho_i$. Зададим отображение $\bar\rho_{2s+1}$: $A^{(2s+1)} \cap \{Z\} \to H$ по правилу: если $y \in A^{(2s)} \cap \{Z\}$ то $y\bar\rho_{2s+1} = y\bar\rho_{2s}$; если $y \in U_{2s+1}$; то $y\bar\rho_{2s+1} = y\rho_{2s+1}$, если $y \in A^{(2s+1)} \cap \{Z\} \setminus [(A^{(2s)} \cap \{Z\}) \cup U_{2s+1}]$, то $y = y_1 \ldots y_n\omega_i$, где $y_1, \ldots, y_n \in A^{(2s)} \cap \{Z\}$, и полагаем в этом случае

$$y\bar\rho_{2s+1} = y_1\bar\rho_{2s} \ldots y_n\bar\rho_{2s}\omega_i. \tag{10}$$

Это правило гарантирует $\langle\omega_1, \ldots, \omega_m\rangle$-гомоморфность отображения $\bar\rho_{2s+1}$. Пусть для $y_1, \ldots, y_m \in A^{(2s+1)} \cap \{Z\}$ в $A^{(2s+1)} \cap \{Z\}$ определен $y_1 \ldots y_m\varphi_i$. Тогда, если $y_1, \ldots, y_m \in A^{(2s)}$, то $y_1 \ldots y_m\varphi_i \in A^{(2s)} \cap \{Z\}$, а поэтому $y_1 \ldots y_m\varphi_i\bar\rho_{2s+1} = y_1 \ldots y_m\varphi_i\bar\rho_{2s} = y_1\bar\rho_{2s} \ldots y_m\bar\rho_{2s}\varphi_i = y_1\bar\rho_{2s+1} \ldots y_m\bar\rho_{2s+1}\varphi_i$. Если же среди $y_1, \ldots, y_m$ есть y_k, $y_k \in \omega_k(A^{(2s)})$, то в $A^{(2s)}$ разрешима система (4). Если $u_1, \ldots, u_n$ — решение системы (4), то

$$y_1 \ldots y_m\varphi_i = u_i, \qquad i = 1, \ldots, n; \tag{11}$$

$$y_j = u_1 \ldots u_n\omega_j, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{12}$$

Можно утверждать, что $y_k \notin U_{2s+1}$. Действительно, $y_1, \ldots, y_m \in U$ по предположению; из (11) следует, что $u_1, \ldots, u_n \in U$, а поэтому $y_k = u_1 \ldots u_n\omega_k$ в U_{2s+1} лежать не может. Тогда $u_1, \ldots, u_n \subset A^{(2s)} \cap \{Z\}$, а поэтому в силу (10), (12) $y_1 \ldots y_m\varphi_i\bar\rho_{2s+1} = u_i\bar\rho_{2s+1} = u_i\bar\rho_{2s} = u_1\bar\rho_{2s} \ldots u_n\bar\rho_{2s}\omega_1 \ldots u_1\bar\rho_{2s} \ldots u_n\bar\rho_{2s}\omega_m\varphi_i = y_1\bar\rho_{2s+1} \ldots y_m\bar\rho_{2s+1}\varphi_i$.

Мы доказали гомоморфность отображения $\bar\rho_{2s+1}$. Аналогично строится $\bar\rho_{2s+2}$ и т. д. $\rho = \bigcup\limits_{i=2}^{\infty} \bar\rho_i$ будет гомоморфизмом $\{Z\}$ в H. Итак, $\{Z\} = F(Z)$. Мы доказали, что $F(Z) \subset U$; по условию $A_i \cap U \subset U$, $i \in I$. Пусть H — произвольная $\mathfrak{A}_{m,n}$-алгебра и τ_0: $F(Z) \to H$, τ_i: $U \cap \cap A_i \to H$, $i \in I$,— некоторые гомоморфизмы. Отображение $\bigcup_{i \in I} \tau_i : \bigcup_{i \in I} (U \cap A_i) \to H$ будет гомоморфизмом по определению операций в $A^{(0)}$. Определим отображение $\bar{\tau}_1$: $A^{(1)} \cap U \to H$ по правилу: если $y \in A^{(0)} \cap U$, то $y\bar{\tau}_1 = y(\bigcup_{i \in I} \tau_i)$; если $y \in A^{(1)} \cap F(Z) = U_1$, то $y\bar{\tau}_1 = = y\tau_0$; если $y \in U \cap A^{(1)} \setminus [(U \cap A^{(0)}) \cup U_1]$, то $y = = y_1 \ldots y_n\omega_i$, $i = 1, \ldots, m$ $(y_1, \ldots, y_n \in A^{(0)} \cap U)$. Полагаем в этом случае

$$y\bar{\tau}_1 = y_1(\bigcup_{i \in I} \tau_i) \ldots y_n(\bigcup_{i \in I} \tau_i)\,\omega_i. \tag{13}$$

Это определение гарантирует $\langle \omega_1, \ldots, \omega_m \rangle$-гомоморфность $\bar{\tau}_1$. Пусть для элементов $y_1, \ldots, y_m \in A^{(1)} \cap \cap U y_1 \ldots y_m\varphi_j$ в $A^{(1)} \cap U$. Если $y_1, \ldots, y_m \in A^{(0)}$, то $y_1 \ldots y_m\varphi_j$ в $A^{(0)} \cap U$, а поэтому $\bar{\tau}_1$ сохраняет операцию φ_j, так как на $A^{(0)} \cap U\bar{\tau}_1$ совпадает с $\bigcup_{i \in I} \tau_i$. Если среди $y_1, \ldots, y_m$ есть y_k, $y_k \notin A^{(0)}$, то в $A^{(0)}$ разрешима система (4). Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — решение этой системы. Тогда $u_1, \ldots, u_n \in U \cap A^{(0)}$, а поэтому в силу (13)

$$y_1 \ldots y_m\varphi_j\bar{\tau}_1 = u_j\bar{\tau}_1 = u_j(\bigcup_{i \in I} \tau_i) = u_1(\bigcup_{i \in I} \tau_i) \ldots u_n(\bigcup_{i \in I} \tau_i)\,\omega_1 \ldots$$
$$\ldots u_1(\bigcup_{i \in I} \tau_i) \ldots u_n(\bigcup_{i \in I} \tau_i)\,\omega_m\varphi_j = y_1\bar{\tau}_1 \ldots y_m\bar{\tau}_1\varphi_j.$$

Мы доказали гомоморфность отображения $\bar{\tau}_1$.

Пусть мы построили уже последовательность гомоморфизмов

$$\bar{\tau}_1 \subset \bar{\tau}_2 \subset \ldots \subset \bar{\tau}_{2e-2} \subset \bar{\tau}_{2e-1}, \tag{14}$$

где $\bar{\tau}_i$: $A^{(i)} \cap U \to H$, $i = 1, \ldots, 2e-1$. Определим отображение $\bar{\tau}_{2e}$: $U \cap A^{(2e)} \to H$ по правилу: если $y \in U \cap A^{(2e-1)}$, то $y\bar{\tau}_{2e} = y\bar{\tau}_{2e-1}$; если $y \in U_{2e}$, то $y\bar{\tau}_{2e} = y\bar{\tau}_0$; если $y \in U \cap A^{(2e)} \setminus [(A^{(2e-1)} \cap U) \cup U_{2e}]$, то $y = y_1 \ldots y_m\varphi_i$, $i = 1, \ldots, n$, $(y_1, \ldots, y_m \in U \cap A^{(2e-1)})$, а поэтому полагаем, что

$$y\bar{\tau}_e = y_1\bar{\tau}_{2e-1} \ldots y_m\bar{\tau}_{2e-1}\varphi_i. \tag{15}$$

Это определение задает $\bar{\tau}_{2e}$ $\langle\varphi_1, \ldots, \varphi_n\rangle$-гомоморфизмом. Пусть для элементов $y_1, \ldots, y_n \in U \cap A^{(2e)}$ $y_1 \ldots y_n\omega_j$, $j = 1, \ldots, m$, в $U \cap A^{(2e)}$. Тогда если $y_1, \ldots, y_n \in A^{(2e-1)}$, то $y_1 \ldots y_n\omega_j \in U \cap A^{(2e-1)}$, а поэтому по определению $\bar{\tau}_{2e}$ сохраняет операцию ω_j. Предположим теперь, что среди $y_1, \ldots, y_n$ есть y_k, $y_k \notin A^{(2e-1)}$. Тогда в $A^{(2e-1)}$ разрешима система (5). Если $u_1, \ldots, u_m$ — решение системы (5), то $u_1, \ldots, u_m \in U \cap A^{(2e-1)}$, а поэтому в силу (15)

$$y_1 \ldots y_n\omega_j\bar{\tau}_{2e} = u_j\bar{\tau}_{2e} = u_j\bar{\tau}_{2e-1} = u_1\bar{\tau}_{2e-1} \ldots u_m\bar{\tau}_{2e-1}\varphi_1 \ldots$$
$$\ldots u_1\bar{\tau}_{2e-1} \ldots u_m\bar{\tau}_{2e-1}\varphi_n\omega_j = y_1\bar{\tau}_{2e} \ldots y_m\bar{\tau}_{2e}\omega_j.$$

Последовательность (14) получила пополнение: $\bar{\tau}_{2e-1} \subset \bar{\tau}_{2e}$.

В итоге $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bar{\tau}_i = \bar{\tau}$ будет гомоморфизмом из U в H, что и доказывает теорему.

З а м е ч а н и е. Многообразие $\mathfrak{B}_{m,n}$ определяется системой операций $\omega_1, \ldots, \omega_m$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и системой тождеств (1), (см. [1]). Для этого многообразия также справедлива доказанная теорема.

Армавирский государственный педагогический институт

Поступило 18.V.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С м и р н о в Д. М., Решетки многообразий и свободные алгебры, Сиб. матем. ж., т. 10, № 5 (1969), 1144—1160.

[2] А к а т а е в А. А., С м и р н о в Д. М., Решетки подмногообразий многообразий алгебр, семинар «Алгебра и логика», Новосибирск, 7, № 1 (1968), 5—25.

[3] А к а т а е в А. А., О многообразиях $\mathfrak{A}$ m, n, семинар «Алгебра и логика», Новосибирск, 9, № 2 (1970), 127—136.

[4] S w i e r c z k o w s k i S., On isomorphic free algebras, Fund. Math., 50, № 1 (1961), 35—44.