А. Д. Мышкис, Периодические решения простейшей непрерывной системы с запаздыванием и релаксацией,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 2, 233–240

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 2, с. 233–240

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929.5

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И РЕЛАКСАЦИЕЙ

© 2005 г. А. Д. Мышкис

1. Введение. Цель этой статьи – исследовать неотрицательные периодические решения уравнения

$$\dot{x}(t) = -kx(t-1) \quad (0 < t < \infty), \tag{1}$$

удовлетворяющие условию релаксации

$$x(t) = 0 \Rightarrow x(t^+) = 1. \tag{2}$$

Сформулированная задача для уравнений существенно более общего вида в предположении, обеспечивающем наличие достаточно частых моментов разрыва решения, рассмотрена в работах [1] и [2]. В них получены условия, достаточные для существования и единственности (с точностью до произвольного сдвига вдоль оси t) периодического решения, к которому сходятся все остальные решения при $t \to \infty$. Однако упомянутое предположение для уравнения (1) не выполнено (оно выполняется, если, например, прибавить к правой части постоянное отрицательное слагаемое), что делает необходимым при исследовании задачи (1), (2) привлечь новые соображения. Отметим, что аналогичная задача для простейшей дискретной системы с релаксацией рассмотрена в работе [3].

2. Теорема о сравнении решений. Решение задачи (1), (2) однозначно определяется заданием начальной функции

$$x(t) = \varphi(t) \quad (-1 \le t \le 0). \tag{3}$$

Будем впредь предполагать, что начальная функция $\varphi : [-1, 0] \to [0, \infty)$ непрерывная, причем если $\varphi(0) = 0$, то $x(0^+) = 1$. Поэтому при $t = 1$ уравнение (1) считаем выполненным отдельно для левой и для правой производных функции φ. Аналогичное замечание относится к значениям $t = \bar{t} + 1$, где $\bar{t}$ – любая из точек разрыва решения, возникающих из-за условия (2).

Решение задачи (1)–(3) при сформулированных условиях можно строить методом шагов, т.е. последовательно на интервалах $[0, 1]$, $[1, 2], \ldots,$ причем последовательные точки разрыва решения, если они имеются, отстоят друг от друга не ближе, чем на $\max\{\max \varphi(t), 1\}/k$. Таким образом, это решение существует на $[0, \infty)$ и единственно на любом интервале $[0, T)$ $(0 < T \le \infty)$.

Следующая теорема о сравнении решения x задачи (1)–(3) с решением $\tilde{x}$ аналогичной задачи, в которой k заменено на $\tilde{k}$, а φ – на $\tilde{\varphi}$, будет существенна в дальнейшем.

Теорема 1. *Пусть* $\tilde{k} \ge k$, $\tilde{\varphi}(t) \ge 1$, $\varphi(t) \le 1$ $(-1 \le t \le 0)$ *и* $\tilde{x}(t) > 0$ *на некотором интервале* $[0, \tilde{t})$. *Тогда* $x(t) \ge \tilde{x}(t)$ *на этом интервале.*

Доказательство. Если

$$\varphi(0^-) = \tilde{\varphi}(0^-) = 1, \tag{4}$$

то эта теорема непосредственно вытекает из теоремы о сравнении решений общих линейных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом (см. [4, § 29, теорема 35]).

Пусть теперь условие (4) нарушено. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ заменим на интервале $[-1/n, 0]$ функции φ и $\tilde{\varphi}$ линейными, сохранив их значения при $t = -1/n$ и положив их равными единице при $t = 0$. Обозначим измененные начальные функции соответственно через φ_n и $\tilde{\varphi}_n$, а решения полученных начальных задач через x_n и $\tilde{x}_n$. Переходя к интегральному уравнению, равносильному задаче (1), (3), и применяя метод шагов, проверяем, что на любом интервале $[0, \bar t] \subset [0, \tilde t)$ при $n \to \infty$ имеет место равномерная сходимость $x_n \to x$, $\tilde x_n \to \tilde x$. Но функции φ_n и $\tilde\varphi_n$ удовлетворяют условию (4), и потому в силу утверждения предыдущего абзаца получаем, что $x_n(t) \ge \tilde x_n(t)$ $(0 \le t \le \bar t)$ для всех достаточно больших n. Переходя к пределу при $n \to \infty$, а затем при $\bar t \to \tilde t^-$, завершаем доказательство теоремы 1.

3. Условие наличия у решения разрывов.

Теорема 2. *Пусть* $0 \le \varphi(t) \le 1$ $(0 \le t \le 1)$. *Тогда при* $0 < k \le 1/e$ *решение задачи (1)–(3) не имеет при* $t > 0$ *разрывов. Если же* $k > 1/e$, *то это решение имеет бесконечную последовательность точек разрыва.*

Доказательство. Пусть $0 \le \varphi(t) \le 1$ $(0 \le t \le 1)$ и $0 < k \le 1/e$. Тогда, сравнив на основании теоремы 1 решение $x(t)$ задачи (1)–(3) с решением $\tilde x(t) := e^{-t}$ уравнения (1) при $\tilde k = 1/e$, получим, что $x(t) \ge 1/t$ $(0 < t < \infty)$, откуда следует отсутствие нулей*) у $x(t)$ при $t > 0$.

Если же $k > 1/e$, то утверждение теоремы 2 сразу следует из теоремы о нулях решений линейных дифференциальных уравнений первого порядка общего вида устойчивого типа с запаздывающим аргументом (см. [4, § 34, теорема 49]). Теорема доказана.

Из теоремы 2 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Если* $0 < k \le 1/e$, *то задача (1), (2) не имеет периодических решений.*

Так как наша основная цель – исследование периодических решений, то впредь без особой оговорки будем предполагать, что $k > 1/e$.

4. Решения специального вида. Обозначим через $x_k(t)$ $(0 \le t < \infty)$ решение уравнения (1) при начальной функции $\varphi(t) \equiv 0$. С помощью индукции по n нетрудно проверить явное выражение для $x_k(t)$ при $t > 0$:

$$x_k(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-k)^j}{j!}(t-j)^j \quad (n \le t \le n+1; \quad n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Через $x_k(t)$ выражается решение уравнения (1) при любой начальной функции φ:

$$x(t) = x_k(t) - k\int_{-1}^{0} x_k(t-\tau-1)\varphi(\tau)\,d\tau \quad (0 < t < \infty). \tag{6}$$

Для решения задачи (1)–(3) формула (6) справедлива до его первой положительной точки разрыва.

Обозначим через D_k наименьший положительный нуль функции $x_k(t)$. Сравнивая функции x_k при различных значениях k с помощью теоремы 1 (при этом за начальную точку надо принять $t = 1$), получаем, что функция $k \mapsto D_k$ убывающая, причем $D_{(1/e)^+} = \infty$, $D_\infty = 1$. Из неравенства $\dot x_k(D_k) < 0$ и непрерывной зависимости решения задачи (1), (3) от (k, t) следует, что функция $k \mapsto D_k$ непрерывная. Нетрудно проверить также, что дуги $(1 < t < D_k$, $x = x_k(t))$ заполняют область $(1 < t < \infty$, $0 < x < x_{1/e}(t))$, причем через каждую ее точку проходит ровно одна такая дуга.

Функцию x_k можно применить для двусторонней оценки решения задачи (1)–(3). Имеет место следующая

Теорема 3. *При любой начальной функции* φ *для первого нуля* D *решения* $x(t)$ *задачи (1)–(3) справедлива оценка* $D_k - 1 \le D \le D_k$. *Соответствующая оценка решения имеет вид*

$$x(t) \ge x_k(t+1) \quad (0 \le t \le D_k), \qquad x(t) \le \left[1 - k\int_{-1}^{0}\varphi(\tau)\,d\tau\right] x_k(t) \quad (1 \le t \le D).$$

(Конечно, последняя оценка содержательна только если $D \ge 1$.)

*) Это утверждение ранее другим способом доказал А.А. Сеславин.

Доказательство. Сравнивая с помощью теоремы 1 решение $x(t)$ с функцией $t \mapsto x_k(t+1)$, для которой начальной функцией служит $\tilde{\varphi}(t) \equiv 1$, получаем, что $x(t) \geq x_k(t+1)$ $(0 \leq t \leq$ $\leq D_k - 1)$, а потому $D \geq D_k - 1$.

Докажем теперь, что $D \leq D_k$. В самом деле, если $\min\limits_{t\in(0,1]} x(t) = 0$ (легко видеть, что этот минимум достигается), то утверждение тривиально. Пусть $\min\limits_{t\in(0,1]} x(t) > 0$. Тогда решение $x(t)$ на $(0,1]$ – невозрастающая функция. Приняв $t = 1$ за начальную точку, сравним с помощью теоремы 1 решения $x(t)/x(1)$ и $x_k(t)$ уравнения (1). Мы получим, что $x_k(t) \geq x(t)/x(1)$ при $1 \leq t < D$, откуда сразу следует, что $D \leq D_k$. Для последней оценки решения надо заметить, что если $D \geq 1$, то

$$x(1) = x(0^+) + \int\limits_0^1 \dot{x}(t)\,dt = 1 - k\int\limits_{-1}^0 \varphi(\tau)\,d\tau.$$

Теорема доказана.

Отметим, что оценки, приведенные в теореме 3, в некотором смысле являются точными: если $\varphi(\tau) \equiv 1$ $(\equiv \varphi_k(\tau))$, то оценки D и $x(t)$ снизу (соответственно сверху) превращаются в равенства.

5. Периодические решения с рациональным периодом. Периодическое решение $x : \mathbb{R} \to [0,1)$ задачи (1), (2) с наименьшим периодом $T_x > 0$ назовем *правильным*, если сужение x на любой интервал $[\tau, \tau + T_x]$ $(\tau \in \mathbb{R})$ имеет ровно одну точку разрыва. В настоящей работе будут рассматриваться только правильные периодические решения, поэтому слово “правильные” мы будем опускать.

Докажем простое утверждение, полезное в дальнейшем.

Теорема 4. *Пусть $T_x = m/n$, где правая часть представляет собой несократимую дробь, а τ – какая-либо из точек разрыва T_x-периодического решения x задачи (1), (2). Тогда это решение на каждом интервале $(\tau + jn, \tau + (j+1)n]$ $(j \in \mathbb{R})$ представляет собой линейную комбинацию функций* $\exp\{-k[\exp(2\pi i l/m)]t\}$ $(l = 1, 2, \ldots, m)$.

Доказательство. В самом деле, для t из любого такого интервала

$$\dot{x}(t) = -kx(t-1), \quad \ddot{x}(t) = -k\dot{x}(t-1) = (-k)^2 x(t-2), \ldots,$$

$$x^{(m)}(t) = (-k)^m x(t-m) = (-k)^m x(t - nT_x) = (-k)^m x(t).$$

Значит, на этом интервале имеем $x(t) = \sum_{l=1}^m a_l e^{p_l t}$, где $p_l (= p_{l,m,k}) := -k\exp(l\pi i/m)$, а $\{a_l\}$ – некоторые постоянные. Теорема доказана.

Рассмотрим более подробно случай целочисленного периода $T_x = m$. В силу теоремы 4 для периодического решения $x(t)$ с разрывом при $t = 0$ можем записать

$$x(t) = \sum_{l=1}^m a_l e^{p_l t} \quad (-1 < t \leq 0). \tag{7}$$

Так как решение $x(t)$ на интервале $(0,1]$ представляет собой линейную комбинацию таких же экспонент, то, интегрируя обе части уравнения (1), на этом интервале получаем

$$x(t) = -k\sum_{l=1}^m \frac{a_l}{p_l} e^{p_l(t-1)} \quad (0 < t \leq 1). \tag{8}$$

Переходя на предыдущие интервалы длины 1, аналогично получаем

$$x(t) = (-k)^j \sum_{l=1}^m \frac{a_l}{p_l^j} e^{p_l(t-j)} \quad (j-1 < t \leq j), \quad j = 2, \ldots, m. \tag{9}$$

Условие (2) и требование непрерывности решения при $0 < t \le m$ можно записать в виде равенств

$$x(0^+) = 1, \quad x(1) = x(1^+), \quad x(2) = x(2^+), \dots, \quad x(m-1) = x((m-1)^+), \quad x(m) = 0,$$

которые с помощью формул (8), (9) приобретают вид

$$\sum_{l=1}^{m}\left(1+\frac{k}{p_l}e^{-p_l}\right)a_l = -1, \quad \sum_{l=1}^{m}\left(1+\frac{k}{p_l}e^{-p_l}\right)\frac{1}{p_l^j}a_l = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \quad \sum_{l=1}^{m} a_l = 0. \qquad (10)$$

Первые m из этой системы уравнений, рассматриваемые относительно величин

$$\{(1 + (k/p_l)e^{-p_l})a_l\},$$

имеют в качестве определителя системы определитель Вандермонда, который в данной ситуации не равен нулю. Найдя значения a_l и подставив их в последнее уравнение системы (10), получим уравнение для определения параметра k, откуда с помощью формул (8), (9) найдем периодическое решение с периодом m.

Рассмотрим примеры. Пусть $m = 1$. Тогда $p_1 = -k$, а система уравнений (10) приобретает вид $(1 - e^k)a_1 = -1$, $a_1 = 0$ и, очевидно, противоречива. Таким образом, задача (1), (2) не имеет периодических решений с периодом 1.

Пусть $m = 2$. Тогда $p_1 = k$, $p_2 = -k$, а система уравнений (10) приобретает вид

$$(1 + e^{-k})a_1 + (1 - e^k)a_2 = -1, \quad -(1 + e^{-k})k^{-1}a_1 + (1 - e^k)k^{-1}a_2 = 0, \quad a_1 + a_2 = 0. \qquad (11)$$

Из первых двух уравнений находим $a_1 = -1/(2(1 + e^{-k}))$, $a_2 = 1/(2(e^k - 1))$. Подставляя эти значения в последнее уравнение системы (11), получаем уравнение $\operatorname{sh} k = 1$, откуда $k = \ln(1 + \sqrt{2}) = 0.8814$. Подставив, наконец, найденные значения a_1, a_2 и k в формулы (7)–(9), получим после простых преобразований 2-периодическое решение задачи (1), (2):

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{cases}\operatorname{sh} k|t| & (-1 < t \le 0),\\ \operatorname{ch} k(1-t) & (0 < t \le 1).\end{cases}$$

Из проведенного рассуждения следует, что найденное 2-периодическое решение единственно с точностью до произвольного сдвига вдоль оси t.

При $m = 3$ аналогичная процедура приводит к уравнению

$$2e^k + (e^{k/2} - 2e^{-k/2})(\cos\sqrt{0.75}k - \sqrt{3}\sin\sqrt{0.75}k) - 3 - e^{-k} = 0 \qquad (12)$$

для определения k. Нетрудно проверить, что левая часть этого уравнения при $0 \le k < \infty$ представляет собой непрерывную функцию k, возрастающую от -3 до ∞. Таким образом, уравнение (12) имеет ровно одно решение, которому отвечает единственное 3-периодическое решение задачи (1), (2). Непосредственное вычисление дает значение $k = 0.5788$. Выражения для решения можно выписать с помощью формул (7)–(9) (эти выражения довольно громоздкие).

Вычисления совсем просты при $m = 4$. Здесь уравнение для k имеет вид $2\operatorname{sh} k - 1 = 0$, откуда $k = \ln(0.5 + \sqrt{1.25}) = 0.4812$. Выражение для решения на интервале $(-1, 0]$ имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{4}\left[\frac{\operatorname{ch} kt - \operatorname{sh} k(t+1)}{\operatorname{sh} k} - \frac{\cos kt - \sin k(t+1)}{1 - \sin k}\right].$$

С его помощью легко получить выражения решения и на последующих интервалах длины 1.

Приведенные результаты дают основание для предположения, что для каждого натурального $m \ge 2$ задача (1), (2) имеет ровно одно (с точностью до произвольного сдвига вдоль оси t)

m-периодическое решение, причем соответствующие значения коэффициента $k = k(m)$ образуют убывающую последовательность, сходящуюся к $1/e$.

Для заданных дробных рациональных значений наименьшего периода $T_x = m/n$ к отысканию решения можно применить аналогичные рассуждения. Так, легко проверить, что при $m = 1$ решение не существует.

Возьмем в качестве примера значение $T_x = 2/3$. В силу теоремы 4 имеем

$$x(t) = \begin{cases} a_1e^{kt} + a_2e^{-kt} & (-1/3 < t \le 0), \\ b_1e^{kt} + b_2e^{-kt} & (0 < t \le 1/3), \\ a_1e^{k(t-2/3)} + a_2e^{-k(t-2/3)} & (1/3 < t \le 2/3). \end{cases}$$

Считая, что разрывы решения происходят при значениях t, кратных T_x, из условия (2) получаем равенства

$$a_1 + a_2 = 0, \quad b_1 + b_2 = 1, \quad b_1e^{k/3} + b_2e^{-k/3} = a_1e^{-k/3} + a_2e^{k/3} \tag{13}$$

(последнее равенство означает непрерывность решения при $t = 1/3$). Кроме того, из уравнения (1), примененного на интервале $(2/3, 1)$, получаем тождество

$$kb_1e^{k(t-2/3)} - kb_2e^{-k(t-2/3)} = -ka_1e^{k(t-1)} - ka_2e^{-k(t-1)},$$

равносильное совокупности двух уравнений

$$b_1 = -a_1e^{-k/3}, \quad -b_2 = a_2e^{k/3}. \tag{14}$$

Применение уравнения (1) на смежном интервале $(1, 4/3)$ приводит к тем же уравнениям (14). Система уравнений (13), (14) имеет единственное решение, отвечающее условиям задачи: $k = 3\ln(\sqrt{2}+1) = 2.6441$, $a_1 = -2^{-3/2}$, $a_2 = 2^{-3/2}$, $b_1 = (\sqrt{2}-1)\cdot 2^{-3/2}$, $b_2 = (\sqrt{2}+1)\cdot 2^{-3/2}$. С его помощью легко выписать искомое периодическое решение.

6. Применение теоремы Шаудера. Существование периодического решения уравнения (1) с условием релаксации (2) для любого не слишком большого значения $k > 1/e$ можно получить с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Теорема 5. *Пусть для заданного значения $k > 1/e$ и непрерывной невозрастающей функции $\Phi : [-1, 0] \to [0, 1]$, для которой $\Phi(0) = 0$, выполнено следующее условие: если $\varphi \in C[-1, 0]$ – убывающая функция, причем $0 \le \varphi(t) \le \Phi(t)$ $(-1 \le t \le 0)$, то решение x_φ задачи (1)–(3) имеет первый положительный нуль $D_\varphi > 1$ и удовлетворяет оценке $x_\varphi(D_\varphi + t) \le \Phi(t)$ $(-1 \le t \le 0)$. Тогда задача (1), (2) имеет по крайней мере одно периодическое решение x с наименьшим периодом $T_x > 1$, причем если $x(0) = 0$, то $x(t) \le \Phi(t)$ $(-1 \le t \le 0)$.*

Доказательство. Обозначим через M подмножество банахова пространства $C[-1, 0]$, состоящее из всех невозрастающих функций $\varphi \in C[-1, 0]$, для которых $0 \le \varphi(t) \le \Phi(t)$ $(-1 \le t \le 0)$. Ясно, что M – замкнутое выпуклое множество. Каждому $\varphi \in M$ поставим в соответствие функцию $P\varphi : t \to x_\varphi(D_\varphi + t)$ $(-1 \le t \le 0)$. Из условия теоремы 5 следует, что оператор P отображает множество M в себя. Из теоремы о непрерывной зависимости решения уравнения (1) от начальной функции и из неравенства $\dot{x}_\varphi(D_\varphi) < 0$ вытекает, что этот оператор непрерывный, а из уравнения (1) следует, что множество PM компактное. Значит, согласно теореме Шаудера, существует по крайней мере одна функция $\bar{\varphi} \in M$, для которой $P\bar{\varphi} = \bar{\varphi}$, т.е. $\bar{\varphi}(D_\varphi + t) \equiv \bar{\varphi}(t)$ $(-1 \le t \le 0)$. Отсюда сразу следует, что функция $x_{\bar{\varphi}}$ представляет собой периодическое решение уравнения (1) с условием релаксации (2) и наименьшим периодом $D_{\bar{\varphi}}$. Остальные утверждения теоремы 5 очевидны. Теорема доказана.

Теорема 5 дает возможность указать интервал (не гарантируя его нерасширяемости) значений k, для которых задача (1), (2) имеет хотя бы одно периодическое решение. Приведем пример такого утверждения.

Теорема 6. *Если $1/e < k < 3/2$, то задача (1), (2) имеет по крайней мере одно периодическое решение.*

Доказательство. При $1/e < k \leq 1$ для применения теоремы 5 можно положить $\Phi(t) = |t|$ $(-1 \leq t \leq 0)$. Если же $1 < k < 3/2$, то можно положить

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1 & (-1 \leq t \leq -2/3), \\ (3/2)|t| & (-2/3 \leq t \leq 0). \end{cases}$$

В самом деле, если эту функцию считать начальной, то при $k = 3/2$ решение задачи (1), (3) на интервале $[0, 1]$ имеет вид

$$Y(t) = \begin{cases} 1 - (3/2)t & (0 < t \leq 1/3), \\ (9/8)(t-1)^2 & (1/3 \leq t \leq 1). \end{cases}$$

Если же $1 < k < 3/2$, то при любой начальной функции решение x удовлетворяет неравенству $x(t) > Y(t)$ $(0 < t \leq 1)$, так как при $0 < t \leq 1/3$ оно очевидно, а при $1/3 < t \leq 1$ оно получается от противного с помощью рассмотрения первой точки, в которой неравенство $x(t) > Y(t)$ могло бы нарушиться. Таким образом, получаем неравенство $D_x > 1$, из которого легко выводится соотношение $x(D_x + t) \leq \Phi(t)$ $(-1 \leq t \leq 0)$. Теорема доказана.

Переходя к пределу при $t \to (3/2)^-$, нетрудно показать, что утверждение теоремы 6 справедливо и при $k = 3/2$. Однако эта константа заведомо не является точной (в отличие от $1/e$) и было бы интересно ее увеличить и в конечном счете довести до точной.

7. Применение теоремы о сжимающих отображениях. Здесь мы покажем, что если в задаче (1), (2) значение k достаточно мало́, то для отыскания периодического решения можно применить теорему Банаха о сжимающих отображениях, откуда будет следовать не только существование, но и единственность такого решения.

Теорема 7. *Пусть значение k таково, что $D_k \geq 3$ и выполнено неравенство*

$$s_k := k\left(x_k(D_k - r_k - 2) + \frac{1}{2}x_k(D_k - 2)x_k([\max\{0, D_k - r_k - 3\}]^+)\right)\frac{x_k(D_k - r_k - 1)}{x_k(D_k - 1)} + \\ + kx_k(D_k - r_k - 2) < 1, \tag{15}$$

где r_k определено ниже формулой (16). Тогда задача (1), (2) имеет одно и только одно периодическое решение.

Доказательство. Пусть Φ, M и P означают то же, что в формулировке и доказательстве теоремы 5. Тогда для любой начальной функции φ и соответствующего решения x_φ, имеющего первый положительный нуль D_φ, с помощью теоремы 3 легко проверить, что $x_\varphi(D_\varphi + t) \leq x_k(D_k - 2)(D_\varphi + t)$ $(-1 \leq t \leq 0)$. Поэтому задача об отыскании начальной функции φ, для которой решение x_φ периодично (с периодом D_φ), равносильна задаче об отыскании функции $\varphi \in M$ с $\Phi(t) := x_k(D_k - 2)|t|$ $(-1 \leq t \leq 0)$, для которой $P\varphi = \varphi$.

Нам потребуется оценка разности $D_k - D_\varphi$ сверху. Для этого обозначим через $\bar{x}_\varphi$ решение задачи (1), (3) без условия релаксации (2). Тогда для $\varphi \in M$ из формулы (6) с учетом выпуклости вниз графика функции x_k на интервале $[1, D_k] \supseteq [D_k - 2, D_k]$ получаем оценку

$$\bar{x}_\varphi(D_k) = 0 - k\int_{-1}^{0} x_k(D_k - \tau - 1)\varphi(\tau)\,d\tau \geq -kx_k(D_k - 2)\int_{-1}^{0} x_k(D_k - \tau - 1)|\tau|\,d\tau \geq$$

$$\geq -kx_k(D_k - 2)x_k(D_k - 1)\int_{-1}^{0}(|\tau| + \tau^2)\,d\tau = -\frac{1}{6}kx_k(D_k - 2)x_k(D_k - 1).$$

Аналогично с помощью уравнения (1) получаем

$$\dot{\bar{x}}_\varphi(D_k) = -kx_k(D_k - 1) + k^2\int_{-1}^{0} x_k(D_k - \tau - 2)\varphi(\tau)\,d\tau \leq$$

$$\leq -kx_k(D_k-1)+k^2x_k(D_k-2)\int\limits_{-1}^{0} x_k(D_k-\tau-2)|\tau|\,d\tau \leq$$

$$\leq -kx_k(D_k-1)+k^2x_k(D_k-2)\int\limits_{-1}^{0}[x_k(D_k-2)(1+\tau)-x_k(D_k-1)\tau]|\tau|\,d\tau =$$

$$= -kx_k(D_k-1)+k^2x_k(D_k-2)\left[\frac{1}{6}x_k(D_k-2)+\frac{1}{3}x_k(D_k-1)\right],$$

причем с помощью простого подсчета нетрудно проверить, что при $D_k \geq 3$ последняя правая часть отрицательна. Из этих двух оценок и выпуклости вниз графика функции $\bar{x}_\varphi$ на интервале $[1, D_\varphi+1] \supset [D_\varphi, D_k]$ следует, что

$$D_k - D_\varphi \leq \frac{x_\varphi(D_k)}{\dot{x}_\varphi(D_k)} \leq \frac{x_k(D_k-2)x_k(D_k-1)}{6x_k(D_k-1)-kx_k(D_k-2)[x_k(D_k-2)+2x_k(D_k-1)]} =: r_k. \tag{16}$$

Нетрудно проверить, что в условиях теоремы 7 имеем $r_k < 1$.

Пусть теперь $\varphi, \psi \in M$. Тогда (максимумы берутся по $s \in [-1,0]$) получаем

$$\|P\varphi - P\psi\| =$$

$$= \max\left|x_k(D_\varphi+s)-k\int\limits_{-1}^{0} x_k(D_\varphi+s-\tau-1)\varphi(\tau)\,d\tau - x_k(D_\psi+s)+k\int\limits_{-1}^{0} x_k(D_\psi+s-\tau-1)\psi(\tau)\,d\tau\right| \leq$$

$$\leq \max|x_k(D_\varphi+s)-x_k(D_\psi+s)| + k\max\int\limits_{-1}^{0} x_k(D_\varphi+s-\tau-1)|\varphi(\tau)-\psi(\tau)|\,d\tau +$$

$$+\max\int\limits_{-1}^{0}|x_k(D_\varphi+s-\tau-1)-x_k(D_\psi+s-\tau-1)|\psi(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда применением теоремы Лагранжа о конечных приращениях и уравнения (1) получаем

$$\|P\varphi - P\psi\| \leq kx_k(D_k-r_k-2)|D_\varphi - D_\psi| + kx_k(D_k-r_k-2)\|\varphi-\psi\| +$$
$$+\frac{k}{2}x_k(D_k-2)x_k([\max\{0, D_k-r_k-3\}]^+)|D_\varphi - D_\psi|. \tag{17}$$

Оценим теперь $|D_\varphi - D_\psi|$ через $\|\varphi-\psi\|$. Для этого допустим для определенности, что $D_\varphi \leq D_\psi$. Тогда в силу выпуклости вниз графика функции x_φ на интервале $[D_\varphi, D_\psi]$, уравнения (1) и формулы (6) имеем

$$|D_\varphi - D_\psi| \leq \frac{x_\psi(D_\psi)-\bar{x}_\varphi(D_\psi)}{|\dot{x}_\varphi(D_\psi)|} \leq \frac{k}{kx_\varphi(D_\psi-1)}\int\limits_{-1}^{0}|x_k(D_\psi-\tau-1)\psi(\tau)-x_k(D_\psi-\tau-1)\varphi(\tau)|\,d\tau \leq$$

$$\leq \frac{x_k(D_\psi-1)}{x_\varphi(D_\psi-1)}\|\varphi-\psi\| \leq \frac{x_k(D_k-r_k-1)}{x_k(D_k-1)}\|\varphi-\psi\|.$$

Подставляя эту оценку в неравенство (17) и применяя теорему Банаха о сжимающих отображениях (соотношение $PM \subseteq M$ очевидно), получаем утверждение теоремы 7. Теорема доказана.

Замечание. В условиях теоремы 7 периодические решения устойчивы в следующем смысле. Пусть при заданном значении k периодическое решение X_k задачи (1), (2) определяется начальной функцией φ_k и имеет наименьший период T_k. Тогда для любой начальной функции φ справедливо соотношение $D_\varphi^{n+1} - D_\varphi^n \to T_k$ при $n \to \infty$, где $D_\varphi^1 < D_\varphi^2 < \ldots$ – последовательность всех положительных нулей решения x_φ задачи (1)–(3), и расстояние по Хаусдорфу между графиками функций $t \mapsto x_\varphi^n(D_n + t)$ $(0 < t \leq D_{n+1} - D_n)$ и $t \mapsto x_k(t)$ $(0 < t \leq T_k)$ также стремится к нулю при $n \to \infty$.

Нетрудно доказать, что $s_k \to 0$ при $k \to (1/e)^+$ (т.е. при $D_k \to \infty$). Таким образом, из теоремы 7 следует, что для любого значения $k > 1/e$, достаточно близкого к $1/e$, уравнение (1) с условием релаксации (2) имеет ровно одно периодическое решение. Вычисления по формулам (5), (16) и (15) дают следующие значения (отметим, что с помощью теоремы 1 легко доказать, что функция $k \mapsto D_k$ непрерывная и убывающая): если $D_k = 3$, то $k = 0.585786$, $r_k = 0.173691$, $s_k = 1.680301$; если $D_k = 4$, то $k = 0.481987$, $r_k = 0.111382$, $s_k = 0.752897$; если $D_k = 5$, то $k = 0.438983$, $r_k = 0.040269$, $s_k = 0.237620$. По-видимому, обе функции $k \mapsto r_k$ и $k \mapsto s_k$ в условиях теоремы 7 монотонные. Если это так, то существование и единственность периодического решения можно гарантировать уже при $1/e < k \leq 0.5$. Конечно, это условие является лишь достаточным. Отметим еще, что из сказанного не вытекает существование и единственность периодического решения с заданным наименьшим периодом: для этого нужно было бы доказать также непрерывность и монотонность функции $k \mapsto T_k$.

В заключение приведем простое утверждение о периодическом решении X_k с наименьшим периодом T_k: если этот период иррационален (что, по-видимому, является типичным свойством), то функция X_k не аналитична ни на каком интервале. Более подробно, если при этом $X_k(0) = 0$, то существует множество $\{x_1, x_2, \ldots\}$, всюду плотное на $(0, T_k)$ и такое, что каждая точка x_s является точкой разрыва первого рода для производной $X_k^{(s)}$, а в каждой точке множества $(0, T_k) \setminus \{x_1, x_2, \ldots\}$ все эти производные существуют и непрерывны.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00665) и Фонда фундаментальных исследований Министерства транспорта Российской Федерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мышкис А.Д.* // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 141–144.
2. *Myshkis A.D.* // Funct. Differ. Equat. 1995. V. 3. № 1–2. P. 145–154.
3. *Мышкис А.Д.* // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68. Вып. 4. С. 693–697.

Московский государственный
университет путей сообщения

Поступила в редакцию
10.09.2004 г.