Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 334, 2006 г.

М. Н. Яковлев

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

На основании полученной в работе оценки

$$[u(t)]^2 \leqslant \frac{1}{3}t^3(1-t)^3 \int\limits_0^1 [u''(s)]^2 ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad u(t) \in H_0^2(0,1),$$

получены уточненные условия разрешимости и однозначной разрешимости первой краевой задачи для сингулярного нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка, установленные ранее на основе оценок, приведенных в работе [2]. Рассмотрены также условия разрешимости первой краевой задачи для сингулярного нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка и в том случае, когда оператор, определяемый краевой задачей, не является, вообще говоря, монотонным.

В случае краевой задачи

$$u^{(4)} - (p_1(t)u')' - (p_2(t)[u']^{2k+1})' + p_0(t)u$$

$$+f_0(t)\varphi(u) + f_1(t)u^{2m+1} = f(t), \quad 0 < t < 1,$$

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0$$

доказана разрешимость в пространстве $H_0^2(0,1)$ при условиях $p_0(t)t^3(1-t)^3 \in L(0,1)$, $p_1(t)t(1-t) \in L(0,1)$, $f(t)t^{3/2}(1-t)^{3/2} \in L(0,1)$, $0 \leqslant p_2(t)[t(1-t)]^{k+1} \in L(0,1)$, $0 \leqslant f_0(t)[t(1-t)]^{3/2} \in L(0,1)$, $0 \leqslant f_1(t)[t(1-t)]^{3m+3} \in L(0,1)$, $\varphi(u)u \geqslant -c|u|$, $c > 0$,

$$1 - \int\limits_0^1 p_1^-(t)t(1-t)dt - \frac{1}{3}\int\limits_0^1 p_0^-(t)t^3(1-t)^3 dt > 0.$$

Как известно (см., напр., [1, с. 457]), функция Грина $g(t,s)$ оператора $\frac{d^4u}{dt^4}$ с краевыми условиями

$$u(0) = u^{'}(0) = u(1) = u^{'}(1) = 0 \tag{1}$$

определяется соотношениями

$$6\,g(t,s) = \begin{cases} t^2(s-1)^2[3s-t-2ts] & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ (t-1)^2 s^2[3t-s-2ts] & \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{2}$$

Поэтому для любой функции $u(t) \in C^{(4)}[0,1]$, удовлетворяющей краевым условиям (1), имеет место равенство

$$u(t) = \int\limits_0^1 g(t,s)u^{(4)}(s)ds. \tag{3}$$

Имеем

$$6\,\frac{\partial g(t,s)}{\partial s} = \begin{cases} t^2(s-1)[9s-6ts-3] & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ (t-1)^2 s[6t-3s-6ts] & \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1; \end{cases} \tag{4}$$

$$6\,\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial s^2} = \begin{cases} 3t^2[6s+2t-4ts-4] & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ 6(t-1)^2[t-s-2ts] & \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1; \end{cases} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^3 g(t,s)}{\partial s^3} = \begin{cases} 3t^2-2t^3 & \text{при} \quad t \leqslant s, \\ 3t^2-2t^3-1 & \text{при} \quad s \leqslant t. \end{cases} \tag{6}$$

Соотношения (4), (5) показывают, что функции $\frac{\partial g(t,s)}{\partial s}$ и $\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial s^2}$ являются непрерывными функциями двух переменных t и s в квадрате $[0,1]\times[0,1]$. Далее, $g(t,0) = g(t,1) = 0$,

$$\left.\frac{\partial g(t,s)}{\partial s}\right|_{s=0} = \left.\frac{\partial g(t,s)}{\partial s}\right|_{s=1} = 0. \tag{7}$$

Лемма 1. *Верно равенство*

$$\int\limits_0^1 \left[\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial s^2}\right]^2 ds = g(t,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{8}$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_0^1 \left[\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial s^2}\right]^2 ds = \int\limits_0^t \left[\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial s^2}\right]^2 ds + \int\limits_t^1 \left[\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial s^2}\right]^2 ds$$

$$= \frac{\partial g(t,s)}{\partial s}\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial s^2}\bigg|_{s=0}^{s=t} + \frac{\partial g(t,s)}{\partial s}\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial s^2}\bigg|_{s=t}^{s=1}$$

$$-\int\limits_0^t \frac{\partial g(t,s)}{\partial s}[3t^2-2t^3-1]ds - \int\limits_t^1 \frac{\partial g(t,s)}{\partial s}[3t^2-2t^3]ds$$

$$= -g(t,t)[3t^2-2t^3-1] + g(t,t)[3t^2-2t^3] = g(t,t).$$

Лемма 2. *Для функции* $u(t) \in C^{(4)}[0,1]$ *такой, что* $u(0) = u^{'}(0) = u(1) = u^{'}(1) = 0$, *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *верно неравенство*

$$[u(t)]^2 \leqslant g(t,t)\int\limits_0^1 [u^{''}(s)]^2 ds = \frac{1}{3}t^3(1-t)^3\int\limits_0^1 [u^{''}(s)]^2 ds. \tag{9}$$

Доказательство. Имеем

$$[u(t)]^2 = \left(\int\limits_0^1 g(t,s)u^{(4)}(s)ds\right)^2 = \left(\int\limits_0^1 \frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial s^2}u^{''}(s)ds\right)^2$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial s^2}\right]^2 ds \int\limits_0^1 [u^{''}(s)]^2 ds = g(t,t)\int\limits_0^1 [u^{''}(s)]^2 ds.$$

Через $H_0^2(0,1)$ обозначим, как обычно, пространство вещественных функций $u(t)$, определенных на отрезке $[0,1]$, имеющих абсолютно-непрерывные производные $u^{'}(t)$ в промежутке $[0,1]$ и удовлетворяющих краевым условиям $u(0) = u^{'}(0) = u(1) = u^{'}(1) = 0$. При этом производная $u^{''}(t)$, которая существует почти всюду, суммируема с квадратом, т.е. $u^{''}(t) \in L_2(0,1)$. Для $u(t)$, $v(t) \in H_0^2(0,1)$ положим

$$(u,v)_{H_0^2(0,1)} = \int\limits_0^1 u^{''}(t)\, v^{''}(t)dt, \tag{10}$$

$$\|u\|^2_{H^2_0(0,1)} \equiv \int\limits_0^1 [u''(s)]^2 ds. \qquad (11)$$

Как известно (см., напр., [4, с. 74]), пространство $H^2_0(0,1)$ получается замыканием в норме (11) пространства $C^\infty_0(0,1)$ бесконечно дифференцируемых функций с носителями в $(0,1)$. Обозначим через $C^{(4)}_0(0,1)$ множество тех функций из $C^{(4)}[0,1]$, которые удовлетворяют краевым условиям $u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0$. Тогда $C^\infty_0(0,1) \subset C^{(4)}_0[0,1]$, и поэтому, в силу леммы 2, для функций из $C^\infty_0(0,1)$ верно неравенство (9). Пусть $u_0(t) \in H^2_0(0,1)$. Существует последовательность $u_n(t) \in C^\infty_0(0,1)$ такая, что $\|u_0(t) - u_n(t)\|_{H^2_0(0,1)} \to 0$ при $n \to \infty$. Имеем

$$[u_n(t)]^2 \leqslant g(t,t)\|u_n\|^2_{H^2_0(0,1)}. \qquad (12)$$

Переходя в неравенстве (12) к пределу при $n \to \infty$, получим следующее утверждение.

Лемма 3. *Для любой функции $u(t) \in H^2_0(0,1)$ верно неравенство*

$$[u(t)]^2 \leqslant g(t,t)\|u\|^2_{H^2_0(0,1)} = \frac{1}{3}t^3(1-t)^3\|u\|^2_{H^2_0(0,1)}. \qquad (13)$$

Лемма 4. *Пусть вещественные функции $p_0(t)$ и $p_1(t)$ определены на промежутке $(0,1)$ и таковы, что*

$$p_0(t)[t(1-t)]^3 \in L(0,1), \quad p_1(t)t(1-t) \in L(0,1), \qquad (14)$$

$$k_1 \equiv 1 - \int\limits_0^1 p_1^-(t)t(1-t)dt - \frac{1}{3}\int\limits_0^1 p_0^-(t)t^3(1-t)^3 dt > 0, \qquad (15)$$

$$k_2 \equiv 1 + \int\limits_0^1 |p_1(t)t(1-t)|dt + \frac{1}{3}\int\limits_0^1 |p_0(t)|t^3(1-t)^3 dt < +\infty. \qquad (16)$$

Здесь $p_k^-(t) = \frac{1}{2}|p_k(t)| - \frac{1}{2}p_k(t)$, $k = 0,1$, $0 < t < 1$. Тогда на пространстве $H^2_0(0,1)$ норма $|u|$, определяемая соотношением

$$|u|^2 \equiv \int\limits_0^1 [u''(s)]^2 ds + \int\limits_0^1 p_1(t)[u'(t)]^2 dt + \int\limits_0^1 p_0(t)u^2(t)dt, \qquad (17)$$

равносильна (эквивалентна) норме $\|u\|_{H_0^2(0,1)}$*, т.е.*

$$k_1\|u\|^2_{H_0^2(0,1)} \leqslant |u|^2 \leqslant k_2\|u\|^2_{H_0^2(0,1)}. \tag{18}$$

Доказательство. Используя лемму 3 и лемму 3 из [1], выводим

$$|u|^2 = \|u\|^2_{H_0^2(0,1)} + \int\limits_0^1 p_1(t)[u^{'}(t)]^2dt + \int\limits_0^1 p_0(t)u^2(t)dt$$

$$\geqslant \Big[1 - \int\limits_0^1 p_1^-(t)t(1-t)dt - \frac{1}{3}\int\limits_0^1 p_0^-(t)t^3(1-t)^3dt\Big]\|u\|^2_{H_0^2(0,1)}$$

$$= k_1\|u\|^2_{H_0^2(0,1)}.$$

Правое неравенство в (18) доказывается аналогично.

Лемма 5. *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) *вещественная функция* $u(t)$ *определена на промежутке* (a,b), $-\infty < a < b < +\infty$*, и имеет обобщенную производную по Соболеву* $u^{(k)}(t)$ *порядка* $k \geqslant 0$*;*

(2) *существует обобщенная производная порядка* $l \geqslant 1$ *от* $u^{(k)}(t)$ *и* $[u^{(k)}(t)]^{(l)} \in C(a,b)$*.*

Тогда $u(t) \in C^{(k+l)}(a,b)$*.*

Доказательство. Прежде всего, $[u^{(k)}]^{(l)}(t) = u^{(k+l)}(t)$, и существуют все обобщенные производные $u^{(m)}(t)$ $(m=1,\dots,k+l)$ (см. [5, с. 133]). По теореме об эквивалентности обобщенной и классической производных (см. [6, с. 127]), обобщенная производная $u^{(k+l-1)}(t) \in C^{(1)}(a,b)$. Пусть уже доказано, что $u^{(l+k-j)}(t) \in C^{(j)}(a,b)$. Тогда (по теореме об эквивалентности классической и обобщенной производных) $u^{(k+l-j-1)}(t)$ имеет классическую производную, которой является функция $u^{(k+l-j)} \in C^{(j)}(a,b)$. Следовательно, сама функция $u^{(k+l-j-1)}(t) \in C^{(j+1)}(a,b)$. Таким образом, сделав $k+l$ шагов, мы придем к заключению леммы 5.

Теорема 1. *Пусть определенная на промежутке* $(0,1)$ *вещественная функция* $f(t)$ *такова, что*

$$f(t)[t(1-t)]^{\frac{3}{2}} \in L(0,1), \tag{19}$$

и пусть выполнены соотношения (14)–(16)*. Тогда*

(1) *в пространстве функций* $H_0^2(0,1)$ *существует одна и только одна функция* $u_0(t) \in H_0^2(0,1)$, *на которой квадратичный функционал*

$$J(u) \equiv \int_0^1 [u''(s)]^2 ds + \int_0^1 p_1(t)[u'(t)]^2 dt$$
$$+ \int_0^1 p_0(s)[u(s)]^2 ds - 2\int_0^1 f(s)u(s)ds \tag{20}$$

достигает минимума в пространстве $H_0^2(0,1)$;

(2) *соотношение*

$$\int_0^1 u''(s)v''(s)ds + \int_0^1 p_1(s)u'(s)v'(s)ds + \int_0^1 p_0(s)u(s)v(s)ds$$
$$= \int_0^1 f(s)v(s)ds \quad \text{при любых} \quad v(t) \in H_0^2(0,1) \tag{21}$$

(*являющееся уравнением относительно* $u(t)$) *имеет одно и только одно решение в пространстве* $H_0^2(0,1)$, *и этим решением является функция* $u_0(t)$, *на которой функционал* $J(u)$ *достигает минимума в пространстве* $H_0^2(0,1)$;

(3) *верна оценка*

$$\|u_0\|_{H_0^2(0,1)} \leqslant \frac{1}{k_1\sqrt{3}} \int_0^1 |f(t)|[t(1-t)]^{3/2} dt = \frac{1}{k_1} \int_0^1 |f(t)|\sqrt{g(t,t)}dt. \tag{22}$$

(4) *при* $p_1(t) \equiv 0$, $p_0(t) \in C(0,1)$, $f(t) \in C(0,1)$ *функция* $u_0(t) \in C^{(4)}(0,1)$ *и удовлетворяет уравнению*

$$u^{(4)}(t) + p_0(t)u_0(t) = f(t), \quad 0 < t < 1,$$

и краевым условиям

$$u_0(0) = u_0'(0) = u_0(1) = u_0'(1) = 0.$$

Доказательство. По теореме Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве со скалярным произведением

$$[u,v] \equiv \int_0^1 u^{(2)}(t)v^{(2)}(t)dt + \int_0^1 p_1(t)u'(t)\,v'(t)dt + \int_0^1 p_0(t)u(t)v(t)dt,$$

в силу (19) и с учетом леммы 4, для некоторого $u_0 \in H_0^2(0,1)$ имеем

$$\int_0^1 f(t)u(t)dt = [u_0,u] \quad \text{для любого} \quad u \in H_0^2(0,1).$$

Поэтому для всех $u \in H_0^2(0,1)$

$$J(u) = [u,u] - 2[u_0,u] = |u-u_0|^2 - |u_0|^2.$$

Следовательно, $u_0 \in H_0^2(0,1)$ является единственной точкой минимума функционала $J(u)$ в $H_0^2(0,1)$. Далее, поскольку для любого $v \in H_0^2(0,1)$ мы имеем

$$[u_0,v] = \int_0^1 u_0^{(2)}(t)v^{(2)}(t)dt + \int_0^1 p_1(t)u_0'(t)\,v'(t)dt + \int_0^1 p_0(t)u_0(t)v(t)dt$$

и

$$\int_0^1 f(t)v(t)dt = [u_0,v],$$

получаем (21). Пусть теперь существует другая функция $u_1(t) \in H_0^2(0,1)$, удовлетворяющая соотношению (21). Тогда, полагая $v(t) = u_0(t) - u_1(t)$, получим

$$0 \geqslant [1 - \int_0^1 p_1^-(t)t(1-t)dt - \int_0^1 p_0^-(t)g(t,t)dt]\|u_0-u_1\|^2_{H_0^2(0,1)}.$$

Отсюда следует, что $u_0(t) = u_1(t)$. Далее, имеем

$$\int_0^1 |f(t)|\sqrt{g(t,t)}dt\|u_0\|_{H_0^2(0,1)} \geqslant \int_0^1 f(t)u_0(t)dt$$

$$\geqslant \left[1 - \int_0^1 p_1^-(t)t(1-t)dt - \int_0^1 p_0^-(t)g(t,t)dt\right]\|u_0\|^2_{H_0^2(0,1)},$$

откуда, сокращая на $\|u_0\|_{H_0^2(0,1)}$, получаем оценку (22).

Рассмотрим следующую краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка:

$$u^{(4)} - (p_1(t)u^{'})^{'} - (p_2(t,u^{'}))^{'} + q_1(t)u^{'} + p_0(t)u + f_1(t,u) + f_0(t,u,u') = f(t) \tag{23}$$

с краевыми условиями

$$u(0) = u^{'}(0) = u(1) = u^{'}(1) = 0. \tag{24}$$

Обобщенным решением краевой задачи (23), (24) называется функция $u_0(t) \in H_0^2(0,1)$, удовлетворяющая равенству

$$\Phi(u_0, v) \equiv \int_0^1 u_0^{(2)}(t)v^{(2)}(t)dt + \int_0^1 p_1(t)u_0^{'}(t)v^{'}(t)dt$$
$$+ \int_0^1 p_2(t,u_0^{'}(t))v^{'}(t)dt + \int_0^1 q_1(t)u_0^{'}(t)v(t)dt + \int_0^1 p_0(t)u_0(t)v(t)dt$$
$$+ \int_0^1 f_1(t,u(t))v(t)dt + \int_0^1 f_0(t,u(t),u^{'}(t))v(t)dt$$
$$- \int_0^1 f(t)v(t)dt = 0 \tag{25}$$

при любых $v(t) \in H_0^2(0,1)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$p_1(t)t(1-t) \in L(0,1), \quad p_0(t)t^3(1-t)^3 \in L(0,1); \tag{26}$$

$$q_1(t)[t(1-t)]^2 \in L(0,1); \tag{27}$$

$$f_1(t,u(t))[t(1-t)]^{3/2} \in L(0,1) \quad \textit{при любых} \quad u(t) \in H_0^2(0,1); \tag{28}$$

$$f_0(t,u(t),u'(t))[t(1-t)]^{3/2} \in L(0,1) \quad \textit{при любых} \quad u(t) \in H_0^2(0,1); \tag{29}$$

$$p_2(t,u'(t))[t(1-t)]^{1/2} \in L(0,1) \quad \textit{при любых} \quad u(t) \in H_0^2(0,1); \tag{30}$$

$$[f_1(t,u) - f_1(t,w)](u-w) \geqslant 0; \tag{31}$$

$$[p_2(t,u) - p_2(t,w)](u-w) \geqslant 0; \tag{32}$$

$$\int_0^1 |f_1(t,u_n(t)) - f_1(t,w(t)|[t(1-t)]^{3/2}dt \to 0 \quad \textit{при} \quad \|u_n - w\|_{H_0^2(0,1)} \to 0; \tag{33}$$

$$\int_0^1 |p_2(t,u_n^{'}(t)) - p_2(t,w^{'}(t))|[t(1-t)^{1/2}dt \to 0 \quad \textit{при} \quad \|u_n - w\|_{H_0^2(0,1)} \to 0; \tag{34}$$

$$\int_0^1 |f_0(t,u_n(t),u_n'(t)) - f_0(t,w(t),w^{'}(t))|[t(1-t)]^{3/2}dt \to 0$$
$$\textit{при} \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u_n(t)-w(t)| + \max_{0\leqslant t\leqslant 1}|u_n'(t)-w'(t)| \to 0 \; \textit{при} \; n\to\infty; \tag{35}$$

$$\int_0^1 f_0(t,u(t),u'(t))u(t)dt \geqslant -c\|u\|_{H_0^2(0,1)}, \quad c>0,$$
$$\textit{при всех} \quad u(t) \in H_0^2(0,1); \tag{36}$$

$$f(t)[t(1-t)]^{3/2} \in L(0,1). \tag{37}$$

Пусть, далее, верно неравенство

$$d \equiv 1 - \int_0^1 p_1^-(t)t(1-t)dt$$
$$-\frac{1}{3}\int_0^1 p_0^-(t)t^3(1-t)^3dt - \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1 |q_1(t)|t^2(1-t)^2dt > 0. \tag{38}$$

Тогда в $H_0^2(0,1)$ *существует по крайней мере одно обобщенное решение* $u^*(t)$ *краевой задачи* (23), (24). *В том случае, когда* $f_0(t,u,u^{'})\equiv 0$, *решение единственно, верна оценка*

$$\|u^*\|_{H_0^2(0,1)} \leqslant \frac{1}{d\sqrt{3}}\int\limits_0^1 |f(t)|[t(1-t)]^{3/2}dt \tag{39}$$

и метод Галеркина по полной в $H_0^2(0,1)$ *системе* $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к обобщенному решению из* $H_0^2(0,1)$ *краевой задачи* (23), (24) *по норме пространства* $H_0^2(0,1)$.

Доказательство. Для $u\in H_0^2(0,1)$ положим $T(u)=T_1(u)+T_2(u)$, где

$$\begin{gathered}(T_1(u),v)_{H_0^2(0,1)} = \int\limits_0^1 u^{''}(t)\,v^{''}(t)dt + \int\limits_0^1 p_1(t)u^{'}(t)v^{'}(t)dt \\ + \int\limits_0^1 p_2(t,u^{'}(t))v^{'}(t)dt + \int\limits_0^1 p_0(t)u(t)v(t)dt \\ + \int\limits_0^1 f_1(t,u(t))v(t)dt + \int\limits_0^1 q_1(t)u^{'}(t)v(t)dt - \int\limits_0^1 f(t)v(t)dt \\ \text{для любых}\quad v(t)\in H_0^2(0,1)\end{gathered} \tag{40}$$

и

$$\begin{gathered}(T_2(u),v)_{H_0^2(0,1)} = \int\limits_0^1 f_0(t,u(t),u^{'}(t))v(t)dt \\ \text{при любых}\quad v(t)\in H_0^2(0,1).\end{gathered} \tag{41}$$

В силу (29) и (35), оператор $T_2(u)$ является вполне непрерывным оператором из $H_0^2(0,1)$ в $H_0^2(0,1)$ (переводит слабо сходящуюся последовательность из $H_0^2(0,1)$ в последовательность сходящуюся по норме в $H_0^2(0,1)$). В силу (26)–(28), (30)–(32), (33), (34), (37), (38), $T_1(u)$ – монотонный и деминепрерывный оператор из $H_0^2(0,1)$ в $H_0^2(0,1)$. Наконец, в силу условий (36) и (38), оператор $T(u)$ коэрцитивен. Поэтому, в силу теоремы существования решения у уравнения с коэрцитивным оператором, являющимся суммой монотонного деминепрерывного оператора и вполне непрерывного оператора (см. [3, с. 271]), существует $u^*(t) \in H_0^2(0,1)$ такое, что $\Phi(u^*, v) = 0$, т.е. существует обобщенное решение краевой задачи (23), (24).

Следствие 1. *Пусть вещественные функции* $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$, $f(t)$, $f_0(t)$, $f_1(t)$ *таковы, что*

$$\begin{gathered} p_0(t)t^3(1-t)^3 \in L(0,1), \quad p_1(t)t(1-t) \in L(0,1), \\ f(t)[t(1-t)]^{3/2} \in L(0,1), \end{gathered} \tag{42}$$

$$p_2(t)[t(1-t)]^{k+1} \in L(0,1), \tag{43}$$

$$f_1(t)[t(1-t)]^{3m+3} \in L(0,1), \quad f_0(t)[t(1-t)]^{3/2} \in L(0,1), \tag{44}$$

$$p_2(t) \geqslant 0, \quad f_1(t) \geqslant 0, \quad f_0(t) \geqslant 0, \quad 0 < t < 1, \tag{45}$$

$\varphi(u)u \geqslant -c|u|$, $c > 0$, *и* $\varphi(u)$ *непрерывна при* $-\infty < u < +\infty$. *Пусть, далее,*

$$1 - \int_0^1 p_1^-(t)t(1-t)dt - \frac{1}{3}\int_0^1 p_0^-(t)t(1-t)^3 dt \equiv q > 0. \tag{46}$$

Тогда краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка

$$\begin{gathered} u^{(4)} - (p_1(t)u')' - (p_2(t)[u']^{2k+1})' + p_0(t)u \\ + f_0(t)\varphi(u) + f_1(t)u^{2m+1} = f(t), \quad 0 < t < 1, \end{gathered} \tag{47}$$

с краевыми условиями

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \tag{48}$$

имеет хотя бы одно обобщенное решение $u(t) \in H_0^2(0,1)$.

Если $\varphi(u) \equiv 0$, *то обобщенное решение из* $H_0^2(0,1)$ *единственно, верна оценка*

$$||u||_{H_0^2(0,1)} \leqslant \frac{1}{q\sqrt{3}} \int_0^1 |f(t)|[t(1-t)]^{3/2} dt \tag{49}$$

и метод Галеркина по полной в $H_0^2(0,1)$ *системе* $\{\varphi_k\}$ *сходится к единственному обобщенному решению из* $H_0^2(0,1)$ *краевой задачи* (47), (48) *по норме пространства* $H_0^2(0,1)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и предположим, что* $p_0(t) \in C(0,1)$, $q_1(t) \in C(0,1)$, $f(t) \in C(0,1)$, $p_1(t) \equiv 0$, $f_1(t,u(t)) \in C(0,1)$ *при всех* $u(t) \in C(0,1)$, $p_2(t,u) \equiv 0$, $f_0(t,u(t),u^{'}(t)) \in C(0,1)$ *при всех* $u(t) \in C^{(1)}(0,1)$. *Тогда обобщенное решение* $u^*(t)$ *краевой задачи* (23), (24) *принадлежит* $C^{(4)}(0,1)$ *и удовлетворяет уравнению*

$$[u^*(t)]^{(4)} + q_1(t)[u^*(t)]^{'} + p_0(t)u^*(t) + f_1(t,u^*(t)) \\ + f_0(t,u^*(t),[u^*(t)]^{'}) = f(t), \quad 0 < t < 1,$$

и краевым условиям

$$u^*(0) = u^{*'}(0) = u^*(1) = u^{*'}(1) = 0.$$

Доказательство. Соотношение

$$\Phi(u^*,v) \equiv \int\limits_0^1 [u^*(t)]^{(2)} v^{(2)}(t)dt + \int\limits_0^1 q_1(t)u^{*'}(t)v(t)dt \\ + \int\limits_0^1 p_0(t)u^*(t)v(t)dt + \int\limits_0^1 f_0(t,u^*(t),u^{*'}(t))v(t)dt \\ + \int\limits_0^1 f_1(t,u^*(t))v(t)dt - \int\limits_0^1 f(t)v(t)dt = 0$$

показывает, что $[u^*(t)]^{(2)}$ имеет вторую обобщенную производную в смысле С. Л. Соболева, которой является непрерывная в $(0,1)$ функция

$$-[q_1(t)u^{*'}(t) + p_0(t)u^*(t) + f_0(t,u^*(t),u^{*'}(t)) + f_1(t,u^*(t)) - f(t)].$$

Остается применить лемму 5.

Следствие 2. *Пусть в условиях следствия 1 выполнены условия:* $p_1(t) \equiv 0$, $p_2(t,u) \equiv 0$, $p_0(t) \in C(0,1)$, $f_0(t) \in C(0,1)$, $f_1(t) \in C(0,1)$, $f(t) \in C(0,1)$. *Тогда обобщенное решение* $u(t) \in C^{(4)}(0,1)$ *и удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$u^{(4)} + p_0(t)u + f_0(t)\varphi(u) + f_1(t)u^{2m+1} = f(t), \quad 0 < t < 1,$$

и краевым условиям

$$u(0) = u^{'}(0) = u(1) = u^{'}(1) = 0.$$

Литература

1. W. T. Reid, *Interrelations between a trace formula and Lyapunov type inequalities*. — J. Differ. Eq. **23**, No. 3 (1977), 448–458.
2. М. Н. Яковлев, *Разрешимость сингулярных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2m$*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **309** (2004), 174–188.
3. М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов*. Наука, М., 1972.
4. А. Куфнер, С. Фучик, *Нелинейные дифференциальные уравнения*. Наука, М., 1988.
5. С. Л. Соболев, *Веведение в теорию кубатурных формул*. Наука, М., 1974.
6. Э. Либ, М. Лосс, *Анализ*. Научная книга, Новосибирск, 1998.

Yakovlev M. N. The first boundary-value problem for a singular nonlinear ordinary differential equation of fourth order.

The solvability of the boundary-value problem

$$u^{(4)} - (p_1(t)u^{'})^{'} - (p_2(t)[u^{'}]^{2k+1})^{'} + p_0(t)u$$
$$+f_0(t)\varphi(u) + f_1(t)u^{2m+1} = f(t), \quad 0 < t < 1,$$
$$u(0) = u^{'}(0) = u(1) = u^{'}(1) = 0,$$

in the space $H_0^2(0,1)$ is proved under the following assumptions: $p_0(t)t^3(1-t)^3 \in L(0,1)$, $p_1(t)t(1-t) \in L(0,1)$, $f(t)t^{3/2}(1-t)^{3/2} \in L(0,1)$, $0 \leqslant p_2(t)[t(1-t)]^{k+1} \in L(0,1)$, $0 \leqslant f_0(t)[t(1-t)]^{3/2} \in L(0,1)$, $0 \leqslant f_1(t)[t(1-t)]^{3m+3} \in L(0,1)$, $\varphi(u)u \geqslant -c|u|$, $c > 0$,

$$1 - \int_0^1 p_1^-(t)t(1-t)dt - \frac{1}{3}\int_0^1 p_0^-(t)t^3(1-t)^3 dt > 0.$$

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 7 июня 2006 г.