В. А. Кощеев, Пример несвязного солнца в банаховом пространстве,
Матем. заметки, 1979, том 26, выпуск 1, 89–92

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 26, № 1 (1979)

ПРИМЕР НЕСВЯЗНОГО СОЛНЦА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. А. Кощеев

Понятие солнца было введено Н. В. Ефимовым и С. Б. Стечкиным при изучении свойств чебышевских множеств [1]. Множество M в нормированном пространстве X называется солнцем, если для любого $x \in X$ $(x \notin M)$ существует элемент $y \in M$ такой, что y является элементом наилучшего приближения для всех точек луча $\{(1-\lambda) y+\lambda x: \lambda \geqslant 0\}$.

Исследованием структуры солнц и различных их обобщений (см. обзор [2]) занимались многие авторы. Известно, например, что в гладких пространствах (и только в них) всякое солнце выпукло [2]. В работах [3] — [5] изучалась связность солнечных множеств. В данной заметке построено несвязное солнце в банаховом пространстве.

Пусть M — подмножество нормированного пространства X, $d(x, M)=\inf\{\|x-y\|: y \in M\}$ — наилучшее приближение точки $x \in X$ посредством элементов множества M, $P_M x=\{y \in M: \|x-y\|=d(x, M)\}$ — множество элементов наилучшего приближения для x. Для произвольных $v_0, g \in X$ положим

$$K(v_0, g)=\{v \in X: \quad x^*(v)<x^*(v_0) \quad \forall x^* \in X^*, \\ \|x^*\|=1,\ x^*(v_0-g)=\|v_0-g\|\},$$

где X^* — пространство, сопряженное к X.

Известно (см. [6]), что подмножество M нормированного пространства X является солнцем тогда и только тогда, когда для любого $g \in X$ ($g \notin M$) существует элемент $v_0 \in P_M g$, удовлетворяющий условию $K(v_0, g) \cap M = \varnothing$.

В пространстве $C[0, 1]$ непрерывных на отрезке $[0, 1]$ вещественных функций рассмотрим подпространство

$$Y = \{x \in C[0, 1]: x(0) = 0, \ \bigvee_0^1 (x) < \infty\}$$

с нормой $|x| = \max\{\|x\|, 8^{-1} \bigvee_0^1 (x)\}$, где $\bigvee_0^1 (x)$ — вариация функции x, $\|x\| = \max\{|x(t)|: t \in [0, 1]\}$. Очевидно, Y — банахово пространство. Пусть

$$A_1 = \{x \in C[0, 1]: \ x(1/(2n)) \geqslant 1/(2n), \ n = 1, 2, \ldots\},$$

$$B_1 = \{x \in C[0, 1]: \ x(1/(2n) + 1)) \leqslant -1/(2n + 1), \quad n = 1, 2, \ldots\},$$

$$A = A_1 \cap Y, \quad B = B_1 \cap Y.$$

Покажем, что множество $M = A \cup B$ является несвязным солнцем в Y. Если $x \in A_1 \cap B_1$, то $\bigvee_0^1 (x) = \infty$ и $x \notin Y$, поэтому $A \cap B = \varnothing$. Далее, нетрудно видеть, что A и B замкнуты в Y, следовательно, M несвязно. Пусть

$$p_n = (2n)^{-1}, \quad q_n = (2n + 1)^{-1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Зафиксируем произвольный элемент g пространства Y, не принадлежащий M. Докажем, что наилучшее приближение $d(g, A) = \inf\{|g - h|: h \in A\}$ этого элемента посредством множества A определяется формулой

$$d(g, A) = \max_{n=1, 2, \ldots} [p_n - g(p_n)] = p_{n_0} - g(p_{n_0}). \tag{1}$$

Заметим, что $p_{n_0} - g(p_{n_0}) > 0$, так как в противном случае $g(p_n) \geqslant p_n$ для любого натурального n и $g \in A \subset M$. Рассмотрим неубывающую непрерывную функцию $\bar{g}(t)$ такую, что $\bar{g}(0) = 0$, $\bar{g}(p_n) \geqslant p_n - g(p_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\|\bar{g}\| = p_{n_0} - g(p_{n_0})$. Так как $\bigvee_0^1 (\bar{g}) = p_{n_0} - g(p_{n_0})$, то $\bar{g} \in Y$, $|\bar{g}| = p_{n_0} - g(p_{n_0})$. Положим $v_1(t) = g(t) +$

$+\bar{g}(t)$. Ввиду неравенств

$$v_1(p_n) = g(p_n) + \bar{g}(p_n) \geqslant g(p_n) + p_n - g(p_n) = p_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (2)$$

функция v_1 принадлежит множеству A, поэтому $d(g, A) \leqslant \leqslant |v_1 - g| = |\bar{g}| = p_{n_0} - g(p_{n_0})$. С другой стороны, для любого $y \in A$ $y(p_{n_0}) \geqslant p_{n_0}$, следовательно,

$$|y - g| \geqslant \|y - g\| \geqslant y(p_{n_0}) - g(p_{n_0}) \geqslant p_{n_0} - g(p_{n_0}).$$

Итак, $d(g, A) = p_{n_0} - g(p_{n_0})$, и формула (1) доказана.

С помощью аналогичных рассуждений можно доказать равенство

$$d(g, B) = \max_{m=1, 2, \ldots} [q_m + g(q_m)] = q_{m_0} + g(q_{m_0}). \qquad (3)$$

Для завершения доказательства нужно найти точку $v_0 \in P_M g$ такую, что пересечение конуса $K(v_0, g)$ с множеством M пусто. Возможны два случая: $d(g, A) \leqslant d(g, B)$ и $d(g, A) > d(g, B)$. Положим $d = d(g, M)$ и рассмотрим, например, первый. Тогда

$$d = d(g, A) \leqslant d(g, B). \qquad (4)$$

Введем непрерывную функцию $x(t)$, положив

$$x(t) = \begin{cases} \bar{g}(t) & \text{при } t \in [0, p_{m_0+1}] \cup [p_{m_0}, 1], \\ -d & \text{при } t = q_{m_0}, \\ \text{линейна на промежутках } [p_{m_0+1}, q_{m_0}] \text{ и } [q_{m_0}, p_{m_0}]. \end{cases}$$

Очевидно, $\|x\| = \|\bar{g}\| = d$, $\bigvee_0^1 (x) \leqslant \bigvee_0^1 (\bar{g}) + 4d = 5d$, поэтому $|x| = d$. Пусть $v_0(t) = g(t) + x(t)$. Значения функций x и $\bar{g}$ в точках p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ совпадают, значит, в этих точках совпадают и значения функций v_0 и v_1, следовательно, в силу неравенств (2) $v_0 \in A$. Так как $|v_0 - g| = |x| = d$ и $v_0 \in A$, то $v_0 \in P_A g$, а ввиду (4) $v_0 \in P_M g$.

Рассмотрим функционал f_{n_0}, $f_{n_0}(z) = z(p_{n_0})$. Легко показать, что $|f_{n_0}| = 1$. По построению функция $\bar{g}$ удовлетворяет условиям $\bar{g}(p_n) \geqslant p_n - g(p_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, поэтому в силу соотношений (1) и (4)

$$d = p_{n_0} - g(p_{n_0}) = \|\bar{g}\| \geqslant \bar{g}(p_{n_0}) \geqslant p_{n_0} - g(p_{n_0}),$$

т. е. $\bar{g}(p_{n_0}) = d$. Отсюда следует, что

$$f_{n_0}(v_0) = g(p_{n_0}) + x(p_{n_0}) = g(p_{n_0}) + \bar{g}(p_{n_0}) = \\ = g(p_{n_0}) + d = p_{n_0},$$

$$f_{n_0}(v_0 - g) = x(p_{n_0}) = \bar{g}(p_{n_0}) = d = |x| = |v_0 - g|.$$

Далее, для любого $v \in A$ $f_{n_0}(v) = v(p_{n_0}) \geqslant p_{n_0} = f_{n_0}(v_0)$, следовательно, $K(v_0, g) \cap A = \varnothing$.

Пусть функционал f_{m_0} задан формулой $f_{m_0}(z) = -z(q_{m_0})$. Тогда $|f_{m_0}| = 1$ и, учитывая равенство $x(q_{m_0}) = -d$, из соотношений (3) и (4) находим, что

$$f_{m_0}(v_0) = -v_0(q_{m_0}) = -g(q_{m_0}) + d \leqslant \\ \leqslant -g(q_{m_0}) + d(g, B) = q_{m_0},$$

$$f_{m_0}(v_0 - g) = g(q_{m_0}) - v_0(q_{m_0}) = d = |x| = |v_0 - g|.$$

Отсюда следует, что $K(v_0, g) \cap B = \varnothing$, ибо для любого $w \in B$ $f_{m_0}(w) = -w(q_{m_0}) \geqslant q_{m_0} \geqslant f_{m_0}(v_0)$.

Итак, если g — произвольный элемент пространства Y, не принадлежащий множеству M, то найдется элемент наилучшего приближения v_0, удовлетворяющий условию $K(v_0, g) \cap M = \varnothing$, следовательно, M — солнце.

Заметим, что построенное множество не является чебышевским. Это видно из доказательства. Следует также сказать о работе Ч. Данхэма [7], где построен пример несвязного чебышевского множества в пространстве $C[0, 1]$. Однако множество Данхэма не является солнцем.

Институт математики и механики
УНЦ СО АН СССР

Поступило
28.II.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ефимов Н. В., Стечкин С. Б., Некоторые свойства чебышевских множеств, Докл. АН СССР, 118, № 1 (1958), 17—19.

[2] Власов Л. П., Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах, Успехи матем. наук, 28, № 6 (1973), 3—66.

[3] Кощеев В. А., Связность и некоторые аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах, Матем. заметки, 17, № 2 (1975), 193—204.

[4] Кощеев В. А., Связность и солнечные свойства множеств в линейных нормированных пространствах, Матем. заметки, 19, № 2 (1976), 267—278.

[5] Braess D., Geometrical characterizations for nonlinear uniform approximation, J. Approx. theory, 11, № 3 (1974), 260—274.

[6] Ошман Е. В., Чебышевские множества и непрерывность метрической проекции, Изв. вузов, Математика, 9 (1970), 78—82.

[7] Dunham C. B., Chebyshev sets in C [0, 1] which are not suns, Canad. Math. Bull., 18, № 1 (1975), 35—37.