А. Б. Певный, Интерполяция дискретными сплайнами с равноотстоящими узлами, *Алгебра и анализ*, 1998, том 10, выпуск 6, 186–197

Алгебра и анализ
Том 10 (1998), вып. 6

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СПЛАЙНАМИ С РАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ

© А. Б. Певный

Вводятся дискретные сплайны (определенные на множестве всех целых чисел). Доказывается однозначная разрешимость интерполяционной задачи. Строится самодвойственный сплайн, сдвиги которого образуют ортонормированную систему.

0. Большим разделом теории сплайнов является теория кардинальной интерполяции, т.е. интерполяции по бесконечной системе равноотстоящих узлов kh, $k \in \mathbb{Z}$. В работах [2–4] в качестве интерполирующего агрегата использовались сплайны $S(x)$ вещественного аргумента x. В последние годы стала развиваться теория дискретных сплайнов $S(j)$, заданных на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$. Периодические сплайны с периодом N $(S(j+N) = S(j),\ j \in \mathbb{Z})$ исследовались в [1, 9]. В данной заметке предлагается аналог теории [2–4] для дискретных непериодических сплайнов. При этом используются некоторые результаты [1] периодической теории. Дискретный случай интересен в связи с многочисленными исследованиями по цифровой обработке сигналов.

В п. 1 дается определение B-сплайна Q_r, описываются его свойства. Дискретным сплайном $S(j)$ называется линейная комбинация сдвигов B-сплайна. В п. 2 обсуждается задача кардинальной интерполяции и доказывается центральная лемма 3, на основе которой в п. 3 доказывается однозначная разрешимость интерполяционной задачи. В п. 4 вводятся экспоненциальные сплайны $E(x,j)$, зависящие от вещественного параметра x. Заключительный раздел посвящен самодвойственному сплайну $\varphi(j)$, сдвиги которого образуют ортонормированную систему в $\ell^2(\mathbb{Z})$, и эти же сдвиги образуют базис в пространстве дискретных сплайнов.

Ключевые слова: интерполяция дискретными сплайнами (interpolation by discrete splines), равноотстоящие узлы (equidistant knots).

1. Дискретные сплайны определим на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$. Зафиксируем натуральные r, n, $n \geqslant r$. Определим дискретные B-сплайны $Q_1(j), \ldots, Q_r(j)$, $(j \in \mathbb{Z})$ следующим образом. Положим

$$Q_1(j) = \begin{cases} n - |j|, & j \in -n+1 : n-1, \\ 0, & |j| \geqslant n. \end{cases} \tag{1}$$

График Q_1 представляет собой „домик". Далее используем рекуррентное определение

$$Q_k = Q_1 * Q_{k-1}, \quad k = 2, \ldots, r, \tag{2}$$

или

$$Q_k(j) = \sum_{p=-n+1}^{n-1} Q_1(p) Q_{k-1}(j-p), \quad j \in \mathbb{Z}, \ k = 2, \ldots, r.$$

Лемма 1. *B-сплайн Q_r обладает следующими свойствами:*

$$Q_r(-j) = Q_r(j) \quad \textit{для любого целого } j; \tag{3}$$

$$Q_r(j) \begin{cases} > 0 & \textit{при } -r(n-1) \leqslant j \leqslant r(n-1), \\ = 0 & \textit{при остальных } j; \end{cases} \tag{4}$$

$$\sum_{j=-r(n-1)}^{r(n-1)} Q_r(j) = n^{2r}; \tag{5}$$

$$Q_r(r(n-1)) = 1.$$

Доказательство, проведенное в [1] для периодического случая, сохраняет свою силу и в рассматриваемом непериодическом случае. •

Отметим, что в силу определения и леммы B-сплайн Q_r принимает только целые неотрицательные значения. Для нас главным свойством B-сплайна будет свойство (4): носителем Q_r является целочисленный отрезок $-r(n-1) : r(n-1)$. Следует также заметить, что B-сплайн $Q_r(j)$ не является следом непрерывного B-сплайна на $\mathbb{Z}$, а является самостоятельным объектом, достойным изучения.

Лемма 2. *Для любых целых p, q справедливо равенство*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} Q_r(j - pn) Q_r(j - qn) = Q_{2r}((p-q)n). \tag{6}$$

Доказательство основано на равенстве $Q_r * Q_r = Q_{2r}$. Сумма (6) равна

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} Q_r(\nu)Q_r(\nu + pn - qn) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} Q_r(\nu)Q_r((q-p)n - \nu) = Q_{2r}((p-q)n).$$

Лемма доказана. •

Дискретным сплайном S будем называть линейную комбинацию B-сплайнов

$$S(j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c(l)Q_r(j - ln) \quad j \in \mathbb{Z} \tag{7}$$

с произвольными комплексными коэффициентами $c(l)$. Вопрос о сходимости ряда не стоит, так как при каждом j в (7) не более $2r$ ненулевых слагаемых. Если $j \in kn : (k+1)n$, то

$$S(j) = \sum_{l=k-r+1}^{k+r} c(l)Q_r(j - ln). \tag{8}$$

Выражение (8) на $kn : (k+1)n$ совпадает с некоторым полиномом $P_k(j)$ степени не выше $2r-1$, причем два соседних полинома P_{k-1} и P_k сопрягаются так, что $P_{k-1}(kn + l) = P_k(kn + l)$ для $l \in -r + 1 : r - 1$ (см. [1]).

Точки kn, $k \in \mathbb{Z}$, называются *узлами* сплайна.

2. Сформулируем задачу интерполяции. Для данной последовательности $z = \{z(k)\}$ требуется найти сплайн S такой, что

$$S(kn) = z(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

В непрерывном случае аналогичной задаче посвящены глубокие исследования Шенберга[2,3] и Желудева[4]. Подставив (7) в (9), получим

$$\sum_{l=k-r+1}^{k+r-1} c(l)Q_r((k-l)n) = z(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Это бесконечная $(2r-1)$-диагональная система уравнений.

Введем обозначение $q_r(k) = Q_r(kn)$. По лемме 1 $q_r(-k) = q_r(k)$ и $q_r(k) \neq 0$ только при $|k| \leqslant r - 1$.

Систему уравнений (10) можно записать в сверточном виде

$$(c * q_r)(k) = z(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Опишем сначала формальный метод определения последовательности c. Из (11) получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=k-r+1}^{k+r-1} c(l) q_r(k-l) e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z(k) e^{ikx} =: Z(x). \tag{12}$$

В левой части (12) стоит произведение распределения

$$C(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx}$$

и тригонометрического полинома

$$T_r(x) = \sum_{k=-r+1}^{r-1} q_r(k) e^{ikx} = q_r(0) + 2 \sum_{k=1}^{r-1} q_r(k) \cos kx. \tag{13}$$

(Очевидно свойство $T_r(-x) = T_r(x)$). Из равенства $C(x)T_r(x) = Z(x)$ следует $C(x) = Z(x)/T_r(x)$. Итак, искомые коэффициенты $c(k)$ должны быть коэффициентами Фурье распределения $Z(x)/T_r(x)$.

Перейдем к строгим формулировкам.

Лемма 3. *Полином* (13) *удовлетворяет неравенству*

$$T_r(x) > 0 \quad \textit{для всех } x. \tag{14}$$

Доказательство. Возьмем произвольное четное m, $m \geqslant 2r$. Тогда для $l \in 1 : m-1$ имеем

$$T_r\left(\frac{2\pi l}{m}\right) = \sum_{k=-r+1}^{r-1} q_r(k) \omega_m^{-kl} = \sum_{k=-m/2}^{m/2-1} q_r(k) \omega_m^{-kl} = \mathfrak{F}_m(q_r)(l).$$

Здесь $\omega_m = e^{2\pi i/m}$, $\mathfrak{F}_m(q_r)$ — дискретное преобразование Фурье последовательности q_r. Оно вычислено в [5]. Получаем

$$T_r\left(\frac{2\pi l}{m}\right) = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{\sin\frac{l\pi}{m}}{\sin\frac{\pi(sm+l)}{mn}}\right)^{2r}. \tag{15}$$

Воспользуемся неравенствами $\frac{2}{\pi}x < \sin x < x$ при $x \in (0, \pi/2)$. Будем считать, что $l \in 1 : m/2$. Тогда, оценив в (15) первое слагаемое, получим

$$T_r\left(\frac{2\pi l}{m}\right) \geqslant \frac{1}{n}\left[\frac{\sin(l\pi/m)}{\sin(l\pi/(mn))}\right]^{2r} \geqslant \frac{1}{n}\left[\frac{\frac{2}{\pi}\cdot l\pi/m}{l\pi/(mn)}\right]^{2r} = \frac{1}{n}\left(\frac{2n}{\pi}\right)^{2r} > 0.$$

Ввиду свойства $T_r(2\pi - x) = T_r(x)$ имеем $T_r(2\pi l/m) \geqslant n^{-1}(2n/\pi)^{2r}$ для всех $l \in 1 : m-1$, а тогда по непрерывности

$$T_r(x) \geqslant \frac{1}{n}\left(\frac{2n}{\pi}\right)^{2r}, \quad x \in [0, 2\pi]. \quad \bullet$$

Замечание. Полиномы (13), где $q_r(k)$ — значения *непрерывного* В-сплайна в узлах, интенсивно изучались в работах Шенберга[2, 3]. Наиболее трудным и красивым результатом [2] является тот факт, что минимум полиномов (при всех r) достигается при $x = \pi$. В дискретном случае дело сводится к минимизации функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^{r-1} q_r(k)\cos kx.$$

Поскольку $q_r(k) > 0$, то $x = 0$ и $x = 2\pi$ являются точками максимума f. В точке π выполнено условие $f'(\pi) = 0$, поэтому $x = \pi$ подозрительно на минимум. При $r = 2, 3, 4$ это можно элементарно доказать. При $r = 2$ очевидно: $\cos x \geqslant \cos\pi$. При $r = 3$ $f = q_3(1)y + q_3(2)(2y^2 - 1)$, где $y = \cos x$. Если $-q_3(1)/4q_3(2) \leqslant -1$, то минимум по $y \in [-1, 1]$ достигается в точке $y_* = -1$, а тогда $x_* = \pi$ является точкой минимума $f(x)$. Можно подсчитать (см. [1]), что $q_3(2) = \frac{1}{120}n(n^2-1)(n^2-4)$, $q_3(1) = \frac{1}{60}n(n^2-1)(13n^2+8)$, поэтому $q_3(1)/4q_3(2) \geqslant 1$ при всех n.

При $r = 4$ аналогично доказывается, что $x_* = \pi$ — точка минимума.

Нерешенная задача. Доказать, что $x_* = \pi$ является точкой минимума полинома $T_r(x)$ при любом $r \geqslant 2$.

Заметим, что значение $T_r(\pi)$ получается из (15) при $l = m/2$:

$$T_r(\pi) = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\left(\sin\frac{(2s+1)\pi}{2n}\right)^{-2r}. \tag{16}$$

Отсюда очевидно, что $T_r(\pi) > 1$.

Введем функцию $V(x) = 1/T_r(x)$. Это бесконечно дифференцируемая 2π-периодическая функция. Она разлагается в ряд Фурье

$$V(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(k)e^{ikx}, \tag{17}$$

где

$$v(k) = v(-k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} V(x)e^{ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} V(x)\cos kx.$$

Коэффициенты $v(k)$ при $k \to \infty$ убывают быстрее любой степени $1/k$, точнее, для любого $\beta > 0$ существует $C(\beta)$ такое, что

$$|v(k)| \leqslant \frac{c(\beta)}{(1+|k|)^{\beta}}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{18}$$

Поскольку $V(x)T_r(x) \equiv 1$, то коэффициенты $v(k)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{l=k-r+1}^{k+r-1} v(l)q_r(k-l) = \delta(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{19}$$

Здесь $\delta(0) = 1$ и $\delta(k) = 0$ при $k \neq 0$.

Коэффициенты $c(l)$, являющиеся коэффициентами Фурье распределения $Z(x)V(x)$, находятся по формулам

$$c(l) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} z(p)v(l-p) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} z(l-\nu)v(\nu), \quad l \in \mathbb{Z}, \tag{20}$$

при условии, что ряды (20) сходятся.

3. Пусть s — неотрицательное целое число. Будем говорить, что последовательность z принадлежит классу G^s, если существует M такое, что $|z(k)| \leqslant M(1+|k|)^s$ для всех $k \in \mathbb{Z}$.

Обозначим $G = \bigcup_{s=0}^{\infty} G^s$.

Сформулируем и докажем основной результат об интерполяции.

Теорема 1. *Пусть $z \in G^s$. Тогда ряды* (20) *сходятся для любого l и определяют коэффициенты $c(l)$. Сплайн*

$$S(j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c(l) Q_r(j - ln) \tag{21}$$

является решением интерполяционной задачи (9). *Последовательность $c = \{c(l)\}$ также принадлежит классу G^s. Решение интерполяционной задачи единственно в классе сплайнов с коэффициентами c из G.*

Доказательство. Поскольку $z \in G^s$, то

$$|z(l-\nu)| \leqslant M(1 + |l - \nu|)^s \leqslant M(1 + |l|)^s (1 + |\nu|)^s.$$

Используя оценку (18) с $\beta = s + 2$, из (20) получаем

$$|c(l)| \leqslant \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |z(l-\nu)| \cdot |v(\nu)| \leqslant M(1 + |l|)^s \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{c(s+2)}{(1+|\nu|)^2}, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда $c \in G^s$. Далее, для сплайна (21) в силу (19) и (20) имеем

$$\begin{aligned} S(kn) &= \sum_{l=k-r+1}^{k+r-1} c(l) q_r(k-l) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} z(p) \sum_{l=k-r+1}^{k+r-1} v(l-p) q_r(k-l) \\ &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} z(p) \sum_{l=-\infty}^{\infty} v(l-p) q_r(k-l) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} z(p) \delta(k-p) \\ &= z(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Единственность. Нужно доказать, что однородная система

$$\sum_{l=k-r+1}^{k+r-1} c(l) q_r(k-l) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{22}$$

в классе G имеет только нулевое решение. Допустим, что есть решение c из класса G^{s_0} при некотором $s_0 \geqslant 0$. Тогда

$$C(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c(l)e^{ilx}$$

является некоторым 2π-периодическим распределением [6, с. 112]. Рассмотрим распределение CT_r, где полином T_r определен формулой (13). Распределение CT_r имеет коэффициенты Фурье

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1}{2\pi}\langle CT_r, e^{-ikx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle C, T_r(x)e^{-ikx}\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\langle C, \sum_{\nu=-r+1}^{r-1} q_r(\nu)e^{-i(k-\nu)x}\right\rangle = \sum_{\nu=-r+1}^{r-1} q_r(\nu)c(k-\nu) \\ &= \sum_{l=k-r+1}^{k+r-1} c(l)q_r(k-l).\end{aligned}$$

В силу (22) все $\alpha_k = 0$. Значит, $CT_r = 0$. Поскольку $T_r(x) > 0$ для всех x, то $C = 0$, а тогда $c(l) = 0$ при всех l. •

4. Зафиксируем $h \geqslant 0$. Решим интерполяционную задачу

$$S(kn) = e^{-ikh}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{23}$$

Рассмотрим экспоненциальный сплайн

$$E(x,j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-ilx}Q_r(j-ln).$$

$E(x,j)$ при каждом x является дискретным сплайном. Аналогичные сплайны рассматривались в [3, с. 17] и [4]. Имеем с учетом (13)

$$E(h,0) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} q_r(l)e^{-ilh} = T_r(h) > 0, \tag{24}$$

$$E(h,j+kn) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{-ilh}Q_r(j-(l-k)n) = e^{-ikh}E(h,j). \tag{25}$$

При $j = 0$ получим $E(h, kn) = e^{-ikh}T_r(h)$. Отсюда решением задачи (23) является сплайн

$$S(j) = E(h, j)/T_r(h).$$

В частном случае $h = 0$ мы ищем сплайн S_0 такой, что $S_0(kn) = 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Решением является сплайн

$$S_0(j) = \frac{E(0, j)}{T_r(0)} = \frac{1}{T_r(0)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} Q_r(j - ln).$$

В [5] показано, что $S_0(j) \equiv 1$ для всех $j \in \mathbb{Z}$ и $T_r(0) = n^{2r-1}$, тем самым получено *разложение единицы.*

Кроме свойств (24)-(25) отметим также следующее равенство:

$$Q_r(j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(x, j)\, dx, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Действительно, пусть $j \in kn : (k+1)n$. Тогда

$$E(x, j) = \sum_{l=k-r+1}^{k+r} e^{-ilx} Q_r(j - ln). \tag{26}$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(x, j)\, dx = \sum_{l=k-r+1}^{k+r} \delta(l) Q_r(j - ln) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(l) Q_r(j - ln) = Q_r(j).$$

Из (26) следует неравенство $|E(x, j)| \leqslant 2rC$, где C — константа, ограничивающая $Q_r(j)$.

5. Аналогично решается интерполяционная задача $S(kn) = e^{kh}$, $k \in \mathbb{Z}$ при фиксированном h.

6. Заключительный раздел посвятим *самодвойственному сплайну* $\varphi(j)$.

Предварительно отметим, что функция $W(x) = 1/\sqrt{T_{2r}(x)}$ является бесконечно дифференцируемой и 2π-периодической. Она разлагается в ряд Фурье

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{T_{2r}(x)}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(k)e^{ikx}.$$

Ввиду вещественности и четности $W(x)$ коэффициенты $w(k)$ будут вещественными и четными: $w(-k) = w(k)$. Для $w(k)$ справедлива оценка, аналогичная (18).

Введем *самодвойственный сплайн*

$$\varphi(j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(x)E(x,j)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(x)\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikx}Q_r(j-kn)\right]dx.$$

В ряде только конечное число слагаемых отлично от нуля. Поменяв местами суммирование и интегрирование, получим

$$\varphi(j) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(k)Q_r(j-kn).$$

Значит, φ является дискретным сплайном. Отметим также формулу

$$\varphi(j-pn) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} w(\nu-p)Q_r(j-\nu n), \quad j,p\in\mathbb{Z}. \tag{27}$$

Также легко проверяются свойство $\varphi(-j) = \varphi(j)$ для всех j и следующая оценка: для любого $\beta > 0$ найдется $D(\beta)$ такое, что

$$|\varphi(j)| \leqslant \frac{D(\beta)}{(1+|j|)^{\beta}}, \quad j\in\mathbb{Z}. \tag{28}$$

Теорема 2. *Сдвиги* $\{\varphi(\cdot - pn\}_{p=-\infty}^{\infty}$ *образуют ортонормированную систему в* $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$I_{pq} := \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(j-pn)\varphi(j-qn) = \delta(p-q).$$

Доказательство. Имеем в силу (25)

$$\varphi(j-qn) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(x)E(x,j)e^{iqx}\,dx,$$

$$\varphi(j-pn)\varphi(j-qn) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(x)[E(x,j)\varphi(j-pn)]e^{iqx}\,dx, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{29}$$

При фиксированном p рассмотрим ряд

$$S_p(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} E(x,j)\varphi(j-pn). \tag{30}$$

В силу (27)

$$E(x,j)\varphi(j-pn) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} w(\nu-p)E(x,j)Q_r(j-\nu n). \tag{31}$$

Имеем

$$E(x,j)Q_r(j-\nu n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikx}Q_r(j-kn)Q_r(j-\nu n).$$

В последнем ряде только конечное число слагаемых отлично от нуля. По лемме 2 и в силу (13)

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} E(x,j)Q_r(j-\nu n)\\ &\quad= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\sum_{j=-\infty}^{\infty} Q_r(j-kn)Q_r(j-\nu n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ikx}q_{2r}(\nu-k)\\ &\quad= e^{-i\nu x}T_{2r}(x).\end{aligned}$$

Суммируя (31) по всем $j \in \mathbb{Z}$, получаем

$$S_p(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} w(p-\nu)e^{-i\nu x}T_{2r} = T_{2r}(x)e^{-ipx}W(x) = e^{-ipx}\sqrt{T_{2r}(x)}. \qquad (32)$$

С помощью (28) можно показать, что ряд (30) сходится равномерно по $x \in [0, 2\pi]$, поэтому, суммируя (29) по всем $j \in \mathbb{Z}$, можно внести сумму под знак интеграла. Получим с учетом (32)

$$I_{pq} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(x)S_p(x)e^{iqx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(q-p)x}\,dx = \delta(q-p). \quad \bullet$$

В непрерывном случае самодвойственный сплайн исследовали Battle[7], Lemarié[8] и В. А. Желудев[4].

Список литературы

[1] Малоземов В. Н., Певный А. Б., *Дискретные периодические B-сплайны*, Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1 **1997**, вып. 4, 13–18.

[2] Schoenberg I. J., *Cardinal interpolation and spline functions*, J. Approx. Theory **2** (1969), no. 2, 167–206.

[3] Schoenberg I. J., *Cardinal spline interpolation*, Regional Conf. Monogr., No. 12, SIAM, Philadelphia, 1973.

[4] Zheludev V. A., *Integral representation of slowly growing equidistant splines and spline wavelets*, Technical Report no. 5-96, Tel Aviv Univ., School Math. Sci., Tel Aviv, 1996.

[5] Певный А. Б., *Дискретные периодические сплайны и решение задачи о бесконечной цилиндрической оболочке*, Вестн. Сыктывкар. ун-та. Сер. 1 **1996**, вып. 2, 187–200.

[6] Шварц Л., *Математические методы для физических наук*, Мир, М., 1965.

[7] Battle G., *A block spin construction of ondelettes. I. Lemarié functions*, Comm. Math. Phys. **110** (1987), 601-615.

[8] Lemarié P. G., *Ondelettes à localisation exponentielle*, J. Math. Pures Appl. (9) **67** (1988), 227-236.

[9] Петухов А. П., *Периодические дискретные всплески*, Алгебра и анализ **8** (1996), № 3, 151-183.

Сыктывкарский государственный университет
математический факультет
Россия, 167001, Сыктывкар,
Коммунистическая, 34–41
E-mail: pevnyi@ssu.komitex.ru

Поступило 8 сентября 1997 г.