



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Шутов, Рост 1-периодических графов, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2002, том 286, 215–226

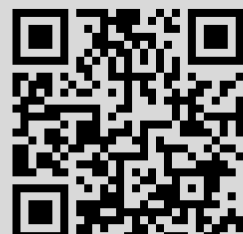
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

25 января 2025 г., 09:11:41



А. В. Шутов

РОСТ 1-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРАФОВ

§0. ВВЕДЕНИЕ

Послойная окантовочная модель роста кристаллов в двумерном варианте содержит разбиения Til пространства R^n . Выбирается затравочный многоугольник M , который окружается соседними с ним многоугольниками, с общей границей длины, большей некоторого фиксированного $\epsilon > 0$. Первый слой окружается соседними с ним многоугольниками второго слоя и так далее. Возникает послойный рост координационных окружностей. При этом поведение n -ой окружности определяет форму кристалла.

Математическое исследование задачи о росте разбиений было начато В. Г. Журавлевым в работе [1]. Было показано, что задача о росте разбиений является частным случаем задачи о росте графов. Для плоских периодических графов была доказана теорема о самоподобном росте. При этом выяснилось, что формы роста периодических графов – выпуклые центрально-симметричные многоугольники. Был найден алгоритм их построения. Кроме того, была получена асимптотическая формула для числа вершин в n -ой координационной окружности. В работе [1] были поставлены вопросы:

- 1) Какие непериодические графы имеют самоподобный рост?
- 2) Какие непериодические графы имеют многоугольный рост?

При исследовании роста непериодических графов было обнаружено, что во многих случаях достаточно ограничиться одним классом графов – квадратной решеткой Z^2 , в некоторых клетках которой проведены диагонали. Простейшими примерами таких графов являются случайные графы, в каждой клетке которых диагональ присутствует с некоторой фиксированной вероятностью p . Компьютерный эксперимент показал, что случайные графы имеют самоподобный рост, при этом форма роста состоит из отрезков прямых и дуг эллипсов. Таким образом, был получен частичный ответ на первый вопрос В. Г. Журавлева.

Настоящая работа представляет собой ответ на второй во-

прос. Для этого вводится новый класс графов: 1-периодические графы. Пусть \vec{l} – некоторый вектор, $L = \{k\vec{l} : k \in Z\}$ – 1-мерная решетка, порожденная вектором \vec{l} . Граф G , вложенный в плоскость R^2 , назовем 1-периодическим, если сдвиги на векторы решетки индуцируют его автоморфизмы. Очевидно, что все периодические графы являются 1-периодическими и что обратное утверждение неверно.

В работе исследуется рост 1-периодических графов с множеством вершин на целочисленной решетке Z^2 . При этом соседние по вертикали или горизонтали вершины соединены ребром. Кроме того, в некоторых клетках полученного графа проведены диагонали. Для клеток фундаментальной области вероятность появления диагонали фиксирована и равна h . Наличие или отсутствие диагоналей в остальных клетках определяется по периодичности.

Для вышеописанного класса графов вводятся понятия n -ой координационной окружности и формы роста. Для векторов периодичности $\vec{l} = \{1, 1\}$, $\vec{l} = \{0, 1\}$ и $\vec{l} = \{1, -1\}$ формы роста найдены явно. Это выпуклые центрально-симметричные многоугольники. Для остальных графов найден эффективный способ получения нижних границ для n -ой координационной окружности. Кроме того, на основании компьютерных экспериментов сделано предположение о многоугольном росте почти всех графов введенного класса. Также сформулированы некоторые гипотезы о многоугольниках роста, в частности, получена эмпирическая формула для числа сторон.

Автор хотел бы выразить благодарность В. Г. Журавлеву за многократные полезные обсуждения задачи о росте графов и А. В. Маалееву за написание программ для проведения компьютерных экспериментов.

§1. 1-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРАФЫ

Рассматриваются графы G , вершины которых совпадают с точками целочисленной решетки Z^2 . Любые две соседние по вертикали или горизонтали вершины графа G соединены ребром. Вершины (i, j) и $(i + 1, j + 1)$ могут быть соединены или не соединены ребром – это зависит от графа G . Граф G назовем 1-периодическим, если существует 1-мерная решетка L , порожден-

ная вектором периодичности \vec{l} (то есть $L = \{k\vec{l} : k \in Z\}$), сдвиги на векторы которой индуцируют автоморфизмы графа G . Решетка L определяет фундаментальную область графа $G : F = R^2/L$.

Пусть $\xi = (\xi_{ij})$ – счетномерная случайная величина. Ее компоненты ξ_{ij} нумеруются целыми точками фундаментальной области F относительно решетки периодов L и являются независимыми бернуллиевскими случайными величинами с распределением

$$P(\xi_{ij} = 1) = p, \quad P(\xi_{ij} = 0) = q, \quad p + q = 1. \quad (1)$$

Пусть Ω – пространство событий случайной величины ξ . На Ω введем бернуллиевскую меру P – произведение вероятностных мер (1). На цилиндрах вероятность P принимает значения

$$\begin{aligned} P(\xi : \xi_{i_1 j_1} = \omega_{i_1 j_1}, \dots, \xi_{i_n j_n} = \omega_{i_n j_n}) = \\ = p^{\omega_{i_1 j_1} + \dots + \omega_{i_n j_n}} q^{n - \omega_{i_1 j_1} - \dots - \omega_{i_n j_n}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где все ω_{ij} равны 0 или 1.

Рассмотрим множество G_L 1-периодических графов с решеткой периодов L . Графы из G_L нумеруются точками $\omega = \omega_{ij}$ пространства Ω с помощью отображения

$$\Omega \ni \omega \xrightarrow{G} G(\omega) \in G_L. \quad (3)$$

В графе G вершины (i, j) и $(i + 1, j + 1)$ из фундаментальной области F соединены диагональю тогда и только тогда, когда $\omega_{ij} = 1$. Задание части графа G , расположенной в фундаментальной области, очевидным образом задает весь граф.

Рассмотренное отображение позволяет перенести меру P на множество 1-периодических графов $G_L = G_L(\xi)$ и задает изоморфизм вероятностных пространств

$$(G_L, P) \simeq (\Omega, P). \quad (4)$$

§2. Постановка задачи о форме роста

Пусть G – случайный граф из $G_L(\xi)$. Геодезической графа G назовем цепь $x' \longrightarrow \dots \longrightarrow x$ с наименьшим числом ребер, соединяющую вершины x' и x . Число ребер в геодезической задает метрику $d_G(x', x)$ на множестве вершин графа G . Определим n -ую координационную окружность с центром в точке $O = (0, 0)$:

$$eq_G(n) = \{x \in Z^2 : d_G(O, x) = n\}. \quad (5)$$

Естественно, что $eq_G(n)$ зависит от графа G .

Пусть решетка периодов L фиксирована. Кривая $\gamma = \gamma_L$ называется формой роста для множества графов G_L , если для почти всех графов $G \in G_L$

$$\frac{eq_G(n)}{n} \longrightarrow \gamma \text{ при } n \longrightarrow \infty, \quad (6)$$

то есть

$$\rho\left(\frac{1}{n}eq_G(n), \gamma\right) \longrightarrow 0 \text{ при } n \longrightarrow \infty \text{ с вероятностью } 1. \quad (7)$$

Здесь ρ – расстояние между множествами по Хаусдорфу:

$$\rho(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} |\vec{x} - \vec{y}|, \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} |\vec{x} - \vec{y}| \right\}. \quad (8)$$

Приведем основные следствия существования формы роста.

1) Пусть $eq_G(a, n) = \{x \in Z^2 : d_G(a, x) = n\}$. Тогда

$$\frac{1}{n}(eq_G(a, n) - a) \longrightarrow \gamma \text{ с вероятностью } 1. \quad (9)$$

2) Пусть $eq_G(a_1, \dots, a_k, n) = \{x \in Z^2 : \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k d_G(a_i, x) = n\}$, $a = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k a_i$. Тогда

$$\frac{1}{n}(eq_G(a_1, \dots, a_k, n) - a) \longrightarrow \gamma \text{ с вероятностью } 1. \quad (10)$$

3) Почти все графы $G \in G_L$ растут самоподобным образом, то есть

$$eq_G(n) \subset (n \cdot \gamma)_{c_n}, \text{ где } \frac{c_n}{n} \longrightarrow 0 \text{ при } n \longrightarrow \infty. \quad (11)$$

4) Пусть $|eq_G(n)|$ – число вершин в $eq_G(n)$,

$$\langle eq_G(n) \rangle = \frac{1}{2\Delta n} \sum_{n-\Delta n < m \leq n+\Delta n} |eq_G m|. \quad (12)$$

Тогда при подходящем выборе Δn

$$\frac{1}{n} \langle eq_G(n) \rangle \longrightarrow 2S(\gamma), \quad (13)$$

где $S(\gamma)$ – площадь области, ограниченной кривой γ .

Графы $G \in G_L$ отличаются изолированностью роста по координатным четвертям. Во второй и четвертой координатных

четвертях ни одна геодезическая графа, выходящая из начала координат, не проходит через диагонали. Поэтому во второй и четвертой четвертях граф G растет так же, как и периодическая квадратная решетка Z^2 , то есть самоподобным образом. Соответствующие участки кривой γ — отрезки $(-1, 0) - (0, 1)$ и $(0, -1) - (1, 0)$. Если граф G растет самоподобным образом в первой четверти, то в третьей четверти он также растет самоподобным образом, причем соответствующие части кривой γ будут симметричны относительно начала координат. Поэтому можно перейти от графов с множеством вершин Z^2 к графам с множеством вершин Z_+^2 из первой четверти. Соответствующую часть γ будем обозначать γ_+ .

Пусть $p = 0$. Тогда любой граф $G \in G_{L,p}$ — периодический. Он является квадратной решеткой Z_+^2 без диагоналей. В этом случае кривая γ_+ существует. Это отрезок $(1, 0) - (0, 1)$.

Пусть $p = 1$. Тогда все графы $G \in G_{L,p}$ вновь одинаковы. Это квадратные решетки Z_+^2 с диагоналями. В этом случае γ_+ существует и состоит из отрезков $(1, 0) - (1, 1)$ и $(1, 1) - (0, 1)$.

Введем следующие обозначения: $\vec{e}_1 = \{1, 0\}$, $\vec{e}_2 = \{0, 1\}$, $\vec{e}_3 = \{1, 1\}$. Кроме того, будем писать $a \subseteq \gamma_+$, если точка a находится внутри области, ограниченной кривой γ_+ и осями координат.

Пусть $0 < p_1 < p_2 < 1$. Пусть γ_{L,p_1} и γ_{L,p_2} существуют. Тогда $\gamma_{L,p_1} \subseteq \gamma_{L,p_2}$.

Рассмотрим вопрос о существовании $\gamma_{L,p}$ для некоторых решеток L . При этом ограничимся рассмотрением первой четверти. Решетку L будем задавать ее порождающим вектором $\vec{l} = \{l_1, l_2\}$.

§3. СЛУЧАЙ $\vec{l} = \{1, 1\}$

Пусть $\vec{l} = \{1, 1\}$ и $0 < p < 1$. Тогда кривая γ_+ существует и состоит из двух отрезков $\alpha : (1, 0) - (1, 1)$ и $\beta : (1, 1) - (0, 1)$. Докажем это.

Так как $p > 0$, то существует вершина (i, j) , из которой выходит диагональ. Без ограничения общности можно считать, что $(i, j) = (0, 0)$. Доказательство существования γ_+ разбивается на 2 части.

Нижняя граница. Для доказательства нижних границ достаточно построить аппроксимационные цепи, ведущие в вершины, расположенные в некоторой окрестности $n \cdot \gamma_+$, длина которых

мало отличается от n . Пусть $a \in n \cdot \alpha$ и a имеет координаты (n, y) . Тогда аппроксимационная цепь в вершину a имеет вид:

$$O \xrightarrow{\vec{e}_3} \dots \xrightarrow{\vec{e}_3} a' \xrightarrow{\vec{e}_1} \dots \xrightarrow{\vec{e}_1} a. \quad (14)$$

При этом вектор \vec{e}_3 встречается в цепи y раз, а вектор \vec{e}_1 — $n - y$ раз. Длина этой цепи равна n . Цепи, ведущие в вершины из $n \cdot \beta$, строятся аналогично. Из наличия аппроксимационных цепей следует неравенство:

$$d_G(O, a) \leq n \forall a \in n \cdot \gamma_+. \quad (15)$$

Верхняя граница. Рассмотрим граф $G_1 = G_{L,1}$. Он представляет собой квадратную решетку с диагоналями. Каждая геодезическая графа $G \in G_{L,p}$ является цепью графа G_1 . Поэтому $d_G(x, y) \geq d_{G_1}(x, y)$. Пусть $a \in n \cdot \gamma_+$. Тогда $d_{G_1}(O, a) = n$. Поэтому

$$d_G(O, a) \geq n \forall a \in n \cdot \gamma_+. \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует, что

$$d_G(O, a) = n \forall a \in n \cdot \gamma_+. \quad (17)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{n} eq(n) \longrightarrow \gamma. \quad (18)$$

§4. СЛУЧАЙ $\vec{T} = \{0, 1\}$

В этом случае γ_+ существует и состоит из двух отрезков $\alpha : (1, 0) - (1, p)$ и $\beta : (1, p) - (0, 1)$. Доказательство вновь разбивается на два этапа.

Нижняя граница. Для построения аппроксимационной цепи в вершину (n, np) , будем пользоваться следующей стратегией. Начинаем движение в точке O и двигаемся по следующему правилу: если из текущей вершины выходит диагональ, то сдвигаемся на вектор \vec{e}_3 , в противном случае сдвигаемся на вектор \vec{e}_1 . Тогда число диагоналей, через которые проходит аппроксимационная цепь длины n , с вероятностью 1 будет больше, чем $np - \sqrt{2pqn} \log \log n$ и, следовательно, точка $(1, p) \subseteq \gamma_+$.

Для построения аппроксимационной цепи в вершину (n, y) , $y < p$, будем руководствоваться вышеописанной стратегией до

тех пор, пока число векторов \vec{e}_3 не станет равным y . Далее будем двигаться вдоль вектора \vec{e}_1 . Существование такой цепи обеспечивает нижнюю границу для отрезка α .

Построим аппроксимационную цепь в вершину a с абсциссой $n - dx$. Она будет иметь вид

$$O \xrightarrow{\vec{e}_2} \dots \xrightarrow{\vec{e}_2} (0, dx) \longrightarrow \dots \longrightarrow a, \quad (19)$$

где c – цепь, не содержащая векторов \vec{e}_2 , построенная в соответствии с вышеописанной стратегией. Вершина a будет иметь координаты $(n - dx, dx + p(n - dx))$ и поэтому будет лежать на отрезке $n \cdot \beta$. Ясно, что в любую вершину из некоторой окрестности этого отрезка можно построить аппроксимационную цепь указанного вида, которая дает нижнюю границу.

Верхняя граница. Верхняя граница для сектора, заданного отрезком α , получается точно так же, как и в предыдущем пункте. Остановимся на доказательстве верхней границы для сектора, заданного отрезком β .

Пусть Γ – геодезическая из вершины O в вершину $(n - dx, y)$. Заметим, что если $a_1 \xrightarrow{\vec{e}_1} a_2 \xrightarrow{\vec{e}_2} a_3$ – участок геодезической, то его можно заменить на $a_1 \xrightarrow{\vec{e}_2} a'_2 \xrightarrow{\vec{e}_1} a_3$ без потери геодезичности. Аналогично, участок $a_1 \xrightarrow{\vec{e}_3} a_2 \xrightarrow{\vec{e}_2} a_3$ можно заменить на $a_1 \xrightarrow{\vec{e}_2} a'_2 \xrightarrow{\vec{e}_3} a_3$. В результате конечного числа таких замен в геодезической Γ , мы получим новую геодезическую Γ' вида

$$O \xrightarrow{\vec{e}_2} \dots \xrightarrow{\vec{e}_2} (0, dx) \longrightarrow \Gamma_1 \longrightarrow (n - dx, y). \quad (20)$$

При этом цепь Γ_1 не содержит векторов \vec{e}_2 . Оценим число векторов \vec{e}_3 в геодезической Γ_1 . Для этого введем оператор проектирования геодезической на фундаментальную область $\pi : (x, y) \longrightarrow (x, 0)$. Очевидно, если в вершине a имеется диагональ, то в вершине $\pi(a)$ она также имеется. Поэтому число диагоналей в Γ_1 не превосходит числа вершин в $\pi(\Gamma_1)$, из которых выходят диагонали. Поэтому с вероятностью 1 $y \leq p|\pi(\Gamma_1)| + \sqrt{2pq|\pi(\Gamma_1)| \log \log |\pi(\Gamma_1)|}$. Таким образом, справедливо неравенство

$$y \leq dx + p(n - dx) + \sqrt{2pq(n - dx) \log \log (n - dx)}, \quad (21)$$

которое и доказывает верхнюю границу.

Аналогично можно разобрать случай $\vec{l} = \{1, 0\}$. При этом γ_+ будет состоять из отрезков $(0, 1) - (p, 1)$ и $(p, 1) - (1, 0)$.

§5. СЛУЧАЙ $\vec{l} = \{1, -1\}$

В этом случае γ_+ существует и состоит из трех отрезков: $(1, 0) - (1, p)$, $(1, p) - (p, 1)$ и $(p, 1) - (0, 1)$. Доказательство разобьем на два этапа.

Сначала докажем, что все вершины из $eq(n)$ лежат на прямых $y = n$, $x = n$, $x + y = k_n + n$, $x + y = k_n + n - 1$. Доказательство проведем индукцией по числу слоев n . Для $n = 1$ утверждение проверяется непосредственно. Пусть утверждение верно для $n = n_0$. Докажем его для $n = n_0 + 1$. Возможны 6 случаев:

1) В вершинах на прямой $x + y = k_{n_0} + n_0 - 1$ имеются диагонали, в вершинах на прямой $x + y = k_{n_0} + n_0$ их нет. Тогда все вершины из $eq(n_0 + 1)$ лежат на прямых $x = n_0 + 1$, $y = n_0 + 1$, $x + y = k_{n_0} + n_0 + 1$.

2) В вершинах на прямой $x + y = k_{n_0} + n_0 - 1$ имеются диагонали, в вершинах на прямой $x + y = k_{n_0} + n_0$ также имеются диагонали. Тогда все вершины из $eq(n_0 + 1)$ лежат на прямых $x = n_0 + 1$, $y = n_0 + 1$, $x + y = k_{n_0} + n_0 + 1$, $x + y = k_{n_0} + n_0 + 2$.

3) В вершинах на прямой $x + y = k_{n_0} + n_0 - 1$ нет диагоналей, в вершинах на прямой $x + y = k_{n_0} + n_0$ также нет диагоналей. Тогда все вершины из $eq(n_0 + 1)$ лежат на прямых $x = n_0 + 1$, $y = n_0 + 1$, $x + y = k_{n_0} + n_0 + 1$.

4) В вершинах на прямой $x + y = k_{n_0} + n_0 - 1$ нет диагоналей, в вершинах на прямой $x + y = k_{n_0} + n_0$ имеются диагонали. Тогда все вершины из $eq(n_0 + 1)$ лежат на прямых $x = n_0 + 1$, $y = n_0 + 1$, $x + y = k_{n_0} + n_0 + 2$.

5) В вершинах на прямой $x + y = k_{n_0} + n_0$ имеются диагонали, на прямой $x + y = k_{n_0} + n_0 - 1$ нет вершин. Тогда все вершины из $eq(n_0 + 1)$ лежат на прямых $x = n_0 + 1$, $y = n_0 + 1$, $x + y = k_{n_0} + n_0 + 1$, $x + y = k_{n_0} + n_0 + 2$.

6) В вершинах на прямой $x + y = k_{n_0} + n_0$ нет диагоналей, на прямой $x + y = k_{n_0} + n_0 - 1$ нет вершин. Тогда все вершины из $eq(n_0 + 1)$ лежат на прямых $x = n_0 + 1$, $y = n_0 + 1$, $x + y = k_{n_0} + n_0 + 1$.

Утверждение доказано.

Поскольку граф симметричен относительно прямой $y = x$, $eq(n)$ также симметрична относительно этой прямой. Поэтому

для доказательства утверждения о форме роста остается найти k_n .

Пусть $(n, k_n) \in eq(n)$ и $(n, k_n + 1) \notin eq(n)$. Тогда геодезическая в вершину (n, k_n) не содержит векторов $\vec{e_3}$ и поэтому получается в соответствии со стратегией параграфа 4. Поэтому с вероятностью 1

$$k_n = pn + O(\sqrt{n \log \log n}) \quad (22)$$

и $\frac{1}{n}(n, k_n) \longrightarrow (1, p)$.

§6. ЗАДАЧА РОСТА В ПОЛОСЕ

Задача роста графа с вектором периодичности $\{1, -1\}$ тесно связана с задачей роста случайного графа в полосе Π , ограниченной прямыми $y = x$ и $y = x + 1$. Сформулируем эту задачу. Пусть $G_{\Pi, p}$ – граф с вершинами из Z^2 , находящимися на прямых $y = x$ и $y = x + 1$. Вершины, соседние по вертикали и горизонтали, всегда соединены ребром. Вершины, соседние по диагонали, соединены ребром с вероятностью p . Пусть $(a_n, a_n) \in eq(n)$. Чему равен $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$?

Пусть $G' \in G_{L, p}$ – граф с вектором периодичности $\{1, -1\}$. Полоса Π является фундаментальной областью графа G' . Поэтому каждый граф $G \in G_{\Pi, p}$ единственным образом продолжается до графа $G' \in G_{L, p}$. При этом каждая геодезическая графа G является цепью графа G' . Пусть $(a_n, a_n) \in eq_{G'}(n)$. Докажем, что существует геодезическая графа G' в вершину (a_n, a_n) , лежащая в полосе Π . Она, очевидно, будет геодезической графа G .

Пусть $k(\Gamma)$ – число звеньев геодезической Γ , ведущей в вершину (a_n, a_n) , лежащих вне полосы Π . Пусть Γ_0 – геодезическая с минимальным $k(\Gamma)$.

Предположим, что $k(\Gamma_0) > 0$. Каждый участок Γ_0 , лежащий ниже прямой $y = x$, отобразим симметрично относительно этой прямой. Аналогично поступим со всеми участками Γ_0 , лежащими выше прямой $y = x + 1$. Так как граф G' симметричен относительно прямых $y = x$ и $y = x + 1$, то в результате этих преобразований цепь Γ_0 перейдет в цепь Γ_1 той же длины, то есть в геодезическую. При этом $k(\Gamma_1) < k(\Gamma_0)$. Полученное противоречие говорит о том, что $k(\Gamma_0) = 0$.

Таким образом, задача роста $G_{\Pi, p}$ является частным случаем задачи роста $G_{L, p}$. При этом $\frac{1}{n}(a_n, a_n) \longrightarrow A$, где A – точка

пересечения $\gamma_{L,p}$ с прямой $y = x$. Поэтому с вероятностью 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} a_n = \frac{1+p}{2}. \quad (23)$$

§7. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

1) Таким образом, доказана следующая

Теорема. Пусть $G_{L,p}$ – множество 1-периодических графов, заданных вектором периодичности \vec{T} и вероятностью p .

- (а) Если $\vec{T} = \{1, 1\}$, то форма роста – многоугольник с вершинами $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(-1, -1)$, $(0, -1)$.
- (б) Если $\vec{T} = \{1, 0\}$, то форма роста – многоугольник с вершинами $(1, 0)$, $(1, p)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(-1, -p)$, $(0, -1)$.
- (в) Если $\vec{T} = \{1, -1\}$, то форма роста – многоугольник с вершинами $(1, 0)$, $(1, p)$, $(p, 1)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(-1, -p)$, $(-p, -1)$, $(0, -1)$.

2) Как было показано, для получения нижних границ в задаче о форме роста нужно уметь строить аппроксимационные цепи. При построении цепей необходимо придерживаться некоторого алгоритма или стратегии. Простейшим видом стратегий являются одношаговые стратегии. Одношаговая стратегия задается упорядоченным набором из $n + 1$ векторов: $\{x_1, y_1\}, \dots, \{x_n, y_n\}, \{x_{n+1}, y_{n+1}\}$.

Движение происходит по следующему алгоритму. Пусть a – начальная вершина. Если в вершине $a + \{x_1, y_1\}$ имеется диагональ, то строим цепь вида $x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. В противном случае проверяем вершину $a + \{x_2, y_2\}$. Если в ней имеется диагональ, то строим цепь вида $x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. В противном случае проверяем вершину $a + \{x_3, y_3\}$ и так далее. Если в вершине $a + \{x_n, y_n\}$ имеется диагональ, то строим цепь вида $x_n \vec{e}_1 + y_n \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, в противном случае строим цепь вида $x_{n+1} \vec{e}_1 + y_{n+1} \vec{e}_2$. Для построения следующего участка цепи описанный шаг алгоритма повторяется.

Пусть случайная величина X_k принимает значение i , если при k -ом выполнении алгоритма диагональ была обнаружена в вершине $a + \{x_i, y_i\}$. Тогда или вероятности событий $X_k = i$ не зависят от k , или же случайные величины X_k задают марковский случайный процесс с дискретным временем. В любом случае пусть

существуют предельные вероятности $p_i = \lim_{k \rightarrow \infty} p(X_k = i)$. Пусть

$$v_1 = \sum_{i=1}^n (x_i + 1)pq^{i-1} + x_{n+1}q^n, \quad (24)$$

$$v_2 = \sum_{i=1}^n (y_i + 1)pq^{i-1} + y_{n+1}q^n, \quad (25)$$

$$s = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i + 1)pq^{i-1} + (x_{n+1} + y_{n+1})q^n. \quad (26)$$

Тогда

$$\left(\frac{v_1}{s}, \frac{v_2}{s} \right) \subseteq \gamma. \quad (27)$$

Пусть, например, $\vec{l} = \{0, l_2\}$. Рассмотрим стратегию $\{0, 0\}, \dots, \{0, l_2 - 1\}, \{1, 0\}$. Тогда вершина

$$A_{l_2} \left(\frac{p}{1 - q^{l_2}(1 + l_2p - p)}, \frac{1 - q^{l_2}(1 + l_2p)}{1 - q^{l_2}(1 + l_2p - p)} \right) \subseteq \gamma. \quad (28)$$

Численный эксперимент показывает, что A_{l_2} является вершиной многоугольника γ . При этом

$$A_{l_2} \longrightarrow (p, 1) \text{ при } l_2 \longrightarrow \infty. \quad (29)$$

3) Во всех рассмотренных примерах графы обладали свойством самоподобного роста. Однако, можно показать, что условия 1-периодичности недостаточно для существования формы роста. Возьмем последовательность $\{n_k\}$ такую, что не существует предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_k}{n}$. Построим 1-периодический граф G_0 с периодом $\vec{l} = \{0, 1\}$ такой, что в вершине $(0, n)$ имеется диагональ в том и только том случае, когда $n \in \{n_k\}$. Тогда для графа G_0 не существует формы роста.

4) Тем не менее, компьютерные эксперименты позволили высказать следующие предположения.

а) Для почти всех графов $G \in G_{L,p}(\xi)$ существует не зависящая от ξ форма роста $\gamma = \gamma_{L,p}$ (то есть для самоподобного роста достаточно 1-периодичности и существования математического ожидания числа диагоналей в графе).

б) При $0 < p \leq 1$ форма роста $\gamma_{L,p}$ непрерывно зависит от p (непрерывность понимается в смысле метрики Хаусдорфа). При $p = 0$ возможен фазовый переход.

с) Пусть $\vec{l} = \{l_1, l_2\}$ – вектор периодичности. Тогда γ – выпуклый многоугольник с n сторонами, где

$$\begin{aligned} n &= 2|l_1 - l_2| + 6, & \text{если } l_1 l_2 > 0, \\ n &= 2|l_1 - l_2| + 4, & \text{если } l_1 l_2 \leq 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Строгие доказательства высказанных предположений в настоящее время неизвестны.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Журавлев, *Самоподобный рост периодических разбиений*, Алгебра и анализ **13**, вып. 2, (2001), 1–26.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступило 25 марта 2002 г.