К ОБОБЩЕНИЮ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВОГО КРИТЕРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НА СИСТЕМЫ С НЕДЕМПФИРОВАННЫМИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМИ ЗВЕНЬЯМИ

Н. Т. КУЗОВКОВ

(Москва)

Амплитудно-фазовый критерий устойчивости обобщается на системы, содержащие недемпфированные колебательные звенья, т. е. такие звенья, передаточные функции которых имеют сопряженно комплексные полюсы, расположенные на мнимой оси. Показывается возможность применения к указанным системам метода логарифмических частотных характеристик.

При описании систем атоматического регулирования линейными дифференциальными уравнениями вязким трением, имеющим место в этих системах, зачастую пренебрегают, вследствие чего механические колебательные звенья переходят в недемпфированные колебательные звенья, т. е. такие, передаточная функция которых имеет пару сопряженно комплексных полюсов, расположенных на мнимой оси. Примером недемпфированных колебательных звеньев могут служить центробежный регулятор без катаракта в системе регулирования скорости паровой машины, самолет, стабилизируемый на заданном курсе при помощи автопилота, в случае пренебрежения аэродинамическим демпфированием и действием боковой силы и др. Наличие в системе регулирования недемпфированных колебательных звеньев не приводит к каким-либо осложнениям при расчетах, если устойчивость системы исследуется при помощи критериев Гурвица или Михайлова. Применение к указанным системам амплитудно-фазового критерия устойчивости затруднено, однако, тем обстоятельством, что в имеющейся литературе нет четко сформулированного правила построения годографов передаточных функций с сопряженно комплексными полюсами, расположенными на мнимой оси; относящиеся к этому случаю замечания носят неконкретный характер и поэтому не могут принести пользы при построении годографа [1].

Цель настоящей заметки заключается в том, чтобы показать, каким образом, пользуясь приемами, применявшимися для обобщения амплитудно-фазового критерия на системы с простым или кратным полюсом в начале координат [2,3], можно сформулировать и строго обосновать правило построения замкнутого годографа передаточной функции, имеющей сопряженно комплексные полюсы на мнимой оси.

Предположим, что система автоматического регулирования содержит недемпфированное колебательное звено, т. е. звено, передаточная функция которого имеет вид:

$$W_1(p) = \frac{k}{T^2p^2+1}. \tag{1}$$

Для того чтобы исследовать устойчивость этой системы методом логарифмических частотных характеристик, необходимо знать вид годографа,

а также логарифмические амплитудную и фазовую характеристики для всех звеньев этой системы, в том числе и для звена (1).

Представим передаточную функцию недемпфированного колебательного звена в виде

$$W_1(p) = \frac{k_1}{p^2 + \omega_1^2},$$

где p — оператор Лапласа, ω_1 — собственная частота этого звена.

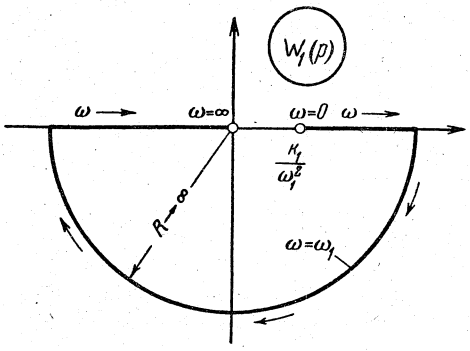

Рис. 1

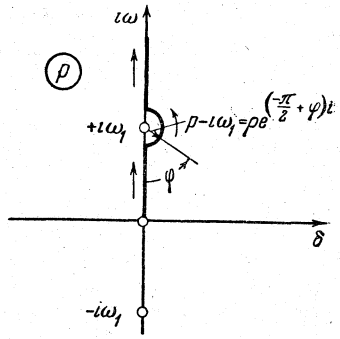

Рис. 2

Если оператор p заменить через $i\omega$, то при изменении ω в диапазоне $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_1$ будем иметь

$$W_1(i\omega) = \frac{k_1}{\omega_1^2 - \omega^2} > 0,$$

т. е. при возрастании частоты ω от нуля до значения ω_1 передаточная функция $W_1(i\omega)$ будет представлять собой действительную положительную величину, стремящуюся к бесконечности при $\omega \to \omega_1$. Соответствующий участок годографа в комплексной плоскости $W_1(i\omega)$ представляет собой совпадающую с положительной действительной полуосью прямую, которая начинается в точке k_1 / ω_1^2 (при $\omega = 0$) и при $\omega \to \omega_1$ уходит в бесконечность (рис. 1).

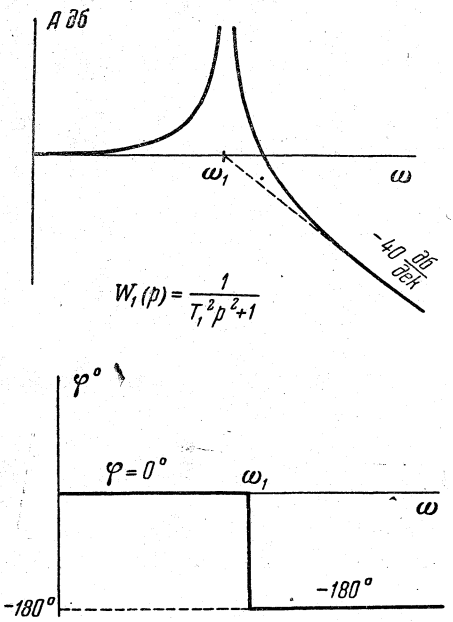

Рис. 3

При изменении ω в диапазоне $\omega_1 \leqslant \omega \leqslant \infty$ получим

$$W_1(i\omega) = \frac{k_1}{\omega_1^2 - \omega^2} \leqslant 0,$$

т. е. при возрастании частоты ω от значения ω_1 передаточная функция $W_1(i\omega)$ будет представлять собой действительную отрицательную величину, которая, убывая от бесконечно больших значений, стемится к нулю при $\omega \to \infty$. Соответствующий участок годографа функции $W_1(i\omega)$ представляет собой совпадающую с отрицательной действительной полуосью прямую, начинающуюся в бесконечности и оканчивающуюся в начале координат (рис. 1).

Поскольку суждение об устойчивости системы регулирования возможно лишь в случае замкнутого годографа, возникает вопрос, каким образом следует соединять два уходящих в бесконечность конца годографа недемпфированного колебательного звена, который изображен на рис. 1. Для того чтобы решить этот вопрос, необходимо полюс передаточной функции $W_1(i\omega)$, расположенный в точке $+i\omega_1$ мнимой оси, отнести к левой или правой части комплексной плоскости p путем обхода его по полуокружности бесконечно малого радиуса. Чтобы не иметь дела с системами, не устойчивыми в разомкнутом состоянии (в этом случае формулировка амплитудно-фазового критерия несколько усложняется), целесообразно относить указанный полюс к левой полуплоскости, т. е. производить его обход по малой полуокружности, расположенной в правой части плоскости. При таком обходе полюса $+i\omega_1$ будем иметь (рис. 2)

$$W_1(p) = \frac{k_1}{(p - i\omega_1)(p + i\omega_1)} =$$

$$= \frac{k_1}{\rho e^{\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right) i} \cdot \left(\rho e^{\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right) i} + 2\omega_1 e^{\frac{\pi}{2} i}\right)}.$$

Здесь ρ — бесконечно малый радиус полуокружности, по которой совершается обход полюса, φ — угол, отсчитываемый, как показано на рис. 2. Пренебрегая в знаменателе бесконечно малой второго порядка, получим

$$W_1(p) = \frac{k_1}{2\rho\omega_1 e^{\varphi i}} =$$

$$= \frac{k_1}{2\rho\omega_1} e^{-\varphi i}. \qquad (2)$$

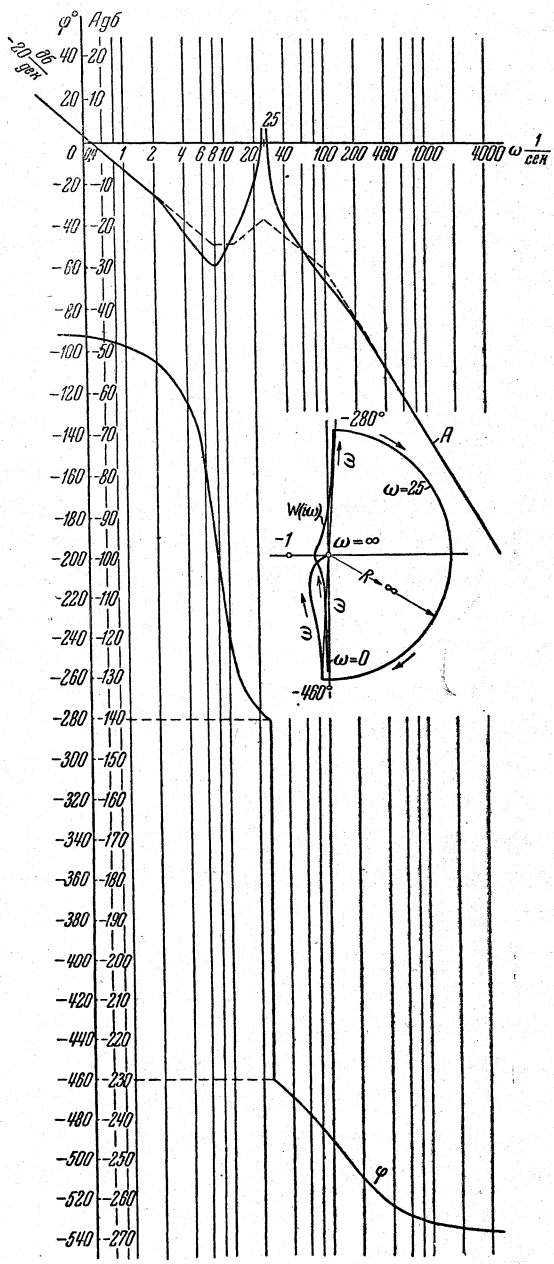

Рис. 4

Поскольку при обходе полюса $+i\omega_1$ по указанной на рис. 2 полуокружности угол φ изменяется от 0 до $+\pi$, а при сремлении к нулю радиуса ρ этой полуокружности величина $k_1/2\rho\omega_1$ стремится к бесконечности, из выражения (2) заключаем, что уходящая в бесконечность по положительной действительной оси ветвь годографа W_1 соединяется с ветвью годографа, совпадающей с отрицательной действительной полуосью, полуокружностью бесконечно большого радиуса, расположенной в

нижней полуплоскости (рис. 1). Другими словами, при возрастании частоты ω одна бесконечная ветвь годографа переходит в другую через полуокружность бесконечно большого радиуса, причем этот переход совершается по часовой стрелке.

Вторая половина годографа функции $W_1(i\omega)$, соответствующая отрицательным значениям ω, получается, как обычно, т. е. путем зеркального отражения относительно действительной оси кривой, изображенной на рис. 1.

Логарифмические амплитудную и фазовую характеристики недемпфированного колебательного звена нетрудно получить по его передаточной функции $W_1 = k_1/(p^2 + \omega_1^2)$, а также по годографу, показанному на рис. 1. Эти характеристики представлены на рис. 3.

На рис. 4 в качестве примера приведены логарифмические амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики разомкнутой системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{0{,}445\,(0{,}13^2 p^2 + 2 \times 0{,}3 \times 0{,}13\,p + 1)\,(0{,}08p + 1)}{p\,(0{,}1313p + 1)\,(0{,}04^2 p^2 + 1)\,(0{,}01\,p + 1)},$$

имеющей на мнимой оси полюсы $p_1 = 0$, $p_{2,3} = \pm i\,25$, а также показан примерный вид той половины годографа этой функции, которая соответствует положительным значениям ω. Поскольку передаточная функция разомкнутой системы не содержит полюсов в правой части плоскости p, а годограф этой функции не охватывает точки -1, соответствующая замкнутая система является устойчивой.

Поступила в редакцию
12 декабря 1953 г.

Цитированная литература

1. Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Р. Теория следящих систем. Изд. иностр. литер., 1951.
2. Солодовников В. В. Методы анализа качества систем автоматического регулирования. Труды МВТУ им. Баумана, вып. 1 и 2, 1949.
3. Цыпкин Я. З. Дополнение к книге Г. Лауэра, С. Лесника и Л. Мадсона «Основы теории сервомеханизмов». Госэнергоиздат, 1948.