



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Буренков, О разбиениях единицы,
Тр. МИАН СССР, 1979, том 150, 24–30

<https://www.mathnet.ru/tm2477>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

18 апреля 2025 г., 10:33:11



В. И. БУРЕНКОВ

О РАЗБИЕНИЯХ ЕДИНИЦЫ

Во многих вопросах, связанных с изучением свойств функций, заданных на достаточно общих множествах $\mathcal{E} \subset R^n$, бывает полезным использовать «разбиения единицы», позволяющие «склеивать» локальные построения. Целью настоящей заметки является построение разбиения единицы в возможно более общей ситуации.

Мы будем пользоваться следующими обозначениями. Пусть $X \subset R^n$ — некоторое множество и число $\delta > 0$, положим

$$X_\delta = \{x: B(x, \delta) \subset X\}, \quad X^\delta = \bigcup_{x \in X} B(x, \delta),$$

где $B(x, \delta)$ — открытый шар с центром в точке x радиуса δ . Если $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, $\delta_i > 0$, — вектор, то

$$X_\delta \equiv X_{\delta_1, \dots, \delta_n} = \{x: Q(x, \delta) \subset X\}, \quad X^\delta \equiv X^{\delta_1, \dots, \delta_n} = \bigcup_{x \in X} Q(x, \delta),$$

где

$$Q(x, \delta) \equiv Q(x, \delta_1, \dots, \delta_n) = \{y: |x_i - y_i| < \delta_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Нам понадобятся следующие свойства множеств X_δ и X^δ :

$$\begin{aligned} (X_{\delta_1})_{\delta_2} &= X_{\delta_1 + \delta_2}, & (X^{\delta_1})^{\delta_2} &= X^{\delta_1 + \delta_2} & (\delta_1, \delta_2 > 0), \\ (X_{\delta_1})^{\delta_2} &\subset X_{\delta_1 - \delta_2}, & (X^{\delta_1})_{\delta_2} &\supset X^{\delta_1 - \delta_2} & (\delta_1 > \delta_2 > 0), \\ (X_{\delta_1})^{\delta_2} &\subset X^{\delta_2 - \delta_1}, & (X^{\delta_1})_{\delta_2} &\supset X_{\delta_2 - \delta_1} & (\delta_2 > \delta_1 > 0), \end{aligned}$$

$$(X \cup Y)_\delta \supset X_\delta \cup Y_\delta, \quad (X \cup Y)^\delta = X^\delta \cup Y^\delta,$$

$$(X \cap Y)_\delta = X_\delta \cap Y_\delta, \quad (X \cap Y)^\delta \subset X^\delta \cap Y^\delta$$

(если δ_1 и δ_2 — векторы, то $\delta_1 > \delta_2$ обозначает, что $\delta_{1i} > \delta_{2i}$, $i = 1, \dots, n$). В случае, когда δ — число, эти свойства приведены в работе автора [1], в случае, когда δ — вектор, они также справедливы. Нетрудно получить эти свойства, используя очевидные соотношения $y \in Q(x, \delta) \Leftrightarrow x \in Q(y, \delta)$

и $\bigcup_{y \in Q(x, \delta_1)} Q(x, \delta_2) = Q(x, \delta_1 + \delta_2)$.

Для $x \in \bigcup_m X_m$ обозначим через $\kappa(x)$ количество множеств X_m , содержащих точку x , и назовем число $\kappa = \sup_{x \in \bigcup_m X_m} \kappa(x)$ кратностью покрытия $\{X_m\}$.

Обозначим далее для $x \in \bigcup_m X_m$ через $\tilde{\kappa}(x)$ наименьшее из натуральных чисел, обладающих следующим свойством: существует такая окрестность

U_x , что количество множеств X_m , пересекающихся с U_x , равно $\tilde{\kappa}(x)$. Число $\tilde{\kappa} = \sup_{x \in \bigcup_m X_m} \tilde{\kappa}(x)$ назовем регулярной кратностью покрытия $\{X_m\}$. Отметим,

что всегда $\kappa(x) \leq \tilde{\kappa}(x)$ и $\kappa \leq \tilde{\kappa}$. С другой стороны, нетрудно привести пример покрытия, для которого $\kappa < \infty$, но $\tilde{\kappa} = \infty$ (пусть $n = 1$, $X_0 =] - 1, \frac{1}{2} [$, $X_m =] 2^{-m-1}, 2^{-m+1} [$, $m = 1, 2, \dots$; в этом случае $\kappa = 3$, $\tilde{\kappa} = \infty$, так как $\tilde{\kappa}(0) = \infty$).

Отметим, что если для $x \in \bigcup_m X_m$

$$r_x = \inf_{l: x \in X_l} \rho(x, X_l) > 0,$$

то $\tilde{\kappa}(x) = \kappa(x)$, так как в этом случае шар $B(x, r_x/2)$ пересекается только с теми X_m , которые содержат x . В противном случае $\kappa(x) < \tilde{\kappa}(x)$.

Обозначим еще через N_m число множеств X_l , пересекающихся с X_m (включая X_m) и рассмотрим число $N \equiv N(\{X_m\}) = \sup_m N_m$. Отметим, что $\kappa \leq N$; если все множества X_m открыты, то $\tilde{\kappa} \leq N$ (если $x \in \bigcup_m X_m$, то для некоторого m $x \in X_m$ вместе с некоторой окрестностью, которая пересекается с не бóльшим количеством множеств X_l , чем X_m . В общем случае может быть так, что $\tilde{\kappa}(\{X_m\}) < \infty$, $N(\{X_m\}) = \infty$, и наоборот, что $\tilde{\kappa}(\{X_m\}) = \infty$, $N(\{X_m\}) < \infty$.

Очевидно, что с расширением множеств X_m величины $\kappa(\{X_m\})$, $\tilde{\kappa}(\{X_m\})$ и $N(\{X_m\})$ не убывают.

Пусть \mathcal{E} — некоторое множество в R^n и пусть конечный или счетный набор множеств \mathcal{E}_m обладает тем свойством, что

$$\mathcal{E} \subset \bigcup_m \mathcal{E}_m. \quad (1)$$

Пусть, далее, $\mathcal{E}'_m \subset \mathcal{E}_m$, причем по-прежнему

$$\mathcal{E} \subset \bigcup_m \mathcal{E}'_m, \quad (2)$$

и для некоторого вектора $\rho_m = (\rho_{m1}, \dots, \rho_{mn})$, $\rho_{mi} > 0$,

$$\mathcal{E}''_m = (\mathcal{E}'_m)^{\rho_m} \subset \mathcal{E}_m. \quad (3)$$

Рассмотрим вектор $\tilde{\rho}_m = (\tilde{\rho}_{m1}, \dots, \tilde{\rho}_{mn})$, где

$$\tilde{\rho}_{mi} = \inf_{l: \mathcal{E}'_l \cap \mathcal{E}''_m \neq \emptyset} \rho_{li}.$$

Л е м м а. Пусть выполнены условия (1) — (3),

$$\tilde{\kappa}(\{\mathcal{E}''_m\}) < \infty \quad (4)$$

и для всех рассматриваемых m

$$\tilde{\rho}_m > 0. \quad (5)$$

Существуют такие неотрицательные функции $\psi_m \in C^\infty(R^n)$, что

$$1) \sum_m \psi_m(x) = 1, x \in \bigcup_m \mathcal{E}'_m; \sum_m \psi_m(x) = 0, x \in {}^c(\bigcup_m \mathcal{E}_m);$$

$$2) \mathcal{E}'_m \subset \text{supp } \psi_m \subset \mathcal{E}''_m;$$

$$3) \text{ для любого целочисленного вектора } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \geq 0$$

$$|D^\alpha \psi_m(x)| \leq c(\alpha, \kappa) \tilde{\rho}_m^{-\alpha},$$

где $\tilde{\rho}_m^{-\alpha} = \tilde{\rho}_{m1}^{-\alpha_1} \dots \tilde{\rho}_{mn}^{-\alpha_n}$, $c(\alpha, \kappa)$ зависит только от α и $\kappa \equiv \kappa(\{\mathcal{E}''_m\})$.

З а м е ч а н и е 1. Если $N(\{\mathcal{E}_m''\}) < \infty$ (или тем более $N(\{\mathcal{E}_m\}) < \infty$), то условия (4) и (5) выполняются. Так как \mathcal{E}_m'' — открытые множества, то $\tilde{\kappa}(\{\mathcal{E}_m''\}) \leq N(\{\mathcal{E}_m''\})$, кроме того, множество $\{l : \mathcal{E}_l'' \cap \mathcal{E}_m'' \neq \emptyset\}$ конечно.

З а м е ч а н и е 2. Если множества \mathcal{E}_m'' ограничены, $\bar{\mathcal{E}}_m'' \subset \mathcal{E}_m$ и $\tilde{\kappa}(\{\mathcal{E}_m\}) < \infty$, условия (4) и (5) выполняются. Очевидно, что $\tilde{\kappa}(\{\mathcal{E}_m''\}) < \tilde{\kappa}(\{\mathcal{E}_m\})$; кроме того, множество $\{l : \mathcal{E}_l'' \cap \mathcal{E}_m'' \neq \emptyset\}$ конечно. (Если оно счетно, то выберем последовательность $x_l \in \mathcal{E}_l'' \cap \mathcal{E}_m'' \neq \emptyset$; предельная точка $x_\infty \in \bar{\mathcal{E}}_m'' \subset \mathcal{E}_m$ и $\tilde{\kappa}(x_\infty) = \infty$, поскольку всякая окрестность точки x_∞ содержит бесконечное число x_l и, значит, пересекается с бесконечным числом \mathcal{E}_l'' .)

З а м е ч а н и е 3. Из 2) следует, что $\mathcal{E} \subset \bigcup_m \text{supp } \psi_m$, причем $\kappa(\{\text{supp } \psi_m\}) \leq \kappa(\{\mathcal{E}_m''\})$.

З а м е ч а н и е 4. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $0 < \varepsilon < 1$; выбирая вместо множеств $\mathcal{E}_m'' = (\mathcal{E}_m')^{\rho_m}$ множества $(\mathcal{E}_m'')^* = (\mathcal{E}_m')^{\varepsilon \rho_m}$ мы получим функции ψ_m , удовлетворяющие 1), для которых

$$2') \mathcal{E}_m' \subset \text{supp } \psi_m \subset (\mathcal{E}_m')^{\varepsilon \rho_m};$$

при этом

$$3') |D^\alpha \psi_m(x)| \leq c(\alpha, \kappa) \varepsilon^{-\alpha} \bar{\rho}_m^{-\alpha},$$

так как для множеств $(\mathcal{E}_m'')^*$ числа $\bar{\rho}_{mi}^* \geq \varepsilon_i \bar{\rho}_{mi}$.

З а м е ч а н и е 5. В условии (3) можно считать, что ρ_m — число, а не вектор, тогда $\bar{\rho}_m$ также число и неравенство 3) можно переписать так:

$$3'') |D^\alpha \psi_m(x)| \leq c(\alpha, \kappa) \bar{\rho}_m^{-|\alpha|}.$$

Это следует из того, что $\mathcal{E}_m \left(\frac{\rho_m}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{\rho_m}{\sqrt{n}} \right) \subset \mathcal{E}_m^{\rho_m} \subset \mathcal{E}_m^{(\rho_m, \dots, \rho_m)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\chi_m(x)$ характеристическую функцию множества $\bar{\mathcal{E}}_m = (\mathcal{E}_m')^{1/2\rho_m}$ и рассмотрим ее неоднородное усреднение с векторным радиусом усреднения $\frac{1}{4}\rho_m = \left(\frac{1}{4}\rho_{m1}, \dots, \frac{1}{4}\rho_{mn}\right)$,

$$\begin{aligned} \varphi_m(x) &= \int_{R^n} \chi_m\left(x - \frac{1}{4}\rho_m z\right) \omega(z) dz \equiv \\ &\equiv \int_{R^n} \chi_m\left(x_1 - \frac{1}{4}\rho_{m1}z_1, \dots, x_n - \frac{1}{4}\rho_{mn}z_n\right) \omega(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\omega(z)$ — ядро усреднения, удовлетворяющее условиям: $\omega \in C^\infty(R^n)$, $\omega(z) = 0$, если хотя бы для одного i $|z_i| \geq 1$, $\omega(z) \geq 0$, $\int_{R^n} \omega(z) dz = 1$. Из свойств усреднений следует, что

$$|D^\alpha \varphi_m(x)| \leq c_\alpha \bar{\rho}_m^{-\alpha}, \quad 0 \leq \varphi_m(x) \leq 1 \quad (6)$$

и

$$(\mathcal{E}_m')^{\frac{1}{4}\rho_m} \subset \text{supp } \varphi_m \subset (\mathcal{E}_m')^{\frac{3}{4}\rho_m} \subset \mathcal{E}_m, \quad \varphi_m(x) = 1, \quad x \in (\mathcal{E}_m')^{\frac{1}{4}\rho_m}. \quad (7)$$

Поясним свойство (7). Из (5) следует, что $\varphi_m(x)$ может не быть равной нулю только для тех x , для которых параллелепипед $Q(x, 1/4\rho_m)$ пересекается с $\bar{\mathcal{E}}_m$, т. е. для $x \in (\bar{\mathcal{E}}_m)^{1/4\rho_m} = ((\mathcal{E}_m')^{1/2\rho_m})^{1/4\rho_m} = (\mathcal{E}_m')^{3/4\rho_m}$. С другой стороны, $\varphi_m(x) = 1$ для тех x , для которых $Q(x, 1/4\rho_m) \subset \bar{\mathcal{E}}_m$, т. е. для $x \in (\bar{\mathcal{E}}_m)_{1/4\rho_m} \subset ((\mathcal{E}_m')^{1/2\rho_m})_{1/4\rho_m} \subset (\mathcal{E}_m')^{1/4\rho_m}$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \sum_m \varphi_m(x), \quad x \in R^n. \quad (8)$$

Учитывая (7), получим, что $(\mathcal{E}^{(1)} \equiv \bigcup_m (\mathcal{E}_m')^{1/4\rho_m})$

$$\Phi(x) \leq \kappa, \quad x \in R^n; \quad \Phi(x) \geq 1, \quad x \in \mathcal{E}^{(1)}. \quad (9)$$

Так как $\tilde{\kappa} < \infty$, то для любого $x \in \bigcup_m \mathcal{E}_m$ существует такая окрестность U_x , что

$$\Phi(y) = \sum_{m \in M(x)} \varphi_m(y), \quad y \in U_x, \quad (10)$$

где $M(x) = \{m : U_x \cap \mathcal{E}_m \neq \emptyset\}$ — конечное множество.

Из (10) следует, что функция $\Phi(x)$ бесконечно дифференцируема на $\bigcup_m \mathcal{E}_m$. При этом

$$D^\alpha \Phi(x) = \sum_{m \in M(x)} D^\alpha \varphi_m(x) = \sum_{l: x \in \text{supp } \varphi_l} D^\alpha \varphi_l(x)$$

(так как вне $\text{supp } \varphi_l$ $D^\alpha \varphi_l(x) = 0$) и

$$|D^\alpha \Phi(x)| \leq \sum_{l: x \in \text{supp } \varphi_l} c_\alpha \rho_l^{-\alpha} \leq \kappa c_\alpha (\min_{l: x \in \mathcal{E}_l} \rho_l)^{-\alpha} \quad (11)$$

($\min \rho_l = (\min \rho_{l1}, \dots, \min \rho_{ln})$).

Положим

$$\psi_m^{(1)}(x) = \varphi_m(x)/\Phi(x), \quad x \in \mathcal{E}^{(1)}, \quad (12)$$

тогда

$$\text{supp } \psi_m^{(1)} = \text{supp } \varphi_m \cap \mathcal{E}^{(1)} \quad (13)$$

и

$$\sum_m \psi_m^{(1)}(x) = 1, \quad x \in \mathcal{E}^{(1)}. \quad (14)$$

Кроме того, $\psi_m^{(1)} \in C^\infty(\mathcal{E}^{(1)})$ и для $x \in \text{supp } \psi_m^{(1)}$

$$D^\alpha \psi_m^{(1)}(x) = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta! (\alpha - \beta)!} D^{\alpha - \beta} \varphi_m(x) D^\beta [(\Phi(x))^{-1}]$$

($\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$, $0 \leq \beta \leq \alpha$ означает, что $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, $i = 1, \dots, n$). В силу правил дифференцирования $D^\beta [(\Phi(x))^{-1}] = (\Phi(x))^{-1 - |\beta|} \Sigma$, где Σ состоит из конечного числа слагаемых вида $D^{\gamma_1} \Phi \cdot D^{\gamma_2} \Phi \cdot \dots \cdot D^{\gamma_{|\beta|}} \Phi$, причем $0 \leq \gamma_i \leq \beta$, $\gamma_1 + \dots + \gamma_{|\beta|} = \beta$, поэтому

$$\begin{aligned} |D^\alpha \psi_m^{(1)}(x)| &\leq c_\alpha^{(1)} \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \rho_m^{-\alpha + \beta} \kappa^{|\beta|} (\min_{l: x \in \mathcal{E}_l} \rho_l)^{-\beta} \leq \\ &\leq c_\alpha^{(1)} \kappa^{|\alpha|} \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \rho_m^{-\alpha + \beta} (\inf_{x \in \mathcal{E}_m} \min_{l: x \in \mathcal{E}_l} \rho_l)^{-\beta} \leq \\ &\leq c_\alpha^{(1)} \kappa^{|\alpha|} \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \rho_m^{-\alpha + \beta} (\inf_{l: \mathcal{E}_l \cap \mathcal{E}_m \neq \emptyset} \rho_l)^{-\beta}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|D^\alpha \psi_m^{(1)}(x)| \leq c_\alpha^{(2)} \kappa^{|\alpha|} \tilde{\rho}_m^{-\alpha}, \quad x \in \mathcal{E}^{(1)}. \quad (15)$$

Пусть, далее, $\mathcal{E}^{(2)} = \bigcup_m (\mathcal{E}'_m)^{\rho_m/8}$, λ_m — характеристическая функция множества

$$\mathcal{E}_m \cap \mathcal{E}^{(2)} = \mathcal{E}_m \cap \left(\bigcup_{l: \mathcal{E}'_l \cap \mathcal{E}_m \neq \emptyset} (\mathcal{E}'_l)^{\frac{\rho_l}{8}} \right) \subset \bigcup_{l: \mathcal{E}'_l \cap \mathcal{E}_m \neq \emptyset} (\mathcal{E}'_l)^{\frac{\rho_l}{8}}, \quad (16)$$

а μ_m — усреднение с векторным радиусом усреднения $\tilde{\rho}_m/8$ (аналогичное (5)), тогда

$$|D^\alpha \mu_m(x)| \leq c_\alpha^{(3)} \tilde{\rho}_m^{-\alpha}. \quad (17)$$

Кроме того, $(\mathcal{E}^{(0)} = \bigcup_m \mathcal{E}'_m)$,

$$\text{supp } \mu_m \subset \mathcal{E}^{(1)}, \quad \mu_m(x) = 1, \quad x \in \text{supp } \psi_m^{(1)} \cap \mathcal{E}^{(0)}. \quad (18)$$

В самом деле, согласно (16), свойствам множеств X_δ и X^δ и определению чисел $\tilde{\rho}_m$

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_m \cap \mathcal{E}^{(2)})^{\frac{\tilde{\rho}_m}{8}} &\subset \bigcup_{l: \mathcal{E}'_l \cap \mathcal{E}_m \neq \emptyset} \left((\mathcal{E}'_l)^{\frac{\rho_l}{8}} \right)^{\frac{\tilde{\rho}_m}{8}} \subset \\ &\subset \bigcup_{l: \mathcal{E}'_l \cap \mathcal{E}_m \neq \emptyset} \left((\mathcal{E}'_l)^{\frac{\rho_l}{8}} \right)^{\frac{\rho_l}{8}} \subset \bigcup_l (\mathcal{E}'_l)^{\frac{\rho_l}{4}} = \mathcal{E}^{(1)}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_m \cap \mathcal{E}^{(2)})^{\frac{\tilde{\rho}_m}{8}} &= (\mathcal{E}_m)^{\frac{\tilde{\rho}_m}{8}} \cap \left(\bigcup_{l: \mathcal{E}'_l \cap \mathcal{E}_m \neq \emptyset} (\mathcal{E}'_l)^{\frac{\rho_l}{8}} \right)^{\frac{\tilde{\rho}_m}{8}} \supset \\ &\supset (\mathcal{E}_m)^{\frac{\rho_m}{8}} \cap \left(\bigcup_{l: \mathcal{E}'_l \cap \mathcal{E}_m \neq \emptyset} \left((\mathcal{E}'_l)^{\frac{\rho_l}{8}} \right)^{\frac{\tilde{\rho}_m}{8}} \right) \supset (\mathcal{E}_m)^{\frac{\rho_m}{8}} \cap \left(\bigcup_{l: \mathcal{E}'_l \cap \mathcal{E}_m \neq \emptyset} (\mathcal{E}'_l)^{\frac{\rho_l - \tilde{\rho}_m}{8}} \right) \supset \\ &\supset (\mathcal{E}_m)^{\frac{\rho_m}{8}} \cap \left(\bigcup_{l: \mathcal{E}'_l \cap \mathcal{E}_m \neq \emptyset} \mathcal{E}'_l \right) = (\mathcal{E}_m)^{\frac{\rho_m}{8}} \cap \left(\bigcup_l \mathcal{E}'_l \right) \supset \text{supp } \varphi_m \cap \mathcal{E}^{(0)} \end{aligned}$$

(здесь мы еще учли (7)).

Из доказанных включений, как и выше (см. (7)), следует (18). Положим наконец,

$$\psi_m(x) = \psi_m^{(1)}(x) \mu_m(x), \quad x \in R^n \quad (19)$$

(для $x \in \text{supp } \mu_m$ считаем, что $\psi_m^{(1)}(x) \mu_m(x) = 0$, даже если $\psi_m^{(1)}(x)$ не определено; для $x \in \text{supp } \mu_m$ в силу (12) $\psi_m^{(1)}(x)$ определено, так как согласно (18) $\text{supp } \mu_m \subset \mathcal{E}^{(1)}$).

Функции $\psi_m(x) \in C^\infty(R^n)$. В силу (14) и (18) для $x \in \mathcal{E}^{(0)}$ $\sum_m \psi_m(x) = \sum_m \psi_m^{(1)} \mu_m(x) = \sum_m \psi_m^{(1)}(x) = 1$; в силу (13), (19) и (7) $\mathcal{E}'_m \subset \text{supp } \psi_m \subset \text{supp } \varphi_m \subset (\mathcal{E}'_m)^{\rho_m} \subset \mathcal{E}_m$, откуда следует, что для $x \in \bigcup_m \mathcal{E}_m$ $\sum_m \psi_m(x) = 0$.

Таким образом, для $\psi_m(x)$ выполнены утверждения 1) и 2) леммы, утверждение 3) следует из (19), (15) и (17) (константа c имеет вид $c = c_{\alpha, n} \kappa^{|\alpha|}$).

В качестве первого примера рассмотрим случай, когда \mathcal{E} — замкнутое множество, а \mathcal{E}_m , $m = 1, \dots, s$, — конечный или счетный набор открытых множеств (s — натуральное число или $s = \infty$), обладающий тем свойством,

что для некоторого вектора $\rho > 0$, не зависящего от m

$$\mathcal{E} \subset \bigcup_{m=1}^s (\mathcal{E}_m)_\rho \quad (20)$$

(если $s < \infty$, то такое ρ всегда существует). Пусть $K = \kappa(\{\mathcal{E}_m\}) < \infty$. Пусть $\mathcal{E}_m' = (\mathcal{E}_m)_\rho$, числа $\rho_m = \rho/2$. В этом случае $|D^\alpha \psi_m(x)| \leq c(\alpha, K, \rho)$ ($c(\alpha, K, \rho)$ не зависит от m и s). Отметим, что $\mathcal{E}_m'' = (\mathcal{E}_m')^{\rho_m} = (\mathcal{E}_m)_{\rho/2}$ и $\kappa(\{\mathcal{E}_m''\}) \leq \tilde{\kappa}(\{\mathcal{E}_m''\}) \leq K < \infty$. (В самом деле, пусть $x \in \bigcup_m \mathcal{E}_m''$. Рассмотрим те m , для которых $x \in \mathcal{E}_m''$; количество таких m не превышает K . Для остальных рассматриваемых m $x \notin \mathcal{E}_m''$, тогда для этих последних m $B(x, \rho/2) \cap \mathcal{E}_m'' = \emptyset$, т. е. этот шар пересекается не более чем с K множествами \mathcal{E}_m'' и $\tilde{\kappa}(\{\mathcal{E}_m''\}) \leq K$.) Подобное разбиение единицы используется, например, для склейки локальных продолжений.

Наибольший интерес лемма представляет в случае, когда условие (20) не выполняется. Пусть \mathcal{E} — открытое множество, $\{\mathcal{E}_m\}$ и $\{\mathcal{E}_m'\}$ — счетные покрытия и $\mathcal{E} = \bigcup_m \mathcal{E}_m = \bigcup_m \mathcal{E}_m'$. Подобные разбиения впервые были рассмотрены Уитни [2]. В этой работе \mathcal{E} — произвольное открытое множество в R^n , а $\{\mathcal{E}_m\}$ — набор замкнутых кубов, обладающих следующими свойствами: $\mathcal{E} = \bigcup_m \mathcal{E}_m$; \mathcal{E}_m' и \mathcal{E}_l , $l \neq m$, могут пересекаться только по границам;

$$c_1 \text{diam } \mathcal{E}_m \leq \rho(\mathcal{E}_m, \Gamma(\mathcal{E})) \leq c_2 \text{diam } \mathcal{E}_m,$$

где c_1 и c_2 не зависят от \mathcal{E} ; кубы \mathcal{E}_m , имеющие тот же центр, что и \mathcal{E}_m' , но растянутые в $5/4$ раза, пересекаются не более чем с 12^n кубами \mathcal{E}_l (доказывается, что такие кубы \mathcal{E}_m и \mathcal{E}_m' существуют). В этом случае ρ_m — число, $\rho_m = c_3 \text{diam } \mathcal{E}_m$ и

$$|D^\alpha \psi_m(x)| \leq c(|\alpha|, n) (\text{diam } \mathcal{E}_m^{-1})^{|\alpha|} + 1.$$

В работе автора [1] \mathcal{E} — произвольное открытое множество $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{a^{-m-2}} \setminus \mathcal{E}_{a^{-m+1}}$, $\mathcal{E}_m' = \mathcal{E}_{a^{-m-1}} \setminus \mathcal{E}_{a^{-m}}$, ρ_m — число, $\rho_m = a^{-m-2}$ ($a > 1$),

$$|D^\alpha \psi_m(x)| \leq c(|\alpha|), a^{m|\alpha|}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В качестве еще одного примера рассмотрим случай, когда

$$\mathcal{E} = \{x \in R^n, x_n > \varphi(\bar{x})\}, \bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}),$$

где $\varphi(\bar{x})$, $\bar{x} \in R^{n-1}$ удовлетворяет условию Липшица с показателем γ ($0 < \gamma \leq 1$)

$$|\varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{y})| \leq M |\bar{x} - \bar{y}|^\gamma, \bar{x}, \bar{y} \in R^{n-1}.$$

При этом ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\mathcal{E}_m = \{x \in R^n, 2^{-m-2} < x_n - \varphi(\bar{x}) \leq 2^{-m+1}\},$$

$$\mathcal{E}_m' = \{x \in R^n, 2^{-m-1} < x_n - \varphi(\bar{x}) \leq 2^{-m}\},$$

и $(\mathcal{E}_m')^{\rho_m} \subset \mathcal{E}_m$, где вектор $\rho_m = c(2^{-\frac{m}{\gamma}}, \dots, 2^{-\frac{m}{\gamma}}, 2^{-m})$ и

$$|D^\alpha \psi_m(x)| \leq c(\alpha, \gamma, M, n) \cdot 2^{m \left(\frac{|\bar{\alpha}|}{\gamma} + \alpha_n \right)},$$

$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$. При $\gamma = 1$ такое разбиение единицы рассматривалось в работе А. Л. Трескунова [3], при $0 < \gamma \leq 1$ в работе автора [4]. Поясним

условие $(\mathcal{E}'_m)^{\rho_m} \subset \mathcal{E}_m$. Если $y \in (\mathcal{E}'_m)^{\rho_m}$, то для некоторого $x \in \mathcal{E}'_m$ $y \in Q(x, \rho_m)$, тогда

$$\begin{aligned} y_n - \varphi(\bar{y}) &= y_n - x_n + \varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{y}) + x_n - \varphi(\bar{x}) \leq \\ &\leq c 2^{-m} + M |\bar{x} - \bar{y}|^\nu + 2^{-m} \leq c 2^{-m} + Mnc^\nu 2^{-m} \leq 2^{-m+1} \end{aligned}$$

при достаточно малом c (не зависящем от m). Аналогично, $y_n - \varphi(\bar{y}) > 2^{-m-2}$, т. е. $y \in \mathcal{E}_m$.

В заключение автор благодарит М. Л. Гольдмана за ряд полезных замечаний.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Буренков В. И. О плотности бесконечно дифференцируемых функций в пространствах Соболева для произвольного открытого множества.—Труды МИАН СССР, 1974, 131, с. 39—50.
2. Whitney H. Analytic extension of differentiable functions defined in the closed sets.—Trans. Amer. Math. Soc., 1934, 36, с. 63—89.
3. Трескунов А. Л. Точные оценки в L_p для одного класса вырождающихся уравнений 2-го порядка эллиптического типа.—Записки науч. семинаров ЛОМИ АН СССР, 1967, 5, с. 232—249.
4. Буренков В. И. Об одном способе продолжения дифференцируемых функций.—Труды МИАН СССР, 1976, 160, с. 27—67.