



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Суслина, Аппроксимация резольвенты двухпараметрического квадратичного операторного пучка вблизи нижнего края спектра,
Алгебра и анализ, 2013, том 25, выпуск 5, 221–251

<https://www.mathnet.ru/aa1359>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

26 апреля 2025 г., 17:53:52



**АППРОКСИМАЦИЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ
ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КВАДРАТИЧНОГО
ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА
ВБЛИЗИ НИЖНЕГО КРАЯ СПЕКТРА**

© Т. А. СУСЛИНА

В гильбертовом пространстве рассматривается двухпараметрический пучок самосопряженных операторов $B(t, \varepsilon) = X(t)^*X(t) + \varepsilon(Y_2^*Y(t) + Y(t)^*Y_2) + \varepsilon^2Q$, где $X(t) = X_0 + tX_1$, $Y(t) = Y_0 + tY_1$. Предполагается, что для оператора $X_0^*X_0$ точка $\lambda_0 = 0$ — изолированное собственное значение конечной кратности и что операторы $Y(t)$, Y_2 , Q в определенном смысле подчинены оператору $X(t)$. Изучается обобщенная резольвента $(B(t, \varepsilon) + \lambda\varepsilon^2Q_0)^{-1}$, где оператор Q_0 ограничен и положительно определен. Получена аппроксимация этой резольвенты при малом $\tau = (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$ с точностью $O(1)$. Аппроксимация выражается в терминах некоторых операторов конечного ранга и представляет собой сумму старшего члена и корректора. Результаты нацелены на применения к задачам гомогенизации периодических дифференциальных операторов в пределе малого периода.

Введение

0.1. В работах [BSu1–4; Su1,2] был развит теоретико-операторный подход к задачам теории усреднений (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов в пределе малого периода. Изучались матричные эллиптические дифференциальные операторы второго порядка, действующие в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, коэффициенты которых периодичны и зависят от \mathbf{x}/ε , где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. После масштабного преобразования и разложения Флоке–Блоха возникает семейство дифференциальных операторов, действующих в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ и квадратично зависящих от параметров $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ (квазиимпульса) и ε . Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ячейка решетки периодов. Это аналитическое операторное семейство с дискретным спектром. Удобно изучать возникающий операторный пучок в рамках абстрактной

Ключевые слова: аналитическая теория возмущений, пороговые аппроксимации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00458-а) и Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение от 07.09.2012 №8501, №,2012-1.5-12-000-1003-016“).

теоретико-операторной схемы; при этом мы оставляем зависимость лишь от двух одномерных параметров $t = |\mathbf{k}|$ и ε и абстрагируемся от зависимости от параметра $\mathbf{k}/t \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Настоящая работа представляет собой дальнейшее развитие соответствующей теоретико-операторной схемы и непосредственно продолжает рассмотрения из [Su2, гл. 1]. Применению результатов данной работы к гомогенизации периодических дифференциальных операторов автор планирует посвятить отдельную статью. Содержание работы имеет и самостоятельный интерес в рамках аналитической теории возмущений для квадратичных операторных пучков.

0.2. В гильбертовом пространстве \mathfrak{H} рассматривается семейство самосопряженных операторов вида

$$B(t, \varepsilon) = X(t)^*X(t) + \varepsilon(Y_2^*Y(t) + Y(t)^*Y_2) + \varepsilon^2Q, \quad (0.1)$$

зависящих от двух параметров $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Здесь $X(t) = X_0 + tX_1$, $Y(t) = Y_0 + tY_1$. Роль „невозмущенного“ оператора играет $B(0, 0) = X_0^*X_0$. Предполагается, что для оператора $X_0^*X_0$ точка $\lambda_0 = 0$ — изолированное собственное значение конечной кратности. Обозначим $\mathfrak{N} = \text{Ker } X_0$, $n = \dim \mathfrak{N}$. Предполагается также, что операторы $Y(t)$, Y_2 , Q в определенном смысле подчинены оператору $X(t)$. Изучается обобщенная резольвента $(B(t, \varepsilon) + \lambda\varepsilon^2Q_0)^{-1}$, где оператор Q_0 ограничен и положительно определен. На параметр λ накладывается ограничение, которое обеспечивает положительную определенность оператора $B(t, \varepsilon) + \lambda\varepsilon^2Q_0$. Решается задача об аппроксимации указанной резольвенты по операторной норме в \mathfrak{H} при малых t и ε с погрешностью $O(1)$.

Ранее в работах [BSu1, гл. 1; BSu2] изучался аналогичный вопрос для более простого оператора $A(t) = X(t)^*X(t)$. В [BSu1, гл. 1] был получен старший член аппроксимации обобщенной резольвенты $(A(t) + \lambda\varepsilon^2Q_0)^{-1}$ по операторной норме в \mathfrak{H} с погрешностью $O(\varepsilon^{-1})$ при $|t| \leq t_0$. Старший член аппроксимации представляет собой обобщенную резольвенту оператора t^2S , где S — так называемый спектральный росток операторного семейства $A(t)$ при $t = 0$ — самосопряженный оператор, действующий в подпространстве \mathfrak{N} и определяемый в терминах пороговых характеристик (т. е. спектральных характеристик операторного семейства $A(t)$ вблизи края спектра). В [BSu2] была найдена аппроксимация той же резольвенты при учете корректора с погрешностью $O(1)$. При этом исследование в [BSu1,2] проводилось методами аналитической теории возмущений относительно одномерного параметра t .

Более общее операторное семейство (0.1) изучалось ранее в работах [Su1, гл. 1; Su2, гл. 1] (в [Su1] — при более жестких ограничениях). Был

получен старший член аппроксимации обобщенной резольвенты. Основным техническим отличием от работ [BSu1,2] был иной выбор основного параметра — применялась аналитическая теория возмущений относительно одномерного параметра $\tau = (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$. Именно это позволило включить члены $\varepsilon(Y_2^*Y(t) + Y(t)^*Y_2)$ в оператор (0.1) (в приложениях к дифференциальным операторам это позволяет включать члены первого порядка). В построениях и оценках необходимо следить за зависимостью от дополнительного параметра $\vartheta = (t/\tau, \varepsilon/\tau)$. Старший член аппроксимации представляет собой резольвенту оператора $\tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)$, где $\mathcal{S}(\vartheta)$ — спектральный росток операторного семейства $B(t, \varepsilon) + \lambda \varepsilon^2 Q_0$, действующий в подпространстве \mathfrak{N} . Оценка погрешности в полученной аппроксимации была $O(\tau^{-1})$.

В настоящей работе мы получаем более точную аппроксимацию оператора $(B(t, \varepsilon) + \lambda \varepsilon^2 Q_0)^{-1}$ по операторной норме в \mathfrak{H} с оценкой погрешности $O(1)$. Аппроксимация представляет собой сумму старшего члена и корректора; корректор также является оператором конечного ранга. Это основной результат работы — теорема 4.3. При доказательстве этой теоремы мы опираемся на так называемые пороговые аппроксимации. При достаточно малых δ и τ_0 (эти величины контролируются явно) и при $|\tau| \leq \tau_0$ у возмущенного оператора $B(t, \varepsilon) + \lambda \varepsilon^2 Q_0$ на промежутке $[0, \delta]$ ровно n собственных значений, а остальной спектр отделен от этого промежутка. Обозначим через $F(t, \varepsilon)$ спектральный проектор оператора $B(t, \varepsilon) + \lambda \varepsilon^2 Q_0$, отвечающий промежутку $[0, \delta]$. В работе установлены пороговые аппроксимации по операторной норме в \mathfrak{H} : для спектрального проектора $F(t, \varepsilon)$ найдена аппроксимация с погрешностью $O(\tau^2)$ (теорема 3.1), а для оператора $(B(t, \varepsilon) + \lambda \varepsilon^2 Q_0)F(t, \varepsilon)$ получена аппроксимация с погрешностью $O(\tau^4)$ (теорема 3.3). В этих аппроксимациях помимо старших членов выделены соответствующие корректоры. Для доказательства теорем 3.1 и 3.3 мы комбинируем метод степенных разложений для аналитических (по параметру τ) ветвей собственных значений и собственных векторов и метод интегрирования резольвенты рассматриваемого оператора по подходящему контуру в комплексной плоскости.

Все оценки погрешностей в аппроксимациях, полученные в работе, точны по порядку, а постоянные в оценках контролируются явно в терминах исходных данных задачи.

0.3. Структура статьи. Работа состоит из четырех параграфов. В §1 вводится основной объект изучения — операторное семейство (0.1), затем выполняется переход к новым переменным τ, ϑ . Далее вводятся вспомогательные операторы конечного ранга, возникающие при рассмотрении в духе аналитической теории возмущений. Анализируются аналитические

ветви собственных значений и собственных векторов, определяется спектральный росток. В §2 рассматривается разность резольвент возмущенного и невозмущенного операторов на подходящем контуре в комплексной плоскости, основной результат здесь (теорема 2.1) носит технический характер: для разности резольвент получены степенные разложения нужного порядка с оценками остаточных членов. На основе теоремы 2.1 в §3 методом интегрирования резольвенты по контуру получены требуемые пороговые аппроксимации для спектрального проектора $F(t, \varepsilon)$ и для оператора $(B(t, \varepsilon) + \lambda\varepsilon^2 Q_0)F(t, \varepsilon)$ (теоремы 3.1, 3.2, 3.3). С использованием степенных разложений проведено громоздкое вычисление инвариантного вида корректора в аппроксимации для $(B(t, \varepsilon) + \lambda\varepsilon^2 Q_0)F(t, \varepsilon)$. С помощью теорем из §3 в §4 получен основной результат работы (теорема 4.3) — найдена аппроксимация обобщенной резольвенты $(B(t, \varepsilon) + \lambda\varepsilon^2 Q_0)^{-1}$ с погрешностью $O(1)$.

0.4. Обозначения. Пусть \mathfrak{H} и \mathfrak{H}_* — сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают соответственно скалярное произведение и норму в \mathfrak{H} ; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного непрерывного оператора, действующего из \mathfrak{H} в \mathfrak{H}_* . Иногда мы опускаем индексы, если это не ведет к смешениям. Через $I = I_{\mathfrak{H}}$ обозначается тождественный оператор в \mathfrak{H} . Если $A : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ — линейный оператор, то через $\text{Dom } A$ обозначается его область определения, а через $\text{Ker } A$ — ядро оператора A . Если \mathfrak{N} — подпространство в \mathfrak{H} , то \mathfrak{N}^{\perp} — его ортогональное дополнение. Если P — ортопроектор в \mathfrak{H} , то $P^{\perp} = I - P$.

Различные оценочные постоянные обозначаются символами c, C, C (возможно, с индексами и значками).

§1. Квадратичные двухпараметрические операторные пучки

Мы изучаем семейство операторов $B(t, \varepsilon)$, зависящих от двух вещественных параметров ε и t ,

$$0 \leq \varepsilon \leq 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.1. Операторы $X(t)$ и $A(t)$. Пусть \mathfrak{H} и \mathfrak{H}_* — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть $X_0 : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ — плотно определенный замкнутый линейный оператор, а $X_1 : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ — ограниченный линейный оператор. На области определения $\text{Dom } X(t) = \text{Dom } X_0$ вводится оператор $X(t) := X_0 + tX_1$, $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим семейство самосопряженных в \mathfrak{H} положительных операторов

$$A(t) := X(t)^* X(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Оператор (1.1) порождается замкнутой в \mathfrak{H} квадратичной формой $\|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2$, $u \in \text{Dom } X_0$. Обозначим $A(0) = X_0^* X_0 =: A_0$, и положим $\mathfrak{N} := \text{Ker } A_0 = \text{Ker } X_0$. Предполагается выполненным следующее условие.

Условие 1.1. Точка $\lambda_0 = 0$ — изолированная точка спектра оператора A_0 , причем $0 < n := \dim \mathfrak{N} < \infty$.

Через d^0 обозначим расстояние от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора A_0 . Положим $\mathfrak{N}_* := \text{Ker } X_0^*$, $n_* := \dim \mathfrak{N}_*$. Предполагается, что $n \leq n_* \leq \infty$. Через P и P_* соответственно обозначаются ортопроекторы в \mathfrak{H} на \mathfrak{N} и в \mathfrak{H}_* на \mathfrak{N}_* .

Операторное семейство $A(t)$ было подробно изучено в работах [BSu1, гл. 1; BSu2; BSu4, гл. 1].

1.2. Операторы $Y(t)$ и Y_2 . Пусть $\tilde{\mathfrak{H}}$ — еще одно сепарабельное гильбертово пространство. Пусть $Y_0 : \mathfrak{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}$ — плотно определенный линейный оператор такой, что $\text{Dom } X_0 \subset \text{Dom } Y_0$, а $Y_1 : \mathfrak{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}$ — ограниченный линейный оператор. Положим $Y(t) = Y_0 + tY_1$, $\text{Dom } Y(t) = \text{Dom } Y_0$. Наложим следующее условие.

Условие 1.2. Найдется постоянная $c_1 > 0$ такая, что выполнено неравенство

$$\|Y(t)u\|_{\tilde{\mathfrak{H}}} \leq c_1 \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \text{Dom } X_0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Из (1.2) при $t = 0$ вытекает, что $\text{Ker } X_0 \subset \text{Ker } Y_0$, т. е. $Y_0 P = 0$.

Пусть $Y_2 : \mathfrak{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}$ — плотно определенный линейный оператор, причем $\text{Dom } X_0 \subset \text{Dom } Y_2$. Предположим, что выполнено следующее условие.

Условие 1.3. Для любого $\nu > 0$ существует число $C(\nu) > 0$ такое, что справедливо неравенство

$$\|Y_2 u\|_{\tilde{\mathfrak{H}}}^2 \leq \nu \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + C(\nu) \|u\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad u \in \text{Dom } X_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.3. Форма \mathfrak{q} . Пусть в пространстве \mathfrak{H} задана плотно определенная эрмитова полуторалинейная форма $\mathfrak{q}[u, v]$, причем $\text{Dom } X_0 \subset \text{Dom } \mathfrak{q}$. Наложим следующее условие.

Условие 1.4. 1°. Существуют такие постоянные $c_2 \geq 0$, $c_3 \geq 0$, что справедлива оценка

$$|\mathfrak{q}[u, v]| \leq (c_2 \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + c_3 \|u\|_{\mathfrak{H}}^2)^{1/2} (c_2 \|X(t)v\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + c_3 \|v\|_{\mathfrak{H}}^2)^{1/2}, \\ u, v \in \text{Dom } X_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2°. Существуют такие постоянные $0 < \kappa \leq 1$ и $c_0 \in \mathbb{R}$, что справедлива оценка

$$\mathfrak{q}[u, u] \geq -(1 - \kappa) \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 - c_0 \|u\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad u \in \text{Dom } X_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.4. Оператор $B(t, \varepsilon)$. В пространстве \mathfrak{H} рассмотрим эрмитову полуто-
ралинейную форму

$$b(t, \varepsilon)[u, v] = (X(t)u, X(t)v)_{\mathfrak{H}_*} + \varepsilon \left((Y(t)u, Y_2v)_{\tilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2u, Y(t)v)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \right) + \varepsilon^2 \mathfrak{q}[u, v], \quad u, v \in \text{Dom } X_0. \quad (1.3)$$

Используя условия 1.2, 1.3, 1.4, легко проверить справедливость следу-
ющих оценок для соответствующей квадратичной формы:

$$b(t, \varepsilon)[u, u] \leq (2 + c_1^2 + c_2) \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + (C(1) + c_3)\varepsilon^2 \|u\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad u \in \text{Dom } X_0, \quad (1.4)$$

$$b(t, \varepsilon)[u, u] \geq \frac{\kappa}{2} \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 - (c_0 + c_4)\varepsilon^2 \|u\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad u \in \text{Dom } X_0. \quad (1.5)$$

Здесь введено обозначение

$$c_4 := 4\kappa^{-1}c_1^2C(\nu) \text{ при } \nu = \kappa^2(16c_1^2)^{-1}.$$

Подробный вывод этих оценок приведен в [Su2, п. 1.4]. Из (1.4) и (1.5)
с учетом замкнутости оператора $X(t)$ следует, что форма $b(t, \varepsilon)[u, u]$
замкнута и полуограничена снизу.

Самосопряженный оператор в пространстве \mathfrak{H} , порожденный формой
(1.3), обозначим через $B(t, \varepsilon)$. Это наш основной объект исследования.
Формально можно записать

$$B(t, \varepsilon) = A(t) + \varepsilon(Y_2^*Y(t) + Y(t)^*Y_2) + \varepsilon^2Q. \quad (1.6)$$

(Здесь Q — формальный объект, который мы сопоставляем в этой записи
форме \mathfrak{q} . Разумеется, если форма \mathfrak{q} ограничена, то Q определен строго
как оператор, отвечающий форме \mathfrak{q} .)

Наша цель — исследовать резольвенту $(B(t, \varepsilon) + \lambda\varepsilon^2I)^{-1}$ либо обоб-
щенную резольвенту $(B(t, \varepsilon) + \lambda\varepsilon^2Q_0)^{-1}$ оператора (1.6). Здесь $Q_0 : \mathfrak{H} \rightarrow$
 \mathfrak{H} — ограниченный положительно определенный оператор. Удобно сразу
рассматривать обобщенную резольвенту, тогда случай $Q_0 = I$ отвечает
обычной резольвенте. Обозначим

$$B_\lambda(t, \varepsilon) := B(t, \varepsilon) + \lambda\varepsilon^2Q_0, \quad (1.7)$$

$$b_\lambda(t, \varepsilon)[u, v] := b(t, \varepsilon)[u, v] + \lambda\varepsilon^2(Q_0u, v)_{\mathfrak{H}}, \quad u, v \in \text{Dom } X_0. \quad (1.8)$$

На параметр λ накладывается следующее ограничение:

$$\begin{aligned} \lambda &> \|Q_0^{-1}\|(c_0 + c_4), \quad \text{если } \lambda \geq 0, \\ \lambda &> \|Q_0\|^{-1}(c_0 + c_4), \quad \text{если } \lambda < 0 \quad (\text{и } c_0 + c_4 < 0). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Условие (1.9) обеспечивает выполнение неравенства

$$\lambda(Q_0u, u)_{\mathfrak{H}} \geq (c_0 + c_4 + \beta)\|u\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad u \in \mathfrak{H}, \quad (1.10)$$

где $\beta > 0$ определено по числу λ следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta &= \lambda \|Q_0^{-1}\|^{-1} - c_0 - c_4, \quad \text{если } \lambda \geq 0, \\ \beta &= \lambda \|Q_0\| - c_0 - c_4, \quad \text{если } \lambda < 0 \quad (\text{и } c_0 + c_4 < 0). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из (1.5) и (1.10) вытекает оценка для формы (1.8):

$$b_\lambda(t, \varepsilon)[u, u] \geq \frac{\kappa}{2} \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + \beta \varepsilon^2 \|u\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad u \in \text{Dom } X_0. \quad (1.12)$$

Таким образом, при сделанных предположениях оператор (1.7) положительно определен. Из (1.4) и (1.8) получается следующая оценка при $u \in \text{Dom } X_0$:

$$b_\lambda(t, \varepsilon)[u, u] \leq (2 + c_1^2 + c_2) \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + (C(1) + c_3 + |\lambda| \|Q_0\|) \varepsilon^2 \|u\|_{\mathfrak{H}}^2.$$

1.5. Переход к параметрам τ, ϑ . Семейство (1.7) представляет собой аналитическое операторное семейство относительно параметров t и ε . Если $t = \varepsilon = 0$, то оператор $B_\lambda(0, 0)$ совпадает с A_0 и в силу условия 1.1 имеет изолированное собственное значение $\lambda_0 = 0$ кратности n . Хотелось бы применить аналитическую теорию возмущений. Однако если $n > 1$, то аналитическая теория возмущений непосредственно неприменима, поскольку мы имеем дело с кратным собственным значением и многомерным параметром. Поэтому мы вводим *одномерный параметр* $\tau = (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$, а также дополнительные параметры $\vartheta_1 = t\tau^{-1}$, $\vartheta_2 = \varepsilon\tau^{-1}$, $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$. При этом ϑ принадлежит единичной окружности. Оператор $B_\lambda(t, \varepsilon)$ теперь будем обозначать как $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)$, а соответствующую форму $b_\lambda(t, \varepsilon)$ как $\mathfrak{b}_\lambda(\tau; \vartheta)$. В силу (1.3), (1.8) эта форма принимает вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_\lambda(\tau; \vartheta)[u, v] &= (X_0u, X_0v)_{\mathfrak{H}_*} + \tau\vartheta_1 ((X_0u, X_1v)_{\mathfrak{H}_*} + (X_1u, X_0v)_{\mathfrak{H}_*}) \\ &\quad + \tau^2\vartheta_1^2 (X_1u, X_1v)_{\mathfrak{H}_*} + \tau\vartheta_2 ((Y_0u, Y_2v)_{\mathfrak{H}} + (Y_2u, Y_0v)_{\mathfrak{H}}) \\ &\quad + \tau^2\vartheta_1\vartheta_2 ((Y_1u, Y_2v)_{\mathfrak{H}} + (Y_2u, Y_1v)_{\mathfrak{H}}) \\ &\quad + \tau^2\vartheta_2^2 (\mathfrak{q}[u, v] + \lambda(Q_0u, v)_{\mathfrak{H}}), \quad u, v \in \text{Dom } X_0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Формальная структура оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)$ такова:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta) &= X_0^*X_0 + \tau\vartheta_1 (X_0^*X_1 + X_1^*X_0) + \tau^2\vartheta_1^2 X_1^*X_1 \\ &\quad + \tau\vartheta_2 (Y_2^*Y_0 + Y_0^*Y_2) + \tau^2\vartheta_1\vartheta_2 (Y_2^*Y_1 + Y_1^*Y_2) + \tau^2\vartheta_2^2 (Q + \lambda Q_0). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Отметим, что „по своему происхождению“ параметр τ неотрицателен, но форму вида (1.13) и отвечающий ей оператор можно рассматривать при всех $\tau \in \mathbb{R}$, что и подразумевается ниже. Мы изучаем операторное семейство $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)$ методами аналитической теории возмущений относительно

одномерного параметра τ . При этом нужно следить за равномерностью построений и оценок по дополнительному параметру ϑ , учитывая, что $\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 = 1$.

Пусть $F(\tau; \vartheta; s)$ — спектральный проектор оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)$, отвечающий отрезку $[0, s]$. Фиксируем число $\delta \in (0, \kappa d^0/13)$, а затем фиксируем число $\tau_0 > 0$ такое, что

$$\tau_0 \leq \delta^{1/2} \left((2 + c_1^2 + c_2) \|X_1\|^2 + C(1) + c_3 + |\lambda| \|Q_0\| \right)^{-1/2}. \quad (1.15)$$

Как проверено в [Su2, предложение 1.5], при $|\tau| \leq \tau_0$ выполнены соотношения

$$F(\tau; \vartheta; \delta) = F(\tau; \vartheta; 3\delta), \quad \text{rang } F(\tau; \vartheta; \delta) = n, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (1.16)$$

Мы часто будем использовать обозначение $F(\tau; \vartheta)$ вместо $F(\tau; \vartheta; \delta)$.

1.6. Операторы Z и \tilde{Z} . Введем некоторые операторы, которые возникают при рассмотрении в духе аналитической теории возмущений. Обозначим $\mathcal{D} = \text{Dom } X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$. Поскольку точка $\lambda_0 = 0$ — изолированная точка спектра оператора A_0 , то форма $(X_0\varphi, X_0\zeta)$, $\varphi, \zeta \in \mathcal{D}$, задает скалярное произведение в \mathcal{D} , превращая \mathcal{D} в гильбертово пространство. Пусть $\omega \in \mathfrak{N}$ и пусть $\phi \in \mathcal{D}$ — (слабое) решение уравнения

$$X_0^*(X_0\phi + X_1\omega) = 0,$$

т.е.

$$(X_0\phi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(X_1\omega, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \quad \zeta \in \mathcal{D}.$$

Поскольку правая часть есть антилинейный непрерывный функционал над $\zeta \in \mathcal{D}$, из теоремы Рисса следует, что решение существует и единственно; обозначим его $\phi(\omega)$. Очевидно, решение подчинено оценке

$$\|X_0\phi(\omega)\|_{\mathfrak{H}_*} \leq \|X_1\omega\|_{\mathfrak{H}}. \quad (1.17)$$

Поскольку

$$\|X_0\zeta\|_{\mathfrak{H}_*}^2 \geq d^0 \|\zeta\|_{\mathfrak{H}}^2 \geq 13\delta\kappa^{-1} \|\zeta\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}, \quad (1.18)$$

то в силу (1.17)

$$\|\phi(\omega)\|_{\mathfrak{H}} \leq \kappa^{1/2} (13\delta)^{-1/2} \|X_1\omega\|_{\mathfrak{H}_*}. \quad (1.19)$$

Определим ограниченный оператор $Z : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ формулой

$$Zu = \phi(Pu), \quad u \in \mathfrak{H}.$$

Отметим, что Z переводит \mathfrak{N} в \mathfrak{N}^\perp , а \mathfrak{N}^\perp в $\{0\}$. Из (1.17), (1.19) прямо вытекают оценки

$$\|X_0Z\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*} \leq \|X_1\|, \quad (1.20)$$

$$\|Z\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \kappa^{1/2} (13\delta)^{-1/2} \|X_1\|. \quad (1.21)$$

Аналогично для заданного $\omega \in \mathfrak{N}$ рассмотрим уравнение

$$X_0^* X_0 \psi + Y_0^* Y_2 \omega = 0$$

для элемента $\psi \in \mathcal{D}$, понимаемое в смысле тождества

$$(X_0 \psi, X_0 \zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(Y_2 \omega, Y_0 \zeta)_{\tilde{\mathfrak{H}}}, \quad \zeta \in \mathcal{D}.$$

Ввиду условия 1.2 правая часть является антилинейным непрерывным функционалом над $\zeta \in \mathcal{D}$. В силу теоремы Рисса решение существует и единственно; обозначим его $\psi(\omega)$. Решение подчинено оценке

$$\|X_0 \psi(\omega)\|_{\mathfrak{H}_*} \leq c_1 \|Y_2 \omega\|_{\tilde{\mathfrak{H}}} \leq c_1 C(1)^{1/2} \|\omega\|_{\mathfrak{H}}. \quad (1.22)$$

В последнем переходе было использовано условие 1.3 при $t = 0$ с $\nu = 1$. С учетом (1.18) отсюда вытекает неравенство

$$\|\psi(\omega)\|_{\mathfrak{H}} \leq c_1 (\kappa C(1))^{1/2} (13\delta)^{-1/2} \|\omega\|_{\mathfrak{H}}. \quad (1.23)$$

Введем ограниченный оператор $\tilde{Z} : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ формулой

$$\tilde{Z}u = \psi(Pu), \quad u \in \mathfrak{H}.$$

Отметим, что \tilde{Z} переводит \mathfrak{N} в \mathfrak{N}^\perp , а \mathfrak{N}^\perp в $\{0\}$. Из (1.22), (1.23) прямо вытекают оценки

$$\|X_0 \tilde{Z}\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*} \leq c_1 C(1)^{1/2}, \quad (1.24)$$

$$\|\tilde{Z}\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq c_1 (\kappa C(1))^{1/2} (13\delta)^{-1/2}. \quad (1.25)$$

1.7. Операторы R и S . Введем линейный оператор $R : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}_*$ соотношением

$$R\omega = X_0 \phi(\omega) + X_1 \omega = (X_0 Z + X_1)\omega, \quad \omega \in \mathfrak{N}.$$

Другое описание оператора R дается формулой $R = P_* X_1|_{\mathfrak{N}}$.

В соответствии с [BSu1, гл. 1, п. 1.3] оператор $S := R^* R : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}$ называется *спектральным ростком операторного семейства $A(t)$ при $t = 0$* . Росток S можно записать в виде $S = P X_1^* P_* X_1|_{\mathfrak{N}}$. Очевидны оценки

$$\|R\| \leq \|X_1\|, \quad \|S\| \leq \|X_1\|^2. \quad (1.26)$$

Спектральный росток играет важную роль при изучении спектральных свойств оператора $A(t)$ вблизи края спектра. Свойства оператора S подробно изучены в [BSu1, гл. 1, п. 1.3, 1.4, 1.6]. В следующем пункте мы введем понятие ростка для более общего операторного семейства (1.14).

1.8. Аналитические ветви собственных значений и собственных векторов оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)$. Согласно аналитической теории возмущений (см. [K]) при $|\tau| \leq \tau_0$ существуют вещественно-аналитические (по параметру τ) функции $\lambda_l(\tau; \vartheta)$ (ветви собственных значений) и вещественно-аналитические \mathfrak{H} -значные функции $\varphi_l(\tau; \vartheta)$ (ветви собственных векторов) такие, что

$$\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)\varphi_l(\tau; \vartheta) = \lambda_l(\tau; \vartheta)\varphi_l(\tau; \vartheta), \quad |\tau| \leq \tau_0, \quad l = 1, \dots, n, \quad (1.27)$$

и элементы $\varphi_l(\tau; \vartheta)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в собственном подпространстве $F(\tau; \vartheta)\mathfrak{H}$. При этом для достаточно малого τ_* (разумеется, $\tau_* \leq \tau_0$) и $|\tau| \leq \tau_*$ справедливы сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_l(\tau; \vartheta) = \gamma_l(\vartheta)\tau^2 + \mu_l(\vartheta)\tau^3 + \dots, \quad \gamma_l(\vartheta) \geq 0, \quad l = 1, \dots, n, \quad (1.28)$$

$$\varphi_l(\tau; \vartheta) = \omega_l(\vartheta) + \tau\varphi_l^{(1)}(\vartheta) + \tau^2\varphi_l^{(2)}(\vartheta) + \dots, \quad l = 1, \dots, n. \quad (1.29)$$

Элементы $\omega_l(\vartheta)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в \mathfrak{N} , а потому

$$P = \sum_{l=1}^n (\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} \omega_l(\vartheta). \quad (1.30)$$

Приравнивая коэффициенты при первой степени τ в равенстве (1.27) (записанном как тождество для форм), убеждаемся, что элемент $\varphi_l^{(1)}(\vartheta)$ является слабым решением уравнения

$$X_0^*(X_0\varphi_l^{(1)}(\vartheta) + \vartheta_1 X_1\omega_l(\vartheta)) + \vartheta_2 Y_0^* Y_2 \omega_l(\vartheta) = 0. \quad (1.31)$$

Это позволяет записать $\varphi_l^{(1)}(\vartheta)$ в терминах операторов Z и \tilde{Z} :

$$\varphi_l^{(1)}(\vartheta) = \vartheta_1 Z\omega_l(\vartheta) + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_l(\vartheta) + \tilde{\omega}_l(\vartheta), \quad \tilde{\omega}_l(\vartheta) \in \mathfrak{N}. \quad (1.32)$$

См. подробности в [Su2, п. 1.8]. На данном этапе элементы $\tilde{\omega}_l(\vartheta)$ из \mathfrak{N} остаются неопределенными, но для них можно указать тождества

$$(\tilde{\omega}_k(\vartheta), \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} + (\omega_k(\vartheta), \tilde{\omega}_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} = 0, \quad k, l = 1, \dots, n. \quad (1.33)$$

На следующем этапе (когда мы приравниваем коэффициенты при τ^2 в (1.27)) возникает новый объект — самосопряженный оператор $\mathcal{S}(\vartheta) : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}$, отвечающий форме

$$\begin{aligned} s(\vartheta)[\omega, \zeta] &= \vartheta_1^2 (S\omega, \zeta)_{\mathfrak{H}} - \vartheta_1 \vartheta_2 \left((X_0 \tilde{Z}\omega, X_0 Z\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (X_0 Z\omega, X_0 \tilde{Z}\zeta)_{\mathfrak{H}_*} \right) \\ &\quad - \vartheta_2^2 (X_0 \tilde{Z}\omega, X_0 \tilde{Z}\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + \vartheta_1 \vartheta_2 \left((Y_1 \omega, Y_2 \zeta)_{\tilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2 \omega, Y_1 \zeta)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \right) \\ &\quad + \vartheta_2^2 (q[\omega, \zeta] + \lambda(Q_0 \omega, \zeta)_{\mathfrak{H}}), \quad \omega, \zeta \in \mathfrak{N}. \end{aligned}$$

В соответствии с [Su2, п. 1.8] оператор $\mathcal{S}(\vartheta)$ называется спектральным ростком операторного семейства $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)$ при $\tau = 0$. Росток можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\vartheta) = & \vartheta_1^2 S + \vartheta_1 \vartheta_2 \left(-(X_0 Z)^* X_0 \tilde{Z} - (X_0 \tilde{Z})^* X_0 Z + P(Y_2^* Y_1 + Y_1^* Y_2) \right) \Big|_{\mathfrak{N}} \\ & + \vartheta_2^2 \left(-(X_0 \tilde{Z})^* X_0 \tilde{Z} \Big|_{\mathfrak{N}} + Q_{\mathfrak{N}} + \lambda Q_{0\mathfrak{N}} \right). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Здесь $Q_{\mathfrak{N}}$ — самосопряженный оператор в \mathfrak{N} , порожденный формой $q[\omega, \omega]$, $\omega \in \mathfrak{N}$, и $Q_{0\mathfrak{N}} := P Q_0 \Big|_{\mathfrak{N}}$.

В [Su2, предложение 1.6] установлено следующее утверждение.

Предложение 1.5. Числа $\gamma_l(\vartheta)$ и элементы $\omega_l(\vartheta)$, определенные разложениями (1.28), (1.29), являются собственными значениями и собственными элементами спектрального ростка $\mathcal{S}(\vartheta)$:

$$\mathcal{S}(\vartheta)\omega_l(\vartheta) = \gamma_l(\vartheta)\omega_l(\vartheta), \quad l = 1, \dots, n. \quad (1.35)$$

Из (1.30) и (1.35) следует, что

$$\mathcal{S}(\vartheta)P = \sum_{l=1}^n \gamma_l(\vartheta)(\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} \omega_l(\vartheta). \quad (1.36)$$

Отметим следующую оценку для нормы оператора (1.34), которая следует из (1.20), (1.24), (1.26), условия 1.3 (при $t = 0$ и $\nu = 1$) и условия 1.4 (при $t = 0$):

$$\|\mathcal{S}(\vartheta)\|_{\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}} \leq \|X_1\|^2 + 2c_1 C(1)^{1/2} \|X_1\| + c_1^2 C(1) + 2C(1)^{1/2} \|Y_1\| + c_3 + |\lambda| \|Q_0\|. \quad (1.37)$$

1.9. Оператор-функции $F(\tau; \vartheta)$ и $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta)$. Эти оператор-функции вещественно аналитичны по τ при $|\tau| \leq \tau_0$. Из (1.16) и (1.27) видно, что

$$F(\tau; \vartheta) = \sum_{l=1}^n (\cdot, \varphi_l(\tau; \vartheta))_{\mathfrak{H}} \varphi_l(\tau; \vartheta), \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (1.38)$$

В силу (1.29), (1.30) и (1.38) при достаточно малом τ_* справедливо степенное разложение

$$F(\tau; \vartheta) = P + \tau F_1(\vartheta) + \dots, \quad |\tau| \leq \tau_*, \quad (1.39)$$

где

$$F_1(\vartheta) = \sum_{l=1}^n \left((\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} \varphi_l^{(1)}(\vartheta) + (\cdot, \varphi_l^{(1)}(\vartheta))_{\mathfrak{H}} \omega_l(\vartheta) \right). \quad (1.40)$$

В [Su2, п. 1.9] получено инвариантное представление для оператора (1.40) в терминах операторов Z и \tilde{Z} :

$$F_1(\vartheta) = \vartheta_1(Z + Z^*) + \vartheta_2(\tilde{Z} + \tilde{Z}^*). \quad (1.41)$$

Далее, из (1.16) и (1.27) следует представление

$$\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta) = \sum_{l=1}^n \lambda_l(\tau; \vartheta)(\cdot, \varphi_l(\tau; \vartheta))_{\mathfrak{H}} \varphi_l(\tau; \vartheta), \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (1.42)$$

Сопоставляя (1.42) с (1.28), (1.29) и (1.36), получаем степенное разложение

$$\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta) = \tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)P + \dots, \quad |\tau| \leq \tau_*. \quad (1.43)$$

Степенные разложения (1.39), (1.43) не вполне нас устраивают. Нам нужны лишь конечные разложения для операторов $F(\tau; \vartheta)$ и $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta)$, но с оценками остаточных членов на всем интервале $|\tau| \leq \tau_0$. При этом для $F(\tau; \vartheta)$ достаточно разложения первого порядка с оценкой остатка $F(\tau; \vartheta) - P - \tau F_1(\vartheta)$ порядка τ^2 , а для $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta)$ помимо старшего члена $\tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)P$ нужно будет выделить член порядка τ^3 и получить для остатка оценку порядка τ^4 . Для получения таких оценок мы ниже (в §3) применяем метод интегрирования резольвенты оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)$ по подходящему контуру в комплексной плоскости.

§2. Разность резольвент на контуре в комплексной плоскости

2.1. Резольвентное тождество. Обозначим

$$R_z(0) = (A_0 - zI)^{-1}, \quad R_z(\tau; \vartheta) = (\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta) - zI)^{-1},$$

где $z \in \mathbb{C}$ — общая регулярная точка для операторов A_0 и $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)$. Нам понадобится вариант резольвентного тождества для операторов, определенных через квадратичные формы с общей областью определения (см. [BSu1, гл. 1, §2]).

Пусть \mathfrak{d} — пространство $\text{Dom } X_0$ с метрической формой

$$\|u\|_{\mathfrak{d}}^2 = \|X_0 u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + \delta \|u\|_{\mathfrak{H}}^2.$$

Пусть $T(\tau; \vartheta)$ — оператор в \mathfrak{d} , порожденный квадратичной формой

$$\mathfrak{t}(\tau; \vartheta)[u, u] = \mathfrak{b}_\lambda(\tau; \vartheta)[u, u] - \|X_0 u\|_{\mathfrak{H}_*}^2, \quad u \in \mathfrak{d}. \quad (2.1)$$

Положим

$$\Omega_z(0) = I + (z + \delta)R_z(0), \quad \Omega_z(\tau; \vartheta) = I + (z + \delta)R_z(\tau; \vartheta). \quad (2.2)$$

Согласно [BSu1, гл. 1, (2.13)] справедливо следующее резольвентное тождество

$$R_z(\tau; \vartheta) - R_z(0) = -\Omega_z(0)T(\tau; \vartheta)R_z(\tau; \vartheta). \quad (2.3)$$

Обозначим

$$\alpha^2 = \alpha^2(\tau; \vartheta) = \sup_{0 \neq u \in \mathfrak{d}} \frac{\|X_0 u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + \delta \|u\|_{\mathfrak{H}}^2}{\mathfrak{b}_\lambda(\tau; \vartheta)[u, u] + \delta \|u\|_{\mathfrak{H}}^2}.$$

Используя (1.12) и (1.15), легко убедиться (см. [Su2, п. 2.1]), что

$$\alpha = \alpha(\tau; \vartheta) \leq 2\kappa^{-1/2}, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (2.4)$$

Пусть L, L_j — ограниченные операторы в \mathfrak{d} . Ниже нам понадобятся следующие оценки (см. [BSu1, гл. 1, (2.15)–(2.17)]):

$$\|LR_z(0)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \delta^{-1} \|\Omega_z(0)\| \|L\|_{\mathfrak{d} \rightarrow \mathfrak{d}}, \quad (2.5)$$

$$\|LR_z(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \alpha \delta^{-1} \|\Omega_z(\tau; \vartheta)\| \|L\|_{\mathfrak{d} \rightarrow \mathfrak{d}}, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & \|L_1 \Omega_z(0) L_2 R_z(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \\ & \leq \alpha \delta^{-1} \|\Omega_z(\tau; \vartheta)\| (1 + |z + \delta| \delta^{-1} \|\Omega_z(0)\|) \|L_1\|_{\mathfrak{d} \rightarrow \mathfrak{d}} \|L_2\|_{\mathfrak{d} \rightarrow \mathfrak{d}}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\|\Omega_z(\tau; \vartheta)\| = \|\Omega_z(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}}$. Итерациями с помощью (2.2), (2.5), (2.7) легко получить неравенство, более общее, чем (2.7):

$$\begin{aligned} & \|L_1 \Omega_z(0) L_2 \Omega_z(0) \cdots L_{p-1} \Omega_z(0) L_p R_z(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \\ & \leq \alpha \delta^{-1} \|\Omega_z(\tau; \vartheta)\| (1 + |z + \delta| \delta^{-1} \|\Omega_z(0)\|)^{p-1} \prod_{j=1}^p \|L_j\|_{\mathfrak{d} \rightarrow \mathfrak{d}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

при натуральном p .

2.2. Оператор $T(\tau; \vartheta)$. В силу (1.13) форма (2.1) запишется в виде

$$\mathfrak{t}(\tau; \vartheta)[u, u] = \tau \mathfrak{t}_1(\vartheta)[u, u] + \tau^2 \mathfrak{t}_2(\vartheta)[u, u],$$

где

$$\mathfrak{t}_1(\vartheta)[u, u] = 2\vartheta_1 \operatorname{Re}(X_0 u, X_1 u)_{\mathfrak{H}_*} + 2\vartheta_2 \operatorname{Re}(Y_0 u, Y_2 u)_{\tilde{\mathfrak{H}}}, \quad u \in \mathfrak{d}, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_2(\vartheta)[u, u] &= \vartheta_1^2 \|X_1 u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + 2\vartheta_1 \vartheta_2 \operatorname{Re}(Y_1 u, Y_2 u)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \\ &+ \vartheta_2^2 (\mathfrak{q}[u, u] + \lambda(Q_0 u, u)_{\mathfrak{H}}), \quad u \in \mathfrak{d}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Тогда оператор $T(\tau; \vartheta)$, порожденный в пространстве \mathfrak{d} формой (2.1), имеет вид

$$T(\tau; \vartheta) = \tau T_1(\vartheta) + \tau^2 T_2(\vartheta), \quad (2.11)$$

где операторы $T_1(\vartheta)$ и $T_2(\vartheta)$ отвечают формам (2.9) и (2.10) соответственно.

Используя условия 1.2 и 1.3 (при $\nu = 1$), легко проверить, что

$$\|T_1(\vartheta)\|_{\mathfrak{d} \rightarrow \mathfrak{d}} \leq C_T^{(1)} = \max\{2 + c_1^2, (\|X_1\|^2 + C(1))\delta^{-1}\}. \quad (2.12)$$

Аналогично с помощью условий 1.3 и 1.4 проверяется оценка

$$\|T_2(\vartheta)\|_{\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}} \leq C_T^{(2)} = \max\{c_2 + 1, (\|X_1\|^2 + \|Y_1\|^2 + C(1) + c_3 + |\lambda| \|Q_0\|) \delta^{-1}\}. \quad (2.13)$$

(Подробнее см. [Su2, п. 2.2].) Из (2.12) и (2.13) следует оценка для нормы оператора (2.11):

$$\|T(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}} \leq C_T |\tau|, \quad |\tau| \leq \tau_0, \quad (2.14)$$

$$C_T = C_T^{(1)} + \tau_0 C_T^{(2)}. \quad (2.15)$$

2.3. Контур Γ_δ . Представления и оценки для разности резольвент. Обозначим через Γ_δ контур на комплексной плоскости, эквидистантно охватывающий интервал $[0, \delta]$ на расстоянии δ . В силу (1.16) при $|\tau| \leq \tau_0$ расстояние от Γ_δ до спектра оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)$ не меньше δ , а потому

$$\|R_z(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \delta^{-1}, \quad z \in \Gamma_\delta, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (2.16)$$

Учитывая, что

$$|z| \leq 2\delta, \quad z \in \Gamma_\delta, \quad (2.17)$$

убеждаемся, что оператор $\Omega_z(\tau; \vartheta)$ подчинен оценке

$$\|\Omega_z(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq 4, \quad z \in \Gamma_\delta, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (2.18)$$

При $\tau = 0$ оценки (2.16) и (2.18) остаются в силе (для операторов $R_z(0)$ и $\Omega_z(0)$ соответственно).

В силу (2.3), (2.4), (2.6), (2.14) и (2.18) выполнена оценка

$$\|R_z(\tau; \vartheta) - R_z(0)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq 32\kappa^{-1/2} \delta^{-1} C_T |\tau|, \quad z \in \Gamma_\delta, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (2.19)$$

Помимо оценки (2.19) нам понадобятся представления для разности резольвент, в которых выделено конечное число членов степенного порядка по τ , а для остатка имеет место оценка более высокого порядка.

Теорема 2.1. *При $|\tau| \leq \tau_0$ и $z \in \Gamma_\delta$ имеют место следующие утверждения.*

1°. *Справедливы представление и оценка:*

$$R_z(\tau; \vartheta) - R_z(0) = \tau \mathcal{I}_1(z; \vartheta) + \Psi_1(z; \tau; \vartheta), \quad (2.20)$$

$$\|\Psi_1(z; \tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_1 \tau^2, \quad z \in \Gamma_\delta, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (2.21)$$

2°. *Справедливы представление и оценка:*

$$R_z(\tau; \vartheta) - R_z(0) = \tau \mathcal{I}_1(z; \vartheta) + \tau^2 \mathcal{I}_2(z; \vartheta) + \Psi_2(z; \tau; \vartheta), \quad (2.22)$$

$$\|\Psi_2(z; \tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_2 |\tau|^3, \quad z \in \Gamma_\delta, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (2.23)$$

3°. *Справедливы представление и оценка:*

$$R_z(\tau; \vartheta) - R_z(0) = \tau \mathcal{I}_1(z; \vartheta) + \tau^2 \mathcal{I}_2(z; \vartheta) + \tau^3 \mathcal{I}_3(z; \vartheta) + \Psi_3(z; \tau; \vartheta), \quad (2.24)$$

$$\|\Psi_3(z; \tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_3 \tau^4, \quad z \in \Gamma_\delta, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (2.25)$$

Операторы $\mathcal{I}_j(z; \vartheta)$, $j = 1, 2, 3$, ограничены и не зависят от τ ; они определены ниже выражениями (2.26), (2.30), (2.34) соответственно. Постоянные C_j , $j = 1, 2, 3$ определены ниже в (2.28), (2.32), (2.36).

Доказательство. Ввиду громоздкости выкладок в доказательстве часто пишем Ω_z , T_j , $T(\tau)$, $R_z(\tau)$ вместо $\Omega_z(0)$, $T_j(\vartheta)$, $T(\tau; \vartheta)$, $R_z(\tau; \vartheta)$ соответственно. Из (2.3) и (2.11), итерируя, получаем

$$\begin{aligned} R_z(\tau; \vartheta) - R_z(0) &= -\Omega_z(\tau T_1 + \tau^2 T_2) R_z(\tau) \\ &= -\tau \Omega_z T_1 (R_z(0) - \Omega_z T(\tau) R_z(\tau)) - \tau^2 \Omega_z T_2 R_z(\tau). \end{aligned}$$

Отсюда следует (2.20) при

$$\mathcal{I}_1(z; \vartheta) = -\Omega_z(0) T_1(\vartheta) R_z(0), \quad (2.26)$$

$$\Psi_1(z; \tau; \vartheta) = \tau \Omega_z T_1 \Omega_z T(\tau) R_z(\tau) - \tau^2 \Omega_z T_2 R_z(\tau). \quad (2.27)$$

Неравенства (2.4), (2.6), (2.7), (2.12)–(2.14), (2.17) и (2.18) влекут оценку (2.21) для нормы оператора (2.27) с постоянной

$$C_1 = 32\delta^{-1} \kappa^{-1/2} (13C_T^{(1)} C_T + C_T^{(2)}). \quad (2.28)$$

Утверждение 1° доказано.

Снова применяя (2.3) и (2.11), запишем оператор (2.27) в виде

$$\begin{aligned} \Psi_1(z; \tau; \vartheta) &= \tau \Omega_z T_1 \Omega_z (\tau T_1 + \tau^2 T_2) R_z(\tau) - \tau^2 \Omega_z T_2 R_z(\tau) \\ &= \tau^2 (\Omega_z T_1)^2 (R_z(0) - \Omega_z T(\tau) R_z(\tau)) \\ &\quad + \tau^3 \Omega_z T_1 \Omega_z T_2 R_z(\tau) - \tau^2 \Omega_z T_2 (R_z(0) - \Omega_z T(\tau) R_z(\tau)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\Psi_1(z; \tau; \vartheta) = \tau^2 \mathcal{I}_2(z; \vartheta) + \Psi_2(z; \tau; \vartheta), \quad (2.29)$$

где

$$\mathcal{I}_2(z; \vartheta) = (\Omega_z(0) T_1(\vartheta))^2 R_z(0) - \Omega_z(0) T_2(\vartheta) R_z(0), \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(z; \tau; \vartheta) &= -\tau^2 (\Omega_z T_1)^2 \Omega_z T(\tau) R_z(\tau) \\ &\quad + \tau^3 \Omega_z T_1 \Omega_z T_2 R_z(\tau) + \tau^2 \Omega_z T_2 \Omega_z T(\tau) R_z(\tau). \end{aligned} \quad (2.31)$$

С учетом (2.4), (2.7), (2.8), (2.12)–(2.14), (2.17) и (2.18) получаем оценку (2.23) для нормы оператора (2.31) с постоянной

$$C_2 = 416\delta^{-1} \kappa^{-1/2} \left(13(C_T^{(1)})^2 C_T + C_T^{(1)} C_T^{(2)} + C_T^{(2)} C_T \right). \quad (2.32)$$

Из (2.20) и (2.29) следует (2.22). Утверждение 2° доказано.

Применяя еще одну итерацию, преобразуем оператор (2.31):

$$\begin{aligned}\Psi_2(z; \tau; \vartheta) &= -\tau^2(\Omega_z T_1)^2 \Omega_z (\tau T_1 + \tau^2 T_2) R_z(\tau) \\ &\quad + \tau^3 \Omega_z T_1 \Omega_z T_2 R_z(\tau) + \tau^2 \Omega_z T_2 \Omega_z (\tau T_1 + \tau^2 T_2) R_z(\tau) \\ &= -\tau^3 (\Omega_z T_1)^3 (R_z(0) - \Omega_z T(\tau) R_z(\tau)) - \tau^4 (\Omega_z T_1)^2 \Omega_z T_2 R_z(\tau) \\ &\quad + \tau^3 \Omega_z T_1 \Omega_z T_2 (R_z(0) - \Omega_z T(\tau) R_z(\tau)) \\ &\quad + \tau^3 \Omega_z T_2 \Omega_z T_1 (R_z(0) - \Omega_z T(\tau) R_z(\tau)) + \tau^4 (\Omega_z T_2)^2 R_z(\tau),\end{aligned}$$

откуда вытекает представление

$$\Psi_2(z; \tau; \vartheta) = \tau^3 \mathcal{I}_3(z; \vartheta) + \Psi_3(z; \tau; \vartheta), \quad (2.33)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3(z; \vartheta) &= -(\Omega_z(0) T_1(\vartheta))^3 R_z(0) + \Omega_z(0) T_1(\vartheta) \Omega_z(0) T_2(\vartheta) R_z(0) \\ &\quad + \Omega_z(0) T_2(\vartheta) \Omega_z(0) T_1(\vartheta) R_z(0),\end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned}\Psi_3(z; \tau; \vartheta) &= \tau^3 (\Omega_z T_1)^3 \Omega_z T(\tau) R_z(\tau) \\ &\quad - \tau^4 (\Omega_z T_1)^2 \Omega_z T_2 R_z(\tau) - \tau^3 \Omega_z T_1 \Omega_z T_2 \Omega_z T(\tau) R_z(\tau) \\ &\quad - \tau^3 \Omega_z T_2 \Omega_z T_1 \Omega_z T(\tau) R_z(\tau) + \tau^4 (\Omega_z T_2)^2 R_z(\tau).\end{aligned} \quad (2.35)$$

Применяя (2.4), (2.7), (2.8), (2.12)–(2.14), (2.17) и (2.18), получаем оценку (2.25) для нормы оператора (2.35) с постоянной

$$C_3 = 416\delta^{-1}\kappa^{-1/2} \left(169(C_T^{(1)})^3 C_T + 13(C_T^{(1)})^2 C_T^{(2)} + 26C_T^{(1)} C_T^{(2)} C_T + (C_T^{(2)})^2 \right). \quad (2.36)$$

Из (2.22) и (2.33) следует (2.24). Утверждение 3° доказано. \square

§3. Пороговые аппроксимации

3.1. Справедливы представления (ср. [BSu1, гл. 1, (4.2), (4.4)])

$$F(\tau; \vartheta) - P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} (R_z(\tau; \vartheta) - R_z(0)) dz, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta) F(\tau; \vartheta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} z (R_z(\tau; \vartheta) - R_z(0)) dz. \quad (3.2)$$

На основе этих представлений и результатов §2 можно получать аппроксимации операторов $F(\tau; \vartheta)$ и $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta) F(\tau; \vartheta)$ при малом τ — так называемые *пороговые аппроксимации*.

3.2. Аппроксимация проектора $F(\tau; \vartheta)$.

Теорема 3.1. 1°. *Справедлива оценка*

$$\|F(\tau; \vartheta) - P\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_1 |\tau|, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (3.3)$$

Здесь число τ_0 удовлетворяет ограничению (1.15), постоянная C_1 задана выражением

$$C_1 = 32(1 + \pi^{-1})\kappa^{-1/2}C_T, \quad (3.4)$$

где C_T определена согласно (2.12), (2.13), (2.15).

2°. *Справедливо представление*

$$F(\tau; \vartheta) = P + \tau F_1(\vartheta) + F_2(\tau; \vartheta), \quad (3.5)$$

где оператор $F_1(\vartheta)$ определен в (1.41), а оператор $F_2(\tau; \vartheta)$ подчинен оценке

$$\|F_2(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_2 \tau^2, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (3.6)$$

Постоянная C_2 задана выражением

$$C_2 = 32(1 + \pi^{-1})\kappa^{-1/2}(C_T^{(2)} + 13C_T^{(1)}C_T), \quad (3.7)$$

где $C_T^{(1)}$, $C_T^{(2)}$, C_T определены в (2.12), (2.13), (2.15).

Доказательство. Оценка (3.3) вытекает непосредственно из (2.19) и (3.1) с учетом того, что длина контура Γ_δ равна $2\delta + 2\pi\delta$.

Подставляя (2.20) в (3.1), получаем представление

$$F(\tau; \vartheta) - P = -\tau \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} \mathcal{I}_1(z; \vartheta) dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} \Psi_1(z; \tau; \vartheta) dz. \quad (3.8)$$

Второе слагаемое справа обозначим через $F_2(\tau; \vartheta)$. Соотношения (2.21) и (2.28) дают для него оценку (3.6). Сопоставляя теперь (3.8) и (1.39), (1.41), приходим к выводу, что оператор $-(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_\delta} \mathcal{I}_1(z; \vartheta) dz$ совпадает с оператором $F_1(\vartheta)$, определенным в (1.41). \square

3.3. Аппроксимация оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta)$. Следующая теорема доказана в [Su2, теорема 2.2]; нам удобно привести ее с доказательством.

Теорема 3.2. *При $|\tau| \leq \tau_0$ справедливо представление*

$$\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta) = \tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)P + \Phi_1(\tau; \vartheta), \quad (3.9)$$

причем

$$\|\Phi_1(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_3 |\tau|^3, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (3.10)$$

Число τ_0 подчинено ограничению (1.15), постоянная C_3 задана выражением

$$C_3 = 832(1 + \pi^{-1})\delta\kappa^{-1/2} \left(13(C_T^{(1)})^2 C_T + C_T^{(1)} C_T^{(2)} + C_T^{(2)} C_T \right), \quad (3.11)$$

где $C_T^{(1)}$, $C_T^{(2)}$, C_T определены в (2.12), (2.13), (2.15).

Доказательство. Подставляя (2.22) в (3.2), получаем представление

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta) &= -\tau \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} z\mathcal{I}_1(z; \vartheta) dz - \tau^2 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} z\mathcal{I}_2(z; \vartheta) dz \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} z\Psi_2(z; \tau; \vartheta) dz. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Последний член справа обозначим через $\Phi_1(\tau; \vartheta)$ и оценим его с помощью (2.17), (2.23), (2.32):

$$\|\Phi_1(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq 2\delta^2(1 + \pi^{-1})C_2|\tau|^3 = C_3|\tau|^3, \quad |\tau| \leq \tau_0.$$

Сопоставляя теперь (3.12) и (1.43), приходим к выводу, что

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} z\mathcal{I}_1(z; \vartheta) dz = 0, \quad -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} z\mathcal{I}_2(z; \vartheta) dz = \mathcal{S}(\vartheta)P. \quad \square$$

Аналогично доказательству теоремы 3.2, используя (3.2) и (2.24), (2.25), (2.36), получаем следующий результат.

Теорема 3.3. При $|\tau| \leq \tau_0$ справедливо представление

$$\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta) = \tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P + \tau^3K(\vartheta) + \Phi_2(\tau; \vartheta), \quad (3.13)$$

причем

$$\|\Phi_2(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_4\tau^4, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (3.14)$$

Оператор $K(\vartheta)$ определяется равенством

$$K(\vartheta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} z\mathcal{I}_3(z; \vartheta) dz, \quad (3.15)$$

где $\mathcal{I}_3(z; \vartheta)$ — оператор (2.34). Число τ_0 удовлетворяет ограничению (1.15), постоянная C_4 задана выражением

$$\begin{aligned} C_4 &= 832(1 + \pi^{-1})\delta\kappa^{-1/2} \\ &\quad \times \left(169(C_T^{(1)})^3 C_T + 13(C_T^{(1)})^2 C_T^{(2)} + 26C_T^{(1)} C_T^{(2)} C_T + (C_T^{(2)})^2 \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $C_T^{(1)}$, $C_T^{(2)}$, C_T определены в (2.12), (2.13), (2.15).

Для вычисления оператора $K(\vartheta)$ опираться на выражение (3.15) неудобно; мы используем для этой цели степенные разложения.

3.4. Вычисление оператора $K(\vartheta)$. В соответствии с (1.28), (1.29), (1.36), (1.42) при достаточно малом τ_* и $|\tau| \leq \tau_*$ имеем

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta) \\ &= \sum_{l=1}^n (\gamma_l(\vartheta)\tau^2 + \mu_l(\vartheta)\tau^3)(\cdot, \omega_l(\vartheta) + \tau\varphi_l^{(1)}(\vartheta))_{\mathfrak{H}}(\omega_l(\vartheta) + \tau\varphi_l^{(1)}(\vartheta)) + O(\tau^4) \\ &= \tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)P + \tau^3 K(\vartheta) + O(\tau^4). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что оператор $K(\vartheta)$ в (3.13) допускает представление

$$\begin{aligned} K(\vartheta) &= \sum_{l=1}^n \mu_l(\vartheta)(\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\omega_l(\vartheta) \\ &+ \sum_{l=1}^n \gamma_l(\vartheta) \left((\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\varphi_l^{(1)}(\vartheta) + (\cdot, \varphi_l^{(1)}(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\omega_l(\vartheta) \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Подставляя (1.32) в (3.17), получаем

$$K(\vartheta) = K_0(\vartheta) + N(\vartheta), \quad (3.18)$$

где

$$\begin{aligned} K_0(\vartheta) &= \sum_{l=1}^n \gamma_l(\vartheta) \left((\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}(\vartheta_1 Z\omega_l(\vartheta) + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_l(\vartheta)) \right. \\ &\quad \left. + (\cdot, \vartheta_1 Z\omega_l(\vartheta) + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\omega_l(\vartheta) \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} N(\vartheta) &= \sum_{l=1}^n \mu_l(\vartheta)(\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\omega_l(\vartheta) \\ &+ \sum_{l=1}^n \gamma_l(\vartheta) \left((\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\tilde{\omega}_l(\vartheta) + (\cdot, \tilde{\omega}_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\omega_l(\vartheta) \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Наша дальнейшая цель — найти для $K(\vartheta)$ инвариантное представление. Для оператора (3.19) это сделать легко, используя (1.36):

$$K_0(\vartheta) = \vartheta_1 (Z\mathcal{S}(\vartheta)P + \mathcal{S}(\vartheta)PZ^*) + \vartheta_2 (\tilde{Z}\mathcal{S}(\vartheta)P + \mathcal{S}(\vartheta)P\tilde{Z}^*). \quad (3.21)$$

Отметим, что оператор $K_0(\vartheta)$ переводит \mathfrak{N} в \mathfrak{N}^\perp и \mathfrak{N}^\perp в \mathfrak{N} , а потому

$$PK_0(\vartheta)P = 0. \quad (3.22)$$

Напротив, оператор $N(\vartheta)$ действует из \mathfrak{N} в \mathfrak{N} и аннулирует элементы из \mathfrak{N}^\perp . Нахождение инвариантного вида этого оператора достаточно громоздко. Вычислим матричные элементы оператора $N(\vartheta)$ в базисе $\omega_l(\vartheta)$, $l = 1, \dots, n$. В силу (3.20) имеем

$$\begin{aligned} & (N(\vartheta)\omega_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta))_{\mathfrak{H}} \\ &= \mu_j(\vartheta)\delta_{jk} + \gamma_k(\vartheta)(\omega_j(\vartheta), \tilde{\omega}_k(\vartheta))_{\mathfrak{H}} + \gamma_j(\vartheta)(\tilde{\omega}_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta))_{\mathfrak{H}} \\ &= \mu_j(\vartheta)\delta_{jk} - \gamma_k(\vartheta)(\tilde{\omega}_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta))_{\mathfrak{H}} - \gamma_j(\vartheta)(\omega_j(\vartheta), \tilde{\omega}_k(\vartheta))_{\mathfrak{H}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

В последнем переходе учтены тождества (1.33).

Дальнейшие вычисления опираются на соотношения

$$(\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)\varphi_j(\tau; \vartheta), \varphi_k(\tau; \vartheta))_{\mathfrak{H}} = \delta_{jk}\lambda_j(\tau; \vartheta), \quad j, k = 1, \dots, n. \quad (3.24)$$

Ввиду громоздкости последующих выкладок часто опускаем в записи аргумент ϑ . Используя (1.29), левую часть (3.24) запишем в виде

$$\mathfrak{b}_\lambda(\tau; \vartheta)[\omega_j + \tau\varphi_j^{(1)} + \tau^2\varphi_j^{(2)} + \dots, \omega_k + \tau\varphi_k^{(1)} + \tau^2\varphi_k^{(2)} + \dots]. \quad (3.25)$$

Воспользуемся выражением (1.13) для формы $\mathfrak{b}_\lambda(\tau; \vartheta)$ и выделим суммарный коэффициент $\Delta_{jk}(\vartheta)$ при τ^3 в (3.25). Получим

$$\begin{aligned} \Delta_{jk}(\vartheta) &= (X_0\varphi_j^{(1)} + \vartheta_1 X_1\omega_j, X_0\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_0\varphi_j^{(2)}, X_0\varphi_k^{(1)} + \vartheta_1 X_1\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} \\ &+ \vartheta_1 (X_0\varphi_j^{(1)} + \vartheta_1 X_1\omega_j, X_1\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} + \vartheta_1 (X_1\varphi_j^{(1)}, X_0\varphi_k^{(1)} + \vartheta_1 X_1\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} \\ &+ \vartheta_2 (Y_0\varphi_j^{(1)} + \vartheta_1 Y_1\omega_j, Y_2\varphi_k^{(1)})_{\tilde{\mathfrak{H}}} + \vartheta_2 (Y_0\varphi_j^{(2)}, Y_2\omega_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} + \vartheta_1 \vartheta_2 (Y_1\varphi_j^{(1)}, Y_2\omega_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \\ &+ \vartheta_2 (Y_2\varphi_j^{(1)}, Y_0\varphi_k^{(1)} + \vartheta_1 Y_1\omega_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} + \vartheta_2 (Y_2\omega_j, Y_0\varphi_k^{(2)})_{\tilde{\mathfrak{H}}} + \vartheta_1 \vartheta_2 (Y_2\omega_j, Y_1\varphi_k^{(1)})_{\tilde{\mathfrak{H}}} \\ &+ \vartheta_2^2 \left(\mathfrak{q}[\omega_j, \varphi_k^{(1)}] + \mathfrak{q}[\varphi_j^{(1)}, \omega_k] + \lambda(Q_0\omega_j, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + \lambda(Q_0\varphi_j^{(1)}, \omega_k)_{\mathfrak{H}} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что в силу уравнений (1.31) для элементов $\varphi_l^{(1)}$ сумма первого и девятого членов равна нулю. Аналогично сумма второго и шестого членов равна нулю.

Далее, учтем представления (1.32). Тогда

$$\begin{aligned}
 & \Delta_{jk}(\vartheta) \\
 &= \vartheta_1 \left(X_0(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_j + \tilde{\omega}_j) + \vartheta_1 X_1\omega_j, X_1(\vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_k + \tilde{\omega}_k) \right)_{\mathfrak{H}_*} \\
 &+ \vartheta_1 \left(X_1(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_j + \tilde{\omega}_j), X_0(\vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_k + \tilde{\omega}_k) + \vartheta_1 X_1\omega_k \right)_{\mathfrak{H}_*} \\
 &+ \vartheta_2 \left(Y_0(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_j + \tilde{\omega}_j) + \vartheta_1 Y_1\omega_j, Y_2(\vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_k + \tilde{\omega}_k) \right)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \\
 &+ \vartheta_1 \vartheta_2 \left(Y_1(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_j + \tilde{\omega}_j), Y_2\omega_k \right)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \\
 &+ \vartheta_2 \left(Y_2(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_j + \tilde{\omega}_j), Y_0(\vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_k + \tilde{\omega}_k) + \vartheta_1 Y_1\omega_k \right)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \\
 &+ \vartheta_1 \vartheta_2 \left(Y_2\omega_j, Y_1(\vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_k + \tilde{\omega}_k) \right)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \\
 &+ \vartheta_2^2 \left(\mathfrak{q}[\omega_j, \vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_k + \tilde{\omega}_k] + \mathfrak{q}[\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_j + \tilde{\omega}_j, \omega_k] \right) \\
 &+ \vartheta_2^2 \lambda \left(\left(Q_0\omega_j, \vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_k + \tilde{\omega}_k \right)_{\mathfrak{H}} + \left(Q_0(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_j + \tilde{\omega}_j), \omega_k \right)_{\mathfrak{H}} \right). \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

Примем во внимание, что $X_0\tilde{\omega}_l = 0$, $Y_0\tilde{\omega}_l = 0$, и $(X_0Z + X_1)\omega_l = R\omega_l$.

Обозначим через $\tilde{\Delta}_{jk}(\vartheta)$ сумму всех членов в (3.26), которые содержат неопределенные элементы $\tilde{\omega}_j$ либо $\tilde{\omega}_k$. Имеем

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Delta}_{jk}(\vartheta) &= \vartheta_1 \left(\vartheta_1 R\omega_j + \vartheta_2 X_0\tilde{Z}\omega_j, X_1\tilde{\omega}_k \right)_{\mathfrak{H}_*} \\
 &+ \vartheta_1 \left(X_1\tilde{\omega}_j, \vartheta_1 R\omega_k + \vartheta_2 X_0\tilde{Z}\omega_k \right)_{\mathfrak{H}_*} \\
 &+ \vartheta_2 \left(\vartheta_1 Y_0Z\omega_j + \vartheta_2 Y_0\tilde{Z}\omega_j + \vartheta_1 Y_1\omega_j, Y_2\tilde{\omega}_k \right)_{\tilde{\mathfrak{H}}} + \vartheta_1 \vartheta_2 (Y_1\tilde{\omega}_j, Y_2\omega_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \\
 &+ \vartheta_2 \left(Y_2\tilde{\omega}_j, \vartheta_1 Y_0Z\omega_k + \vartheta_2 Y_0\tilde{Z}\omega_k + \vartheta_1 Y_1\omega_k \right)_{\tilde{\mathfrak{H}}} + \vartheta_1 \vartheta_2 (Y_2\omega_j, Y_1\tilde{\omega}_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \\
 &+ \vartheta_2^2 (\mathfrak{q}[\omega_j, \tilde{\omega}_k] + \mathfrak{q}[\tilde{\omega}_j, \omega_k] + \lambda(Q_0\omega_j, \tilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}} + \lambda(Q_0\tilde{\omega}_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}}). \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

Учитывая, что $X_0^*R = 0$ и $R^*R = S$, выполним преобразование:

$$(R\omega_j, X_1\tilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*} = (R\omega_j, (X_0Z + X_1)\tilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*} = (R\omega_j, R\tilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*} = (S\omega_j, \tilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}}.$$

Аналогично $(X_1\tilde{\omega}_j, R\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} = (\tilde{\omega}_j, S\omega_k)_{\mathfrak{H}}$.

Далее, в силу определения оператора Z выполнено уравнение

$$X_0^* X_0 Z \omega + X_0^* X_1 \omega = 0$$

при любом $\omega \in \mathfrak{N}$, а потому

$$\begin{aligned} (X_0 \tilde{Z} \omega_j, X_1 \tilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*} &= -(X_0 \tilde{Z} \omega_j, X_0 Z \tilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*}, \\ (X_1 \tilde{\omega}_j, X_0 \tilde{Z} \omega_k)_{\mathfrak{H}_*} &= -(X_0 Z \tilde{\omega}_j, X_0 \tilde{Z} \omega_k)_{\mathfrak{H}_*}. \end{aligned}$$

Аналогично в силу определения оператора \tilde{Z} справедливо равенство

$$X_0^* X_0 \tilde{Z} \omega + Y_0^* Y_2 \omega = 0$$

при любом $\omega \in \mathfrak{N}$, откуда

$$\begin{aligned} (Y_0 Z \omega_j, Y_2 \tilde{\omega}_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} &= -(X_0 Z \omega_j, X_0 \tilde{Z} \tilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*}, \\ (Y_0 \tilde{Z} \omega_j, Y_2 \tilde{\omega}_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} &= -(X_0 \tilde{Z} \omega_j, X_0 \tilde{Z} \tilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*}, \\ (Y_2 \tilde{\omega}_j, Y_0 Z \omega_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} &= -(X_0 \tilde{Z} \tilde{\omega}_j, X_0 Z \omega_k)_{\mathfrak{H}_*}, \\ (Y_2 \tilde{\omega}_j, Y_0 \tilde{Z} \omega_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} &= -(X_0 \tilde{Z} \tilde{\omega}_j, X_0 \tilde{Z} \omega_k)_{\mathfrak{H}_*}. \end{aligned}$$

С учетом указанных тождеств перепишем оператор (3.27) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{jk}(\vartheta) &= \vartheta_1^2 (S \omega_j, \tilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}} - \vartheta_1 \vartheta_2 (X_0 \tilde{Z} \omega_j, X_0 Z \tilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*} \\ &\quad + \vartheta_1^2 (\tilde{\omega}_j, S \omega_k)_{\mathfrak{H}} - \vartheta_1 \vartheta_2 (X_0 Z \tilde{\omega}_j, X_0 \tilde{Z} \omega_k)_{\mathfrak{H}_*} \\ &\quad - \vartheta_1 \vartheta_2 (X_0 Z \omega_j, X_0 \tilde{Z} \tilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*} - \vartheta_2^2 (X_0 \tilde{Z} \omega_j, X_0 \tilde{Z} \tilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*} \\ &\quad + \vartheta_1 \vartheta_2 (Y_1 \omega_j, Y_2 \tilde{\omega}_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} + \vartheta_1 \vartheta_2 (Y_1 \tilde{\omega}_j, Y_2 \omega_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \\ &\quad - \vartheta_1 \vartheta_2 (X_0 \tilde{Z} \tilde{\omega}_j, X_0 Z \omega_k)_{\mathfrak{H}_*} \\ &\quad - \vartheta_2^2 (X_0 \tilde{Z} \tilde{\omega}_j, X_0 \tilde{Z} \omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + \vartheta_1 \vartheta_2 (Y_2 \tilde{\omega}_j, Y_1 \omega_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \\ &\quad + \vartheta_1 \vartheta_2 (Y_2 \omega_j, Y_1 \tilde{\omega}_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \\ &\quad + \vartheta_2^2 (\mathfrak{q}[\omega_j, \tilde{\omega}_k] + \mathfrak{q}[\tilde{\omega}_j, \omega_k] + \lambda(Q_0 \omega_j, \tilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}} + \lambda(Q_0 \tilde{\omega}_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}}). \end{aligned}$$

Теперь, вспоминая выражение (1.34) для спектрального ростка $\mathcal{S}(\vartheta)$, убеждаемся, что

$$\tilde{\Delta}_{jk}(\vartheta) = (\mathcal{S}(\vartheta) \omega_j, \tilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}} + (\tilde{\omega}_j, \mathcal{S}(\vartheta) \omega_k)_{\mathfrak{H}} = \gamma_j(\omega_j, \tilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}} + \gamma_k(\tilde{\omega}_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}}. \quad (3.28)$$

В последнем переходе мы использовали соотношения (1.35).

Подведем итоги. Из (3.24) и (1.28) ясно, что $\Delta_{jk}(\vartheta) = \mu_j(\vartheta)\delta_{jk}$. Сопоставляя это с (3.26) и (3.28), получаем

$$\begin{aligned}
 & \mu_j \delta_{jk} - \gamma_j(\omega_j, \tilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}} - \gamma_k(\tilde{\omega}_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}} \\
 &= \vartheta_1 \left(\vartheta_1 R\omega_j + \vartheta_2 X_0 \tilde{Z}\omega_j, X_1(\vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_k) \right)_{\mathfrak{H}_*} \\
 &+ \vartheta_1 \left(X_1(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_j), \vartheta_1 R\omega_k + \vartheta_2 X_0 \tilde{Z}\omega_k \right)_{\mathfrak{H}_*} \\
 &+ \vartheta_2 \left(Y_0(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_j) + \vartheta_1 Y_1\omega_j, Y_2(\vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_k) \right)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \\
 &+ \vartheta_1 \vartheta_2 \left(Y_1(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_j), Y_2\omega_k \right)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \\
 &+ \vartheta_2 \left(Y_2(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_j), Y_0(\vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_k) + \vartheta_1 Y_1\omega_k \right)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \\
 &+ \vartheta_1 \vartheta_2 \left(Y_2\omega_j, Y_1(\vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_k) \right)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \\
 &+ \vartheta_2^2 \left(\mathfrak{q}[\omega_j, \vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_k] + \mathfrak{q}[\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_j, \omega_k] \right) \\
 &+ \vartheta_2^2 \lambda \left(\left(Q_0\omega_j, \vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_k \right)_{\mathfrak{H}} + \left(Q_0(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \tilde{Z}\omega_j), \omega_k \right)_{\mathfrak{H}} \right). \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

В силу (3.23) матричные элементы $(N(\vartheta)\omega_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}}$, $j, k = 1, \dots, n$, задаются выражениями (3.29). Отсюда вытекает следующее представление оператора $N(\vartheta)$:

$$N(\vartheta) = \vartheta_1^3 N_{11} + \vartheta_1^2 \vartheta_2 N_{12} + \vartheta_1 \vartheta_2^2 N_{21} + \vartheta_2^3 N_{22}, \tag{3.30}$$

где

$$N_{11} = (X_1 Z)^* R P + (R P)^* X_1 Z, \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
 N_{12} &= (X_1 \tilde{Z})^* R P + (R P)^* X_1 \tilde{Z} + (X_1 Z)^* X_0 \tilde{Z} \\
 &+ (X_0 \tilde{Z})^* X_1 Z + (Y_2 Z)^* Y_0 Z + (Y_0 Z)^* Y_2 Z \\
 &+ (Y_2 Z)^* Y_1 P + (Y_1 P)^* Y_2 Z + (Y_2 P)^* Y_1 Z + (Y_1 Z)^* Y_2 P, \tag{3.32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{21} &= (X_0 \tilde{Z})^* X_1 \tilde{Z} + (X_1 \tilde{Z})^* X_0 \tilde{Z} + (Y_2 Z)^* Y_0 \tilde{Z} \\
 &+ (Y_0 \tilde{Z})^* Y_2 Z + (Y_2 \tilde{Z})^* Y_0 Z + (Y_0 Z)^* Y_2 \tilde{Z} + (Y_2 \tilde{Z})^* Y_1 P \\
 &+ (Y_1 P)^* Y_2 \tilde{Z} + (Y_1 \tilde{Z})^* Y_2 P + (Y_2 P)^* Y_1 \tilde{Z} \\
 &+ Z^* Q P + P Q Z + \lambda(Z^* Q_0 P + P Q_0 Z), \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

$$N_{22} = (Y_0 \tilde{Z})^* Y_2 \tilde{Z} + (Y_2 \tilde{Z})^* Y_0 \tilde{Z} + \tilde{Z}^* Q P + P Q \tilde{Z} + \lambda(\tilde{Z}^* Q_0 P + P Q_0 \tilde{Z}). \tag{3.34}$$

Поясним, что в (3.33) под формальной записью $Z^*QP + PQZ$ подразумевается ограниченный самосопряженный оператор в \mathfrak{H} , порожденный формой

$$\mathfrak{q}[Pu, Zu] + \mathfrak{q}[Zu, Pu], \quad u \in \mathfrak{H}.$$

Аналогично в (3.34) под $\tilde{Z}^*QP + PQ\tilde{Z}$ понимается ограниченный самосопряженный оператор в \mathfrak{H} , отвечающий форме

$$\mathfrak{q}[Pu, \tilde{Z}u] + \mathfrak{q}[\tilde{Z}u, Pu], \quad u \in \mathfrak{H}.$$

3.5. Оценки операторов $K_0(\vartheta)$ и $N(\vartheta)$. В силу (1.21), (1.25) и (1.37) получаем оценку для оператора (3.21):

$$\|K_0(\vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq 2(\|Z\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} + \|\tilde{Z}\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}})\|\mathcal{S}(\vartheta)P\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \mathcal{C}_5, \quad (3.35)$$

$$\mathcal{C}_5 = 2\kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}(\|X_1\| + c_1C(1)^{1/2})$$

$$\times \left(\|X_1\|^2 + 2c_1C(1)^{1/2}\|X_1\| + c_1^2C(1) + 2C(1)^{1/2}\|Y_1\| + c_3 + |\lambda|\|Q_0\| \right).$$

Оценка оператора (3.31) вытекает из (1.21) и (1.26):

$$\|N_{11}\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq 2\|X_1\|\|Z\|\|R\| \leq 2\kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}\|X_1\|^3 =: C_{11}. \quad (3.36)$$

Для оценивания операторов (3.32)–(3.34) нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 3.4. *Справедливы оценки*

$$\|Y_0Z\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}} \leq c_1\|X_1\|, \quad (3.37)$$

$$\|Y_0\tilde{Z}\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}} \leq c_1^2C(1)^{1/2}, \quad (3.38)$$

$$\|Y_2Z\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}} \leq (1 + \kappa(13\delta)^{-1}C(1))^{1/2}\|X_1\|, \quad (3.39)$$

$$\|Y_2\tilde{Z}\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}} \leq (1 + \kappa(13\delta)^{-1}C(1))^{1/2}c_1C(1)^{1/2}, \quad (3.40)$$

$$\|Y_2P\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}} \leq C(1)^{1/2}, \quad (3.41)$$

$$\|Z^*QP + PQZ\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq 2c_3^{1/2}\|X_1\|(c_2 + c_3\kappa(13\delta)^{-1})^{1/2}, \quad (3.42)$$

$$\|\tilde{Z}^*QP + PQ\tilde{Z}\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq 2c_3^{1/2}c_1C(1)^{1/2}(c_2 + c_3\kappa(13\delta)^{-1})^{1/2}. \quad (3.43)$$

Доказательство. Из условия 1.2 при $t = 0$ и (1.20) вытекает оценка

$$\|Y_0Z\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}} \leq c_1\|X_0Z\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*} \leq c_1\|X_1\|,$$

что доказывает (3.37). Аналогично получается (3.38) с учетом (1.24).

В силу условия 1.3 при $t = 0$ и неравенств (1.20) и (1.21) имеем

$$\|Y_2Z\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}}^2 \leq \|X_0Z\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*}^2 + C(1)\|Z\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}}^2 \leq \|X_1\|^2 + C(1)\kappa(13\delta)^{-1}\|X_1\|^2,$$

откуда следует (3.39). Аналогично выводится оценка (3.40) с учетом (1.24) и (1.25).

Неравенство (3.41) прямо следует из условия 1.3 при $t = 0$.

Для доказательства оценки (3.42) воспользуемся условием 1.4(1°) при $t = 0$. Получаем

$$|\mathfrak{q}[Pu, Zv] + \mathfrak{q}[Zu, Pv]| \leq c_3^{1/2} \|Pu\|_{\mathfrak{H}} (c_2 \|X_0 Zv\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + c_3 \|Zv\|_{\mathfrak{H}}^2)^{1/2} \\ + (c_2 \|X_0 Zu\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + c_3 \|Zu\|_{\mathfrak{H}}^2)^{1/2} c_3^{1/2} \|Pv\|_{\mathfrak{H}}, \quad u, v \in \mathfrak{H},$$

откуда с помощью (1.20) и (1.21) вытекает (3.42). Неравенство (3.43) устанавливается аналогично при учете (1.24) и (1.25). \square

В силу (1.21), (1.24)–(1.26), (3.37), (3.39) и (3.41) получаем оценку оператора (3.32):

$$\|N_{12}\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq 2\|X_1\|(\|R\|\|\tilde{Z}\| + \|Z\|\|X_0\|\|\tilde{Z}\|) \\ + 2\|Y_2 Z\|(\|Y_0 Z\| + \|Y_1\|) + 2\|Y_2 P\|\|Y_1\|\|Z\| \leq C_{12}, \quad (3.44)$$

$$C_{12} = 2(\kappa C(1))^{1/2} (13\delta)^{-1/2} \|X_1\| (2c_1 \|X_1\| + \|Y_1\|) \\ + 2(1 + \kappa(13\delta)^{-1} C(1))^{1/2} \|X_1\| (c_1 \|X_1\| + \|Y_1\|). \quad (3.45)$$

Из (1.21), (1.24), (1.25), (3.37)–(3.42) вытекает оценка оператора (3.33):

$$\|N_{21}\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq 2\|X_0 \tilde{Z}\|\|X_1\|\|\tilde{Z}\| + 2\|Y_2 Z\|\|Y_0 \tilde{Z}\| + 2\|Y_2 \tilde{Z}\|(\|Y_0 Z\| + \|Y_1\|) \\ + 2\|Y_2 P\|\|Y_1\|\|\tilde{Z}\| + \|Z^* QP + PQZ\| + 2|\lambda|\|Z\|\|Q_0\| \leq C_{21}, \quad (3.46)$$

$$C_{21} = 2\kappa^{1/2} (13\delta)^{-1/2} (c_1^2 C(1)\|X_1\| + c_1 C(1)\|Y_1\| + |\lambda|\|Q_0\|\|X_1\|) \\ + 2(1 + \kappa(13\delta)^{-1} C(1))^{1/2} c_1 C(1)^{1/2} (2c_1 \|X_1\| + \|Y_1\|) \\ + 2c_3^{1/2} \|X_1\| (c_2 + c_3 \kappa(13\delta)^{-1})^{1/2}. \quad (3.47)$$

Наконец, с помощью (1.25), (3.38), (3.40) и (3.43) получается оценка оператора (3.34):

$$\|N_{22}\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq 2\|Y_0 \tilde{Z}\|\|Y_2 \tilde{Z}\| + \|\tilde{Z}^* QP + PQ\tilde{Z}\| + 2|\lambda|\|Q_0\|\|\tilde{Z}\| \leq C_{22}, \quad (3.48)$$

$$C_{22} = 2c_1^3 C(1) (1 + \kappa(13\delta)^{-1} C(1))^{1/2} + 2c_3^{1/2} c_1 C(1)^{1/2} (c_2 + c_3 \kappa(13\delta)^{-1})^{1/2} \\ + 2c_1 (\kappa C(1))^{1/2} (13\delta)^{-1/2} |\lambda|\|Q_0\|. \quad (3.49)$$

В итоге из (3.36), (3.44), (3.46) и (3.48) вытекает следующая оценка оператора (3.30):

$$\|N(\vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22} =: \mathcal{C}_6. \quad (3.50)$$

Вместе с (3.35) это влечет оценку оператора (3.18):

$$\|K(\vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_6.$$

§4. Аппроксимация оператора $B_\lambda(t, \varepsilon)^{-1}$

4.1. Старший член аппроксимации оператора $B_\lambda(\tau; \vartheta)^{-1}$. Как и в [Su2, п. 3.1], будем предполагать, что при некотором $c_* > 0$ выполнено

$$A(t) \geq c_* t^2 I, \quad c_* > 0, \quad |t| \leq \tau_0. \quad (4.1)$$

Тогда с учетом (1.12) справедливо неравенство

$$\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta) \geq \check{c}_* \tau^2 I, \quad |\tau| \leq \tau_0, \quad \check{c}_* = \frac{1}{2} \min\{\kappa c_*, 2\beta\}. \quad (4.2)$$

Напомним, что число β определено в (1.11). Из (4.2) и (1.27) следует, что

$$\lambda_l(\tau; \vartheta) \geq \check{c}_* \tau^2, \quad l = 1, \dots, n, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (4.3)$$

В силу (4.3) и (1.28) справедливы неравенства $\gamma_l(\vartheta) \geq \check{c}_*$, $l = 1, \dots, n$, а тогда с учетом (1.36)

$$\mathcal{S}(\vartheta) \geq \check{c}_* I_{\mathfrak{H}}. \quad (4.4)$$

Старший член аппроксимации оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)^{-1}$ при малом $|\tau|$ с погрешностью $O(|\tau|^{-1})$ был получен в [Su2, п. 3.1]. Мы воспроизводим здесь соответствующие рассуждения, поскольку они нужны для дальнейших рассмотрений. Очевидно,

$$\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)^{-1} = \mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)^{-1} F(\tau; \vartheta)^\perp + \mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)^{-1} F(\tau; \vartheta). \quad (4.5)$$

В силу (1.16)

$$\|\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)^{-1} F(\tau; \vartheta)^\perp\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq (3\delta)^{-1}, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (4.6)$$

Введем обозначение

$$\Xi(\tau; \vartheta) := (\tau^2 \mathcal{S}(\vartheta))^{-1} P \quad (4.7)$$

и рассмотрим оператор

$$G(\tau; \vartheta) := \mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)^{-1} F(\tau; \vartheta) - \Xi(\tau; \vartheta) = G_1(\tau; \vartheta) + G_2(\tau; \vartheta) + G_3(\tau; \vartheta), \quad (4.8)$$

где

$$G_1(\tau; \vartheta) = \mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)^{-1} F(\tau; \vartheta)(F(\tau; \vartheta) - P), \quad (4.9)$$

$$G_2(\tau; \vartheta) = (F(\tau; \vartheta) - P)\Xi(\tau; \vartheta), \quad (4.10)$$

$$G_3(\tau; \vartheta) = F(\tau; \vartheta)\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)^{-1} P - F(\tau; \vartheta)\Xi(\tau; \vartheta). \quad (4.11)$$

С учетом (3.3) и (4.2) оператор (4.9) подчинен оценке

$$\|G_1(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \mathcal{C}_1(\check{c}_*)^{-1} |\tau|^{-1}, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (4.12)$$

Аналогично из (3.3) и (4.4) следует неравенство

$$\|G_2(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \mathcal{C}_1(\check{c}_*)^{-1} |\tau|^{-1}, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (4.13)$$

Оператор (4.11) запишем в виде

$$G_3(\tau; \vartheta) = F(\tau; \vartheta) \mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)^{-1} (\tau^2 \mathcal{S}(\vartheta) P - \mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta) F(\tau; \vartheta)) \Xi(\tau; \vartheta) \quad (4.14)$$

и оценим его с помощью (3.9), (3.10), (4.2) и (4.4):

$$\|G_3(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \mathcal{C}_3(\check{c}_*)^{-2} |\tau|^{-1}, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (4.15)$$

Теперь из (4.8), (4.12), (4.13) и (4.15) получаем оценку

$$\|G(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq (2\mathcal{C}_1(\check{c}_*)^{-1} + \mathcal{C}_3(\check{c}_*)^{-2}) |\tau|^{-1}, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (4.16)$$

Вместе с (4.5), (4.6) и (4.8) это влечет следующий результат (прежде установленный в [Su2, теорема 3.1]).

Теорема 4.1. *Справедлива оценка*

$$\|\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)^{-1} - (\tau^2 \mathcal{S}(\vartheta))^{-1} P\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \mathcal{C}_0 |\tau|^{-1}, \quad |\tau| \leq \tau_0,$$

где

$$\mathcal{C}_0 = \tau_0 (3\delta)^{-1} + 2\mathcal{C}_1(\check{c}_*)^{-1} + \mathcal{C}_3(\check{c}_*)^{-2}.$$

Число τ_0 подчинено ограничению (1.15), постоянные \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_3 и \check{c}_* определены в (3.4), (3.11) и (4.2) соответственно.

4.2. Уточненная аппроксимация оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)^{-1}$. Наша цель — получить аппроксимацию оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)^{-1}$ с погрешностью $O(1)$.

В силу (4.6) первый член в правой части (4.5) по-прежнему „уходит в остаток“. В операторе (4.10) выделим старшую часть, используя (3.5):

$$G_2(\tau; \vartheta) = G_2^0(\tau; \vartheta) + \tilde{G}_2(\tau; \vartheta), \quad (4.17)$$

где

$$G_2^0(\tau; \vartheta) = \tau F_1(\vartheta) \Xi(\tau; \vartheta), \quad (4.18)$$

а член $\tilde{G}_2(\tau; \vartheta) = F_2(\tau; \vartheta) \Xi(\tau; \vartheta)$ оценивается с помощью (3.6) и (4.4):

$$\|\tilde{G}_2(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \mathcal{C}_2(\check{c}_*)^{-1}, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (4.19)$$

В операторе (4.9) сначала „заменяем“ $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)^{-1} F(\tau; \vartheta)$ на $\Xi(\tau; \vartheta)$, применяя (4.8):

$$G_1(\tau; \vartheta) = \hat{G}_1(\tau; \vartheta) + \tilde{G}_1(\tau; \vartheta), \quad (4.20)$$

где

$$\hat{G}_1(\tau; \vartheta) = \Xi(\tau; \vartheta) (F(\tau; \vartheta) - P), \quad (4.21)$$

а член $\tilde{G}_1(\tau; \vartheta) = G(\tau; \vartheta) (F(\tau; \vartheta) - P)$ оценивается на основании (3.3) и (4.16):

$$\|\tilde{G}_1(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \mathcal{C}_1 (2\mathcal{C}_1(\check{c}_*)^{-1} + \mathcal{C}_3(\check{c}_*)^{-2}), \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (4.22)$$

Теперь выделим в операторе (4.21) старшую часть с помощью (3.5):

$$\widehat{G}_1(\tau; \vartheta) = G_1^0(\tau; \vartheta) + \check{G}_1(\tau; \vartheta), \quad (4.23)$$

где

$$G_1^0(\tau; \vartheta) = \Xi(\tau; \vartheta)\tau F_1(\vartheta), \quad (4.24)$$

а оператор $\check{G}_1(\tau; \vartheta) = \Xi(\tau; \vartheta)F_2(\tau; \vartheta)$ оценивается на основании (3.6) и (4.4):

$$\|\check{G}_1(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \mathcal{C}_2(\check{c}_*)^{-1}, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (4.25)$$

Далее, в операторе (4.14) „заменяем“ $\mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)^{-1}F(\tau; \vartheta)$ на $\Xi(\tau; \vartheta)$, применяя (4.8):

$$G_3(\tau; \vartheta) = \widehat{G}_3(\tau; \vartheta) + \widetilde{G}_3(\tau; \vartheta), \quad (4.26)$$

где

$$\widehat{G}_3(\tau; \vartheta) = \Xi(\tau; \vartheta) (\tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)P - \mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta)) \Xi(\tau; \vartheta), \quad (4.27)$$

а оператор $\widetilde{G}_3(\tau; \vartheta) = G(\tau; \vartheta) (\tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)P - \mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta)) \Xi(\tau; \vartheta)$ оценивается на основании (3.9), (3.10), (4.4) и (4.16):

$$\|\widetilde{G}_3(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \mathcal{C}_3(\check{c}_*)^{-1} (2\mathcal{C}_1(\check{c}_*)^{-1} + \mathcal{C}_3(\check{c}_*)^{-2}), \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (4.28)$$

В операторе (4.27) выделим старшую часть с помощью (3.13):

$$\widehat{G}_3(\tau; \vartheta) = G_3^0(\tau; \vartheta) + \check{G}_3(\tau; \vartheta), \quad (4.29)$$

где

$$G_3^0(\tau; \vartheta) = -\Xi(\tau; \vartheta)\tau^3 K(\vartheta)\Xi(\tau; \vartheta), \quad (4.30)$$

а оператор $\check{G}_3(\tau; \vartheta) = -\Xi(\tau; \vartheta)\Phi_2(\tau; \vartheta)\Xi(\tau; \vartheta)$ в силу (3.14) и (4.4) подчинен оценке

$$\|\check{G}_3(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \mathcal{C}_4(\check{c}_*)^{-2}, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (4.31)$$

В итоге из (4.8), (4.17), (4.20), (4.23), (4.26) и (4.29) вытекает представление

$$G(\tau; \vartheta) = G_1^0(\tau; \vartheta) + G_2^0(\tau; \vartheta) + G_3^0(\tau; \vartheta) + \widetilde{G}(\tau; \vartheta),$$

где оператор $\widetilde{G}(\tau; \vartheta) = \widetilde{G}_1(\tau; \vartheta) + \check{G}_1(\tau; \vartheta) + \widetilde{G}_2(\tau; \vartheta) + \widetilde{G}_3(\tau; \vartheta) + \check{G}_3(\tau; \vartheta)$ в силу (4.19), (4.22), (4.25), (4.28) и (4.31) подчинен оценке

$$\|\widetilde{G}(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_3(\check{c}_*)^{-1}) (2\mathcal{C}_1(\check{c}_*)^{-1} + \mathcal{C}_3(\check{c}_*)^{-2}) + 2\mathcal{C}_2(\check{c}_*)^{-1} + \mathcal{C}_4(\check{c}_*)^{-2}$$

при $|\tau| \leq \tau_0$. Вместе с (4.5), (4.6), (4.8), (4.18), (4.24) и (4.30) это влечет следующий результат.

Теорема 4.2. *Справедливо представление*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)^{-1} &= \Xi(\tau; \vartheta) + \tau (F_1(\vartheta)\Xi(\tau; \vartheta) + \Xi(\tau; \vartheta)F_1(\vartheta)) \\ &\quad - \tau^3 \Xi(\tau; \vartheta)K(\vartheta)\Xi(\tau; \vartheta) + J(\tau; \vartheta), \end{aligned} \quad (4.32)$$

где операторы $\Xi(\tau; \vartheta)$ и $F_1(\vartheta)$ определены в (4.7) и (1.41) соответственно, а оператор $K(\vartheta)$ определен в соответствии с (3.18), (3.21) и (3.30)–(3.34). Остаточный член $J(\tau; \vartheta) = \mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)^{-1}F(\tau; \vartheta)^\perp + \tilde{G}(\tau; \vartheta)$ подчинен оценке

$$\|J(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C, \quad |\tau| \leq \tau_0,$$

число τ_0 удовлетворяет ограничению (1.15), а постоянная C задана выражением

$$C = (3\delta)^{-1} + (C_1 + C_3(\check{c}_*)^{-1}) (2C_1(\check{c}_*)^{-1} + C_3(\check{c}_*)^{-2}) + 2C_2(\check{c}_*)^{-1} + C_4(\check{c}_*)^{-2}, \quad (4.33)$$

где постоянные C_j , $j = 1, 2, 3, 4$, \check{c}_* определены в (3.4), (3.7), (3.11), (3.16) и (4.2) соответственно.

Преобразуем представление (4.32). Вспоминая выражение (1.41) для оператора $F_1(\vartheta)$ и соотношения $Z^*P = 0$, $\tilde{Z}^*P = 0$, получаем

$$F_1(\vartheta)\Xi(\tau; \vartheta) = (\vartheta_1 Z + \vartheta_2 \tilde{Z})\Xi(\tau; \vartheta). \quad (4.34)$$

Далее, в силу (3.18) и (3.22) выполнено $PK(\vartheta)P = PN(\vartheta)P$, а потому

$$\Xi(\tau; \vartheta)K(\vartheta)\Xi(\tau; \vartheta) = \Xi(\tau; \vartheta)N(\vartheta)\Xi(\tau; \vartheta). \quad (4.35)$$

С учетом (4.34) и (4.35) представление (4.32) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\lambda(\tau; \vartheta)^{-1} &= \Xi(\tau; \vartheta) + \tau(\vartheta_1 Z + \vartheta_2 \tilde{Z})\Xi(\tau; \vartheta) + \tau\Xi(\tau; \vartheta)(\vartheta_1 Z^* + \vartheta_2 \tilde{Z}^*) \\ &\quad - \tau^3 \Xi(\tau; \vartheta)N(\vartheta)\Xi(\tau; \vartheta) + J(\tau; \vartheta). \end{aligned} \quad (4.36)$$

4.3. Вернемся к исходным параметрам t , ε , вспоминая, что $t = \tau\vartheta_1$, $\varepsilon = \tau\vartheta_2$. В силу (1.34) оператор $\tau^2\mathcal{S}(\vartheta) =: L(t, \varepsilon)$ задается выражением

$$\begin{aligned} L(t, \varepsilon) &= t^2 S + t\varepsilon \left(-(X_0 Z)^* X_0 \tilde{Z} - (X_0 \tilde{Z})^* X_0 Z + P(Y_2^* Y_1 + Y_1^* Y_2) \right) \Big|_{\mathfrak{M}} \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(-(X_0 \tilde{Z})^* X_0 \tilde{Z} \Big|_{\mathfrak{M}} + Q_{\mathfrak{M}} + \lambda Q_{0\mathfrak{M}} \right). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Оператор (4.7) принимает вид $L(t, \varepsilon)^{-1}P$. Отметим оценку, вытекающую из (4.4):

$$L(t, \varepsilon) \geq \check{c}_*(t^2 + \varepsilon^2)I_{\mathfrak{M}}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (4.38)$$

В силу (3.30) оператор $\tau^3 N(\vartheta) =: N(t, \varepsilon)$ имеет структуру

$$N(t, \varepsilon) = t^3 N_{11} + t^2 \varepsilon N_{12} + t \varepsilon^2 N_{21} + \varepsilon^3 N_{22}. \quad (4.39)$$

Из (3.50) вытекает оценка

$$\|N(t, \varepsilon)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_6(t^2 + \varepsilon^2)^{3/2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (4.40)$$

Записывая (4.36) в терминах исходных параметров, дадим равносильную формулировку теоремы 4.2, удобную для последующих применений к дифференциальным операторам. Назовем *корректором* оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t, \varepsilon) := & (tZ + \varepsilon\tilde{Z})L(t, \varepsilon)^{-1}P + L(t, \varepsilon)^{-1}P(tZ^* + \varepsilon\tilde{Z}^*) \\ & - L(t, \varepsilon)^{-1}N(t, \varepsilon)L(t, \varepsilon)^{-1}P. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Отметим оценку, вытекающую из (1.21), (1.25), (4.38) и (4.40):

$$\|\mathcal{K}(t, \varepsilon)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_7(t^2 + \varepsilon^2)^{-1/2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \quad (4.42)$$

$$C_7 = C_6(\check{c}_*)^{-2} + 2(\check{c}_*)^{-1}\kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2} \left(\|X_1\| + c_1C(1)^{1/2} \right), \quad (4.43)$$

где постоянная C_6 определена в (3.50).

Теорема 4.3. Пусть выполнены предположения п. 1.1–1.4 и оператор $V_\lambda(t, \varepsilon)$ определен в п. 1.4. Предположим, что выполнено условие (4.1). Тогда справедливо представление

$$V_\lambda(t, \varepsilon)^{-1} = L(t, \varepsilon)^{-1}P + \mathcal{K}(t, \varepsilon) + J(t, \varepsilon).$$

Здесь P — ортопроектор на подпространство \mathfrak{N} , оператор $L(t, \varepsilon)$, действующий в \mathfrak{N} , определен в (4.37). Корректор $\mathcal{K}(t, \varepsilon)$ определен в (4.41), где оператор $N(t, \varepsilon)$ определен согласно (4.39) и (3.31)–(3.34); операторы Z, \tilde{Z}, R, S определены в п. 1.6, 1.7. Операторы $L(t, \varepsilon)$ и $\mathcal{K}(t, \varepsilon)$ подчинены оценкам (4.38) и (4.42) соответственно. Для остаточного члена $J(t, \varepsilon)$ выполнена оценка

$$\|J(t, \varepsilon)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C, \quad t^2 + \varepsilon^2 \leq \tau_0^2,$$

число τ_0 удовлетворяет ограничению (1.15), а постоянная C задана выражением (4.33).

Замечание 4.4. Громоздкие явные выражения для оценочных постоянных C и C_6, C_7 можно извлечь из (2.12), (2.13), (2.15), (3.4), (3.7), (3.11), (3.16), (4.33) и (3.36), (3.45), (3.47), (3.49), (3.50), (4.43) соответственно. Для нас важен характер зависимости этих постоянных от исходных данных задачи. Можно усмотреть, что (после завышения) постоянная C представляет собой многочлен от переменных $\delta, \delta^{-1}, (\check{c}_*)^{-1}, \kappa^{-1/2}, \|X_1\|, \|Y_1\|, c_1, C(1), c_2, c_3, |\lambda|\|Q_0\|$ и τ_0 . Постоянная \check{c}_* определена в (4.2), а τ_0 фиксировано в соответствии с (1.15). Аналогично постоянную C_6 (после завышения) можно считать полиномом от переменных $\delta^{-1/2}, \kappa^{1/2}, \|X_1\|, \|Y_1\|,$

c_1 , $C(1)^{1/2}$, $c_2^{1/2}$, $c_3^{1/2}$ и $|\lambda|||Q_0||$, а C_7 — многочленом от тех же переменных и от $(\check{c}_*)^{-1}$. Коэффициенты упомянутых многочленов — некоторые положительные абсолютные константы.

Список литературы

- [BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), №5, 1–108.
- [BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного операторного семейства с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), №5, 69–90.
- [BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), №6, 1–104.
- [BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Аппроксимация решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$* , Алгебра и анализ **18** (2006), №6, 1–130.
- [K] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [Su1] Suslina T. A., *Homogenization of periodic second order differential operators including first order terms*, Spectral theory of differential operators, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, 225, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [Su2] Суслина Т. А., *Усреднение в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), №1, 108–222.

С.-Петербургский
государственный университет
физический факультет
198504, Санкт-Петербург
Петродворец, Ульяновская, 3
Россия
E-mail: suslina@list.ru

Поступило 3 февраля 2013 г.