Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. Г. Журавлев, Модули торических разбиений на множества ограниченного остатка и сбалансированные слова, *Алгебра и анализ*, 2012, том 24, выпуск 4, 97–136

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.173
20 марта 2025 г., 21:27:38

Алгебра и анализ
Том 24 (2012), №4

МОДУЛИ ТОРИЧЕСКИХ РАЗБИЕНИЙ НА МНОЖЕСТВА ОГРАНИЧЕННОГО ОСТАТКА И СБАЛАНСИРОВАННЫЕ СЛОВА

© В. Г. ЖУРАВЛЕВ

Строится пространство модулей $\mathcal{M}_{\rm til}$ для семейства $\mathbb{T}_{\rm til}$ параллелотопных разбиений
$$\mathbb{T}^D_{c,\lambda} = \mathbb{T}^D_0 \sqcup \mathbb{T}^D_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}^D_D$$
тора $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/\mathbb{Z}^D$ произвольной размерности D на множества ограниченного остатка $\mathbb{T}^D_k$. С помощью разбиений $\mathbb{T}^D_{c,\lambda}$ теорема Гекке о распределения дробных долей на окружности переносится на торы $\mathbb{T}^D$: в терминах модулей $(c,\lambda) \in \mathcal{M}_{\rm til}$ оценивается величина отклонения распределения на торе $\mathbb{T}^D$ точек орбиты относительно сдвига тора $S_\beta : x \to x + \beta \bmod \mathbb{Z}^D$ на любой вектор вида $\beta = \frac{1}{n}(\lambda c + l)$, где l принадлежит кубической решетке $\mathbb{Z}^D$.

Доказывается цветная и частотная универсальность торических разбиений $\mathbb{T}^D_{c,\lambda}$ из семейства $\mathbb{T}_{\rm til}$. Показано, как, используя данные разбиения, можно генерировать κ-сбалансированные слова w над алфавитом $\mathcal{A} = \{0,1,\ldots,D\}$ с величиной $\kappa = 2$ для $D = 2$ и $\kappa = 3$ для $D \geqslant 3$.

Введение

1. Модули торических разбиений. В теореме 7.2 доказывается существование биекции
$$(c,\lambda) \to \overline{\mathbb{A}}\mathbb{T}^D_{c,\lambda} \tag{0.1}$$
между модулями $(c,\lambda) \in \mathcal{M}_{\rm til}$, где $c = (c_1,\ldots,c_D) \in \mathbb{R}^D$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, и классами изоморфных разбиений $\overline{\mathbb{A}}\mathbb{T}^D_{c,\lambda}$ из семейства параллелотопных разбиений $\mathbb{T}_{\rm til}$ тора $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/\mathbb{Z}^D$ размерности $D \geqslant 2$. Здесь пространство модулей $\mathcal{M}_{\rm til}$ — бесконечный многогранник из $\mathbb{R}^{D+1}$, одна из граней которого — гиперповерхность второго порядка, $\overline{\mathbb{A}}$ — группа гиперболических автоморфизмов тора $\mathbb{T}^D$ и
$$\mathbb{T}^D_{c,\lambda} = \mathbb{T}^D_0 \sqcup \mathbb{T}^D_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}^D_D \tag{0.2}$$

Ключевые слова: теорема Гекке, распределение дробных долей, множества ограниченного остатка на торе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 11-01-00578-а.

— каноническое разбиение тора $\mathbb{T}^D$ на некоторые специальные параллелотопы $\mathbb{T}^D_k$ или многогранники, получающиеся из них с помощью операции вытягивания. Множество всех разбиений из семейства $\mathbb{T}_{\mathrm{til}}$ является расслоением размерности $2D+1$ над дискретной группой $\mathrm{GL_D}(\mathbb{Z})$, а классы изоморфных разбиений $\overline{\mathbb{A}}\mathbb{T}^D_{c,\lambda}$ из $\mathbb{T}_{\mathrm{til}}$ или, в силу биекции (0.1), пространство модулей $\mathcal{M}_{\mathrm{til}}$ имеет размерность $D+1$.

Значение разбиений (0.2) состоит в том, что $\mathbb{T}^D_k$ являются множествами ограниченного остатка относительно всех сдвигов

$$S_\beta(x) \equiv x + \beta \bmod \mathbb{Z}^D \tag{0.3}$$

тора $\mathbb{T}^D$ на векторы вида $\beta = \frac{1}{n}(\alpha+l)$, где $\alpha = \lambda c$, $l \in \mathbb{Z}^D$ и n — произвольное натуральное число. Тем самым для размерностей $D \geqslant 2$ с помощью модулей (c,λ) из $\mathcal{M}_{\mathrm{til}}$ удалось параметризовать целый класс параллелотопных торических разбиений $\mathbb{T}^D_{c,\lambda}$ на множества ограниченного остатка.

2. Многомерная теорема Гекке. Для произвольного разбиения тора $\mathbb{T}^* = \mathbb{T}_0 \sqcup \mathbb{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}_D$ обозначим $\delta_k(i;\gamma,x_0,\mathbb{T}^*)$ отклонение, равное разности количества точек орбиты $S^j_\gamma(x_0) \equiv x_0 + j\gamma \bmod \mathbb{Z}^D$ для $0 \leqslant j < i$, попавших в область $\mathbb{T}_k$, и ожидаемым числом попаданий $i \operatorname{vol} \mathbb{T}_k$. Если разбиение $\mathbb{T}^*$ из семейства $\mathbb{T}_{\mathrm{til}}$, то для любого элемента $\overline{A} = (M,\overline{t})$ из группы $\overline{\mathbb{A}}$ его образ $\overline{A}\mathbb{T}^* = \overline{A}\mathbb{T}^D_0 \sqcup \overline{A}\mathbb{T}^D_1 \sqcup \ldots \sqcup \overline{A}\mathbb{T}^D_D$ также является разбиением тора из $\mathbb{T}_{\mathrm{til}}$ и для него также можно определить отклонение.

В теоремах 6.2, 6.3 (см. ниже) доказывется ограниченность отклонений $\delta_k(i;\gamma,x_0,\mathbb{T}^*)$ для разбиений $\mathbb{T}^*$ из семейства $\mathbb{T}_{\mathrm{til}}$.

Теорема 1. *Если S_α с $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_D)$ — иррациональный сдвиг тора, т.е. числа $1,\alpha_1,\ldots,\alpha_D$ линейно независимы над кольцом $\mathbb{Z}$, то для любого вектора β, определенного в* (0.3), *и элемента $\overline{A} = (M,\overline{t})$ из группы $\overline{\mathbb{A}}$ выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i;M\beta,x_0,\overline{A}\mathbb{T}^D_{c,\lambda})| \leqslant c_{k,D}\, n \tag{0.4}$$

при любом $k = 0,1,\ldots,D$ и $i = 0,1,2,\ldots$ Константы $c_{k,D}$ в неравенстве (0.4) *вычисляются по формулам*

$$c_{k,D} = 1 + (D-1)c_k \tag{0.5}$$

для $k = 1,\ldots,D$ и

$$c_{k,D} = 1 + (D-1)\cdot|\sigma(c)-1| \tag{0.6}$$

для $k = 0$, где $\sigma(c) = c_1 + \cdots + c_D$.

Неравенство (0.4) вместе с формулами (0.5), (0.6) представляет собою многомерное обобщение теоремы Гекке [2] о распределении точек на окружности $\mathbb{T}^1$.

3. Аппроксимация разбиений тора. Любой орбите $\mathrm{Orb}(S_\gamma, x_0)$ и разбиению $\mathbb{T}^*$ из семейства $\mathbb{T}_{\mathrm{til}}$ можно поставить в соответствие кодовое слово

$$w(\mathrm{Orb}(S_\gamma, x_0), \mathbb{T}^D_{c,\lambda}) = k_0 k_1 \dots k_i \dots, \tag{0.7}$$

где буквы $k_i = w_i(\mathrm{Orb}(S_\gamma, x_0), \mathbb{T}^D_{c,\lambda})$ выбираются из конечного алфавита $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, D\}$ и определяются условиями $x_i \in \mathbb{T}_{k_i}$ для точек $x_i = S^i_\gamma(x_0)$ из орбиты $\mathrm{Orb}(S_\gamma, x_0)$. Если начальные буквы $w_i(*) = k_i$ кодовых слов (0.7) удовлетворяют условию $w_i(\mathrm{Orb}(S_\alpha, x_0), \mathbb{T}) = w_i(\mathrm{Orb}(S_{\alpha^*}, x^*_0), \mathbb{T}^*)$ для всех номеров $i < N$, то пары $(\mathrm{Orb}(S_\alpha, x_0), \mathbb{T})$ и $(\mathrm{Orb}(S_{\alpha^*}, x^*_0), \mathbb{T}^*)$ называются N-согласованными.

Обозначим $\mathbb{T}^D(\alpha, \overline{\mathbb{A}})$ подмножество $\mathbb{T}^D_\alpha$ из семейства $\mathbb{T}_{\mathrm{til}}$, имеющих разбиение на множества ограниченного остатка относительно сдвига S_α. В теореме 9.2 доказывается следующее свойство аппроксимации разбиениями из подмножества $\mathbb{T}^D(\alpha, \overline{\mathbb{A}})$.

Теорема 2. *Пусть даны любые фиксированные вектор сдвига α^* и разбиение тора $\mathbb{T}^D_{\lambda^*,c^*} \in \mathbb{T}\mathrm{til}$ с условием $\alpha^* = \lambda^* c^*$, и пусть также даны произвольные иррациональный сдвиг тора S_α и натуральное число N. Тогда в случае размерности $D \geqslant 2$ существуют разбиение тора $\mathbb{T}^D_\alpha$ из семейства $\mathbb{T}^D(\alpha, \overline{\mathbb{A}})$ и начальная точка $x_0 \in \mathbb{T}^D$ такие, что пары $(\mathrm{Orb}(S_\alpha, x^*_0), \mathbb{T}^D_\alpha)$ и $(\mathrm{Orb}(S_{\alpha^*}, x^*_0), \mathbb{T}^D_{\alpha^*,\lambda^*})$ будут N-согласованными.*

Приведенное универсальное свойство сдвигов S_α тора $\mathbb{T}^D$ отсутствует в случае размерности $D = 1$, когда тор $\mathbb{T}^D$ — единичная окружность. Причина состоит в том, что в размерности $D = 1$ унимодулярная группа $\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ вырождается в конечную группу.

4. Сбалансированные слова. Пусть $w = k_0 k_1 k_2 \dots$ — конечное или бесконечное слово, записанное в алфавите $\mathcal{A}$, и κ — произвольное целое неотрицательное число. Слово w называется κ-сбалансированным, если у произвольных одинаковой длины факторов (подслов) u, v слова w разность вхождений любой буквы $k \in \mathcal{A}$ не превышает κ.

В теореме 10.1 вычисляются значения κ для разбиений $\mathbb{T}^D_{c,\lambda} \in \mathbb{T}_{\mathrm{til}}$ с оптимально выбранным параметром c.

Теорема 3. *Пусть дано $\mathbb{T}^D_{c,\lambda} \in \mathbb{T}_{\mathrm{til}}$ — разбиение тора с параметром c, удовлетворяющим условию $|c - c_{\min}| < \varepsilon_D$, где $c_{\min} = \left(\frac{1}{D+1}, \dots, \frac{1}{D+1}\right)$, и $\varepsilon_D > 0$ — некоторая константа, зависящая только от размерности тора D, и пусть при этом сдвиг $\alpha = \lambda c$ будет иррациональным. Тогда в случае размерности $D \geqslant 2$ для любой начальной точки $x_0 \in \mathbb{T}^D$ кодовое* *слово* $w = w(\mathrm{Orb}(S_\alpha, x_0), \mathbb{T}^D_{c,\lambda})$ *является* κ*-сбалансированным, где*

$$\kappa = \begin{cases} 2 & \text{для } D = 2, \\ 3 & \text{для } D \geqslant 3. \end{cases} \tag{0.8}$$

Как показывает теорема 3, кодовые слова $w = w(*, \mathbb{T})$ для разбиений $\mathbb{T}$ из $\mathbb{T}_{\rm til}$ являются сбалансированными словами. Они представляют собою многомерный вариант слов Штурма [6]. Богатая теория слов Штурма объясняется наличием у них множества интересных комбинаторных, арифметических и геометрических свойств. Значимость сбалансированных слов объясняется их многочисленными применениями в таких областях, как динамические системы, теория кодов, теория коммуникации и задачи оптимизации, теория языков и лингвистика, теория распознавания, статистическая физика (Kawasaki–Ising model) и др. (см., например, [1, 3, 4, 7]).

В приложениях важно, чтобы величина сбалансированности κ была минимальной. Для сравнения приведем один пример из теории динамических систем: кодовые слова для D-мерных кубических бильярдов имеют $\kappa = D$ [7]. Кодовые же слова $w = w(*, \mathbb{T})$ для разбиений $\mathbb{T}$ из семейства $\mathbb{T}_{\rm til}$ имеют, согласно (0.3), $\kappa = 3$ при всех размерностях $D \geqslant 3$, и тем самым с ростом размерности D в этом случае наблюдается явление стабилизации величины κ.

Еще одна прикладная задача, которую приходится часто решать: предполагается заданной частота букв, входящих в слово w, и требуется сконструировать слово с наименьшим возможным значением κ. Наш метод решает указанную задачу.

5. История вопроса. Работы Э. Гекке [2] об отклонениях и Ж. Рози [6] о фрактальных разбиениях тора стали для автора вдохновляющими. В них уже содержались определяющие идеи: разностная функция и перекладывающийся тор, необходимые для общей конструкции множеств ограниченного остатка на многомерных торах. Вначале было доказано, что разбиения Рози всех уровней являются разбиениями на множества ограниченного остатка [10]. Но данные разбиения имеют фрактальные границы. Освобождение от фрактальности привело к появлению геометрической конструкции перекладывающихся торических разверток, на основе которых и была доказана многомерная теорема Гекке [11, 12]. Размерность $D = 1$ в исходной теореме Гекке [2] критическая, поскольку только в этой размерности унимодулярная группа $\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ имеет конечный порядок. В размерностях же $D \geqslant 2$ появляются бесконечные группы

$\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ гиперболических автоморфизмов торов $\mathbb{T}^D$, порождающие богатое семейство параллелотопных торических разбиений $\mathbb{T}_{\mathrm{til}}$, обладающих цветными и частотными свойствами универсальности (см. теоремы 9.2 и 9.3).

§1. Вытягивание кубов

1.1. Вытянутые кубы C_s^+. Приведем из [12] основные понятия и результаты, необходимые нам для дальнейшего. Пусть C^+ — замкнутый D-мерный куб, натянутый на единичные векторы $\mathbf{e}_1 = (1,0,\dots,0)$, $\dots$, $\mathbf{e}_D = (0,0,\dots,1)$. Обозначим $\mathbb{R}_+^D$ *положительный конус*, состоящий из $x = (x_1,\dots,x_D) \in \mathbb{R}^D$ с координатами $x_1 > 0,\dots,x_D > 0$. Для любого вектора $\mathbf{s}$ из конуса $\mathbb{R}_+^D$ определим операцию *вытягивания* $\mathrm{Str}_{\mathbf{s}}$ множеств $X \subset \mathbb{R}^D$, полагая

$$\mathrm{Str}_{\mathbf{s}}(X) = \bigcup_{t \in I} (X + t\mathbf{s}), \tag{1.1}$$

при этом $\mathbf{s}$ будем назывть *вытягивющим вектором.* С помощью операции (1.1) определим *вытянутый куб* $C_{\mathbf{s}}^+ = \mathrm{Str}_{\mathbf{s}}(C^+)$, имеющий объем

$$\mathrm{vol}\, C_{\mathbf{s}}^+ = \sigma(\mathbf{s}) + 1, \tag{1.2}$$

где полагаем $\sigma(\mathbf{s}) = s_1 + \dots + s_D$ для вектора $\mathbf{s} = (s_1,\dots,s_D)$.

Далее мы будем использовать понятие *разбиения* множеств в обычном (строгом) смысле, когда рассматриваются покрытия множеств $X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots$ с условием $X_k \cap X_{k'} = \emptyset$ для $k \neq k'$, а также в расширенном смысле $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots$, предполагая, что различные множества X_k не имеют общих внутренних точек.

Вытянутые кубы $C_{\mathbf{s}}^+$ обладают следующим важным для наших целей свойством [12, теорема 1.1]: *для любого вектора $\mathbf{s} \in \mathbb{R}_+^D$ имеет место разбиение пространства*

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in L_{\mathbf{s}}^+} C_{\mathbf{s}}^+[l], \tag{1.3}$$

где $C_{\mathbf{s}}^+[l] = C_{\mathbf{s}}^+ + l$ — множество, полученное сдвигом куба C_s^+ на вектор l, и $L_{\mathbf{s}}^+ = \mathbb{Z}[\mathbf{e}_{1,s},\dots,\mathbf{e}_{D,s}]$ — полная решетка, порождаемая векторами $\mathbf{e}_{k,\mathbf{s}} = \mathbf{e}_k + \mathbf{s}$ для $k = 1,\dots,D$. Таким образом, вытянутые кубы $C_{\mathbf{s}}^+$ трансляционно разбивают пространство $\mathbb{R}^D$ с помощью *трансляционной решетки $L_{\mathbf{s}}^+$.*

1.2. Зеркально-вытянутые кубы $C^-_{\mathbf{s}}$. Для любого множества $X \subset \mathbb{R}^D$ и вектора $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^D_+$ определим еще одно преобразование вытягивания

$$\mathrm{Str}^-_{\mathbf{s}}(X) = [\mathrm{Str}_{\mathbf{s}}(X) \setminus \{X \cup X + \mathbf{s}\}]^c, \tag{1.4}$$

двойственное к преобразованию вытягивания $\mathrm{Str}_{\mathbf{s}}$, определенному в п. 1.1. Новое преобразование (1.4) обладает свойством самодвойственности $\mathrm{Str}^-(\mathrm{Str}^-_{\mathbf{s}}(X)) = X + \mathbf{s}$ при условии, если выполняется требование

$$X \cap (X + \mathbf{s}) = \emptyset. \tag{1.5}$$

Применим $C^-_{\mathbf{s}} = \mathrm{Str}^-_{\mathbf{s}}(C^-)$ преобразование (1.4) к единичному кубу C^-, но теперь натянутому на векторы $-\mathbf{e}_k$ для $k = 1, \dots, D$. Обозначим $\max(\mathbf{s}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant D} s_i$ для $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_D)$. Тогда в этом случае требование (1.5) для множества $X = C^-$ будет эквивалентно условию

$$\max(\mathbf{s}) > 1. \tag{1.6}$$

Согласно [12] объем вытянутого куба $C^-_{\mathbf{s}}$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{vol}\, C^-_{\mathbf{s}} = \sigma(\mathbf{s}) - 1. \tag{1.7}$$

Если вытягивающий вектор $s \in \mathbb{R}^D_+$ удовлетворяет условию (1.6), то вытянутый куб $C^-_{\mathbf{s}}$ имеет объем $\mathrm{vol}\, C^-_{\mathbf{s}} > 0$. Преобразование $\mathrm{Str}^-_{\mathbf{s}}$ называется *зеркальным вытягиванием*, поскольку грани в многограннике $C^-_{\mathbf{s}} = \mathrm{Str}^-_{\mathbf{s}}(C^-)$ меняются местами по сравнению с их положением в вытянутом кубе $C^+_{\mathbf{s}} = \mathrm{Str}^+_{\mathbf{s}}(C^+)$.

Зеркально-вытянутые кубы $C^-_{\mathbf{s}}$, как и вытянутые кубы $C^+_{\mathbf{s}}$, также трансляционно разбивают пространство $\mathbb{R}^D$ [12, теорема 2.3]: *для любого вытягивающего вектора* $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^D_+$ *с условием* $\max(\mathbf{s}) > 1$ *выполняется разбиение*

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in L^-_{\mathbf{s}}} C^-_{\mathbf{s}}[l], \tag{1.8}$$

где $L^-_{\mathbf{s}} = \mathbb{Z}[e^-_1, \dots, e^-_D]$ — *полная решетка, порождаемая векторами* $\mathbf{e}^-_{k,\mathbf{s}} = \mathbf{s} - \mathbf{e}_k$ *для* $k = 1, \dots, D$.

§2. Переход к кубической решетке

2.1. Вытянутые параллелотопы $\mathcal{C}^+_{\mathbf{c}}$. Линейное отображение

$$\mathbb{R}^D \xrightarrow{M^+_{\mathbf{s}}} \mathbb{R}^D : \ \mathbf{e}_{k,\mathbf{s}} \mapsto \mathbf{e}_k, \ \ k = 1, \dots, D, \tag{2.1}$$

задает изоморфизм решеток $M^+_{\mathbf{s}} : L^+_{\mathbf{s}} \overset{\rightarrow}{\sim} \mathbb{Z}^D$ и переводит D-мерный куб C, натянутый на единичные векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_D$, в *параллелотоп*

$$\mathcal{C}^+ = M^+_{\mathbf{s}}(C), \tag{2.2}$$

натянутый соответственно на векторы $\mathbf{e}_{1,\mathbf{c}}, \ldots, \mathbf{e}_{D,\mathbf{c}}$, где $\mathbf{e}_{k,\mathbf{c}} = \mathbf{e}_k - \mathbf{c}$ и

$$\mathbf{c} = M_{\mathbf{s}}^{+}(\mathbf{s}), \tag{2.3}$$

поскольку согласно (2.1) $M_{\mathbf{s}}^{+}(\mathbf{e}_k) = M_{\mathbf{s}}^{+}(\mathbf{e}_{k,\mathbf{s}} - \mathbf{s}) = \mathbf{e}_k - \mathbf{c}$. Пусть $\mathbf{s} = s_1\mathbf{e}_1 + \cdots + s_D\mathbf{e}_D$. Тогда из последнего равенства получаем $s_1 M_s^{+}(\mathbf{e}_1) + \cdots + s_D M_s^{+}(\mathbf{e}_D) = \mathbf{s} - \sigma(\mathbf{s})\mathbf{c}$, где $\sigma(\mathbf{s})$ определено в (1.2). Так как левая часть последнего равенства равна $M_{\mathbf{s}}^{+}(\mathbf{s}) = \mathbf{c}$, то записываем $\mathbf{c} = \mathbf{s} - \sigma(\mathbf{s})\mathbf{c}$. Отсюда для $\mathbf{c}$ из (2.3) выводим формулу

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{s}}{\sigma(\mathbf{s}) + 1}. \tag{2.4}$$

Согласно (2.2) вытянутый куб $C_{\mathbf{s}}^{+}$ отображается $M_{\mathbf{s}}^{+} : C_{\mathbf{s}}^{+} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{c}}^{+}$ в многогранник

$$\mathcal{C}_{\mathbf{c}}^{+} = \mathrm{Str}_{\mathbf{c}}^{+}(\mathcal{C}^{+}), \tag{2.5}$$

получающийся вытягиванием параллелотопа $\mathcal{C}^{+}$ с помощью вектора $\mathbf{c}$, связанного с $\mathbf{s}$ формулой (2.4). *Вытянутый параллелотоп* $\mathcal{C}_{\mathbf{c}}^{+}$ имеет число вершин

$$\sharp V(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}^{+}) = 2^{D+1} - 2. \tag{2.6}$$

2.2. Зеркально-вытянутые параллелотопы $\mathcal{C}_{\mathbf{s}}^{-}$. По аналогии с (2.1) определим линейное отображение

$$\mathbb{R}^D \xrightarrow{M_{\mathbf{s}}^{-}} \mathbb{R}^D : \ \mathbf{e}_{k,\mathbf{s}}^{-} \mapsto \mathbf{e}_k, \ \ k = 1, \ldots, D. \tag{2.7}$$

Оно задает изоморфизм решеток $M_{\mathbf{s}}^{-} : L_{\mathbf{s}}^{-} \overset{\sim}{\longrightarrow} \mathbb{Z}^D$ и переводит D-мерный *куб* C^{-}, натянутый на векторы $-\mathbf{e}_1, \ldots, -\mathbf{e}_D$, в параллелотоп

$$\mathcal{C}^{-} = M_{\mathbf{s}}^{-}(C^{-}),$$

натянутый соответственно на векторы $\mathbf{e}_{1,\mathbf{c}}, \ldots, \mathbf{e}_{D,\mathbf{c}}$, где $\mathbf{e}_{k,\mathbf{c}} = \mathbf{e}_k - \mathbf{c}$. Векторы $\mathbf{e}_{k,\mathbf{c}}$ те же самые, что и в п. 2.1, но в этом случае

$$\mathbf{c} = M_{\mathbf{s}}^{-}(\mathbf{s}). \tag{2.8}$$

Действительно, согласно (2.7) находим $M_{\mathbf{s}}^{-}(\mathbf{e}_k) = M_{\mathbf{s}}^{-}(\mathbf{s} - \mathbf{e}_{k,\mathbf{s}}^{-}) = \mathbf{c} - \mathbf{e}_k$. Отсюда находим образы $M_{\mathbf{s}}^{-}(-\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_{k,\mathbf{c}}$ векторов $-\mathbf{e}_k$. Аналогично (2.4) для $\mathbf{c}$ выводим формулу

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{s}}{\sigma(\mathbf{s}) - 1}. \tag{2.9}$$

Согласно (2.7) зеркально-вытянутый куб $C_{\mathbf{s}}^{-}$ отображается $M_{\mathbf{s}}^{-} : C_{\mathbf{s}}^{-} \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbf{c}}^{-}$ в *зеркально-вытянутый параллелотоп*

$$\mathcal{C}_{\mathbf{c}}^{-} = \mathrm{Str}_{\mathbf{c}}^{-}(\mathcal{C}^{-}) \tag{2.10}$$

с вытягивающим вектором (2.9), имеющий число вершин

$$\sharp V(\mathcal{C}_{\mathbf{c}}^{-}) = 2^{D+1} - 2. \tag{2.11}$$

§3. Множество вытягивающих векторов

3.1. Линейно-инверсные преобразования. Согласно формулам (2.4) и (2.9) отображения, переводящие вытягивающие векторы $\mathbf{s}$ в векторы $\mathbf{c}$, имеют вид

$$\mathrm{inv}_{\pm}(x) = \frac{x}{\sigma(x) \pm 1} \tag{3.1}$$

и представляют собою *линейно-инверсные преобразования* пространства $\mathbb{R}^D$. Для наших целей мы ограничим инверсию inv_+ на множество $\mathbf{S}_{<1} = \mathbb{R}_+^D$ и соответственно inv_- — на множество $\mathbf{S}_{>1} = \{s \in \mathbb{R}_+^D; \max(s) > 1\} = \mathbb{R}_+^D \backslash C^+$, где $C^+ = [0,1]^D$ — единичный куб. Из (3.1) следует, что инверсии $\mathrm{inv}_{\pm}$ связаны соотношением

$$\mathrm{inv}_+ = \mathrm{inv}_- \circ (-1), \tag{3.2}$$

где $[\mathrm{inv}_- \circ (-1)](s) = \mathrm{inv}_-[(-1)(s)] = \mathrm{inv}_-(-s)$ — некоммутативная композиция центральной симметрии $-1(s) = -s$ и inv_-. Нетрудно проверить, что обратными отображениями для инверсий $\mathrm{inv}_{\pm}$ будут они же:

$$\mathrm{inv}_-^{-1} = \mathrm{inv}_-, \ \ \mathrm{inv}_+^{-1} = (-1) \circ \mathrm{inv}_-. \tag{3.3}$$

3.2. Вытягивающие векторы для параллелотопов.

Лемма 3.1. *Имеют место следующие биекции*:

$$\mathrm{inv}_+ : \ \ \mathbf{S}_{<1} \overrightarrow{\sim} \mathbf{C}_{<1}, \quad \mathrm{inv}_- : \ \ \mathbf{S}_{>1} \overrightarrow{\sim} \mathbf{C}_{>1}, \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{<1} &= \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^D; \sigma(\mathbf{c}) < 1\}, \\ \mathbf{C}_{>1} &= \bigl\{\mathbf{c} \in \mathbb{R}_+^D; \sigma(\mathbf{c}) > 1, \min_{1 \leqslant k \leqslant D} \sigma_k(\mathbf{c}) < 1\bigr\}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

при этом $\sigma_k(\mathbf{c}) = \sigma(\mathbf{c}) - c_k$.

Доказательство получается с помощью формул (3.1)–(3.3). □

Первое множество $\mathbf{C}_{<1}$ из (3.4) является D-мерным симплексом, второе же $\mathbf{C}_{>1}$ устроено более сложно и представляет собой звезду из D бесконечных цилиндров. Из определения (3.4) следует, что $\mathbf{C}_{<1} \cap \mathbf{C}_{>1} = \emptyset$, но замыкания $\mathbf{C}_{<1}^c$ и $\mathbf{C}_{>1}^c$ имеют общую границу $\mathbf{C}_1^c = \mathbf{C}_{<1}^c \cap \mathbf{C}_{>1}^c$ — это $(D-1)$-мерный симплекс

$$\mathbf{C}_1^c = \{\mathbf{c} \in (\mathbb{R}_+^D)^c; \sigma(\mathbf{c}) = 1\}. \tag{3.6}$$

Теорема 3.1. *Пусть*

$$\mathbf{C}_{\leqslant 1} = \mathbf{C}_{<1} \sqcup \mathbf{C}_1, \quad \text{где } \mathbf{C}_1 = \{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^D_+; \sigma(\mathbf{c}) = 1\} \tag{3.7}$$

— внутренность симплекса (3.6). Тогда множество

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\leqslant 1} \sqcup \mathbf{C}_{>1} = \big\{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^D_+; \min_{1 \leqslant k \leqslant D} \sigma_k(\mathbf{c}) < 1\big\} \tag{3.8}$$

представляет собою множество вытягивающих векторов для параллелотопов (2.5), (2.10): любому вектору $\mathbf{c} \in \mathbf{C}$ соответствует $\mathbf{c} \mapsto \mathcal{C}^+_{\mathbf{c}}$ — выпуклый параллелотоп $\mathcal{C}^+_{\mathbf{c}}$, если $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leqslant 1}$, и соответствует $\mathbf{c} \mapsto \mathcal{C}^-_{\mathbf{c}}$ — невыпуклый параллелотоп $\mathcal{C}^-_{\mathbf{c}}$, если $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{>1}$. Вытянутые параллелотопы $\mathcal{C}^{\pm}_{\mathbf{c}}$ разбивают пространство

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \mathcal{C}^{\pm}_{\mathbf{c}}[l] \tag{3.9}$$

на многогранники $\mathcal{C}^{\pm}_{\mathbf{c}}[l] = \mathcal{C}^{\pm}_{\mathbf{c}} + l$ без общих внутренних точек.

Доказательство. Для векторов $\mathbf{c}$ из множеств $\mathbf{C}_{<1}$ и $\mathbf{C}_{>1}$ утверждение теоремы вытекает из леммы 3.1, а для векторов $\mathbf{c}$ из $\mathbf{C}_1$ получается предельным переходом $\mathcal{C}^+_{\mathbf{c}_k} \longrightarrow \mathcal{C}^+_c$ для некоторой последовательности вытягивающих векторов $\mathbf{c}_k \in \mathbf{C}_{<1}$, где $k \to +\infty$, сходящихся к вектору $\mathbf{c}$. Трансляционные разбиения (3.9) пространства $\mathbb{R}^D$ вытянутыми параллелотопы $\mathcal{C}^{\pm}_{\mathbf{c}}$ вытекают из соответствующих разбиений пространства (1.3) и (1.8) вытянутыми кубами $C^{\pm}_{\mathbf{s}}$. □

Условимся о сокращении записи

$$\mathcal{C}_{\mathbf{c}} = \mathcal{C}^{\pm}_{\mathbf{c}} \tag{3.10}$$

для вытянутых параллелотопов $\mathcal{C}^{\pm}_{\mathbf{c}}$ в зависимости от вектора $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leqslant 1}$ или $\mathbf{C}_{>1}$. Согласно (2.6), (2.11) они имеют число вершин $\sharp V(\mathcal{C}^-_c) = 2^{D+1} - 2$, исключая случай вырожденных параллелотопов $\mathcal{C}^+_{\mathbf{c}}$ для $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_1$ с числом вершин $\sharp V(\mathcal{C}^-_{\mathbf{c}}) = 2^{D+1} - 4$. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, что исходный параллелотоп $\mathcal{C}^+$ натянут на векторы $\mathbf{e}_{k,\mathbf{c}} = \mathbf{e}_k - \mathbf{c}$ и $\sigma(\mathbf{e}_{k,\mathbf{c}}) = 1 - \sigma(\mathbf{c}) = 0$, если $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_1$.

§4. Разбиения вытянутых параллелотопов

4.1. Разбиения и перекладывания вытянутых параллелотопов. Случай $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leqslant 1}$. Используя (3.9), определим разбиение

$$\mathcal{T}^+_{\mathbf{c}} = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \mathcal{C}^+_{\mathbf{c}}[l], \tag{4.1}$$

и пусть $\partial\mathcal{T}^+_{\mathbf{c}} = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \partial\mathcal{C}^+_{\mathbf{c}}[l]$ — множество всех границ разбиения $\mathcal{T}^+_{\mathbf{c}}$, состоящее из границ всех многогранников $\mathcal{C}^+_{\mathbf{c}}[l]$. Для любого $\alpha = \lambda\mathbf{c}$,

$0 < \lambda < 1$, определим множество границ $\partial\mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda} = \partial\mathcal{C}^+_{\mathbf{c}} \cup [\mathcal{C}^+_{\mathbf{c}} \cap (\partial\mathcal{T}^+_{\mathbf{c}} - \alpha)] \subset \mathcal{C}^+_{\mathbf{c}}$. Границы $\partial\mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda}$ разбивают вытянутый параллелотоп $\mathcal{C}^+_{\mathbf{c}}$ на $D+1$ область без общих внутренних точек [12]:

$$\mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda} = \mathcal{P}^{+c}_0 \cup \ldots \cup \mathcal{P}^{+c}_D, \tag{4.2}$$

где $\mathcal{P}^{+c}_k$ для $k = 1, \ldots, D$ — параллелотопы, содержащие точки $e_k = (0, \ldots, \overset{(k)}{1}, \ldots, 0)$, а $\mathcal{P}^{+c}_0 = [\mathcal{C}^+_c \setminus (\mathcal{P}^{+c}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{P}^{+c}_D)]^c$ — вытянутый параллелотоп вида $\mathcal{P}^{+c}_0 = \mathrm{Str}_{\mathbf{c}-\alpha}(\mathcal{C}^+)$.

Зададим перекладывание

$$\mathcal{S}_v(\mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda}) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{S}_v(\mathcal{P}^{+c}_0) \cup \mathcal{S}_v(\mathcal{P}^{+c}_1) \cup \ldots \cup \mathcal{S}_v(\mathcal{P}^{+c}_D) \tag{4.3}$$

вытянутого параллелотопа с разбиением (4.2), где $\mathcal{S}_v(\mathcal{P}^{+c}_k) = \mathcal{P}^{+c}_k[v_k] = \mathcal{P}^{+c}_k + v_k$ — параллельный сдвиг многогранника $\mathcal{P}^{+c}_k$ на вектор

$$v_k = \alpha - \begin{cases} 0, & \text{если } k = 0, \\ \mathbf{e}_k, & \text{если } k > 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Перекладывание $\mathcal{S}_v$ индуцирует многозначное отображение

$$S_v : \mathrm{Str}_{\mathbf{c}}(\mathcal{C}^+) \longrightarrow \mathbb{R}^D, \tag{4.5}$$

определяемое условиями $x \mapsto S_v(x) = x + v_k$, если $x \in \mathcal{P}^{+c}_k$.

Из [12, предложение 1.1] вытекает следующее свойство перекладывания $\mathcal{S}_v$.

Предложение 4.1. *Вытянутый параллелотоп* $\mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda} = \mathrm{Str}^+_{\mathbf{c}}(\mathcal{C}^+)$ *с разбиением* (4.2) *замкнут* $\mathcal{S}_v(\mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda}) \subseteq \mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda}$ *относительно операции перекладывания* (4.3).

Из определения (4.4) векторов сдвигов v_k вытекает сравнение $v_k \equiv \alpha \bmod \mathbb{Z}^D$ для любого $k = 0, 1, \ldots, D$. Отсюда и (4.5) получаем сравнение

$$S_v(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^D, \tag{4.6}$$

означающее, что многозначное отображение S_v становится однозначным на вытянутом параллелотопе $S_v : \mathcal{C}^+_{\mathbf{c}} \longrightarrow \mathcal{C}^+_{\mathbf{c}}$, если отображение S_v рассмотреть по $\bmod \mathbb{Z}^D$.

Определим на торе $\mathbb{T}^D \simeq \mathbb{R}^D/\mathbb{Z}^D$ сдвиг

$$S_\alpha : \mathbb{T}^D \longrightarrow \mathbb{T}^D, \tag{4.7}$$

полагая $S_\alpha(x) = x + \alpha \mod \mathbb{Z}^D$. Тогда из (4.3)–(4.6) вытекает, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{C}^+_{\mathbf{c}} & \xrightarrow{\mathcal{S}_v} & \mathcal{C}^+_{\mathbf{c}} & \\ \mod \mathbb{Z}^D & \downarrow & & \downarrow & \mod \mathbb{Z}^D \\ & \mathbb{T}^D & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathbb{T}^D & \end{array} \tag{4.8}$$

4.2. Разбиения и перекладывания зеркально-вытянутых параллелотопов. Случай $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{>1}$. Аналогично (4.1) с помощью разбиения

$$\mathcal{T}^-_{\mathbf{c}} = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \mathcal{C}^-_{\mathbf{c}}[l] \tag{4.9}$$

с границами $\partial\mathcal{T}^-_{\mathbf{c}} = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} \partial\mathcal{C}^-_{\mathbf{c}}[l]$ определим разбиение зеркально-вытянутого параллелотопа $\mathcal{C}^-_{\mathbf{c}}$. При некоторых дополнительных ограничениях на λ (см. лемму 4.1 ниже) параллелотоп $\mathcal{C}^-_{\mathbf{c}}$ так же, как и (4.2), будет разбит

$$\mathcal{C}^-_{\mathbf{c},\lambda} = \mathcal{P}^{-c}_0 \cup \ldots \cup \mathcal{P}^{-c}_D \tag{4.10}$$

на $D+1$ область. Здесь $\mathcal{P}^{-c}_k$ для $k = 1, \ldots, D$ — параллелотопы, содержащие точки e_k, а $\mathcal{P}^{-c}_0$ — замыкание их дополнения, имеющее вид $\mathcal{P}^{-c}_0 = \mathrm{Str}^-_{\mathbf{c}-\alpha}(\mathcal{C}^-)$, т.е. является зеркально-вытянутым параллелотопом.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{>1}$ и вектор $\alpha = \lambda\mathbf{c}$ выбирается так, что множитель λ удовлетворяет условию*

$$0 < \lambda < \lambda_{\mathbf{c}}, \text{ где } \lambda_{\mathbf{c}} = 1 - \frac{\sigma(\mathbf{c}) - 1}{\max(\mathbf{c})}. \tag{4.11}$$

Тогда зеркально-вытянутый параллелотоп $\mathcal{C}^-_{\mathbf{c}}$ будет разбит (4.10) *на $D+1$ область. Верхняя граница $\lambda_{\mathbf{c}}$ из* (4.11) *удовлетворяет неравенству $\lambda_{\mathbf{c}} < 1$ для любого $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{>1}$.*

Доказательство получается переформулировкой условия (1.6). □

Лемма 4.2.

1. *Пусть $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{>1}$ и α удовлетворяет условию $\mathbf{c} = \lambda\alpha$, $0 < \lambda < \lambda_{\mathbf{c}}$. Тогда $\alpha \in \mathbf{C}_{<1}$.*

2. *Обратно, для любого $\alpha \in \mathbf{C}_{<1}$ существует $\mathbf{c} = \lambda\alpha$, где $0 < \lambda < \lambda_c$ и $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{>1}$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Из (4.11) следует

$$\lambda_c = \frac{1 - \sigma_k(\mathbf{c})}{c_k}, \text{ где } c_k = \max(\mathbf{c}). \tag{4.12}$$

Случай $c_k > 1$. При этом условии по определению $\sigma_k(\mathbf{c})$ из (3.4) будут выполняться неравенства

$$0 < \sigma_k(\mathbf{c}) < 1. \tag{4.13}$$

Ввиду (4.12) для $\alpha = \lambda_c c$ можем записать

$$\sigma(\alpha) = \lambda_c \sigma(\mathbf{c}) = \frac{1-\sigma_k(\mathbf{c})}{c_k}(c_k + \sigma_k(\mathbf{c})) = (1-\sigma_k(\mathbf{c}))\Big(1 + \frac{\sigma_k(\mathbf{c})}{c_k}\Big).$$

Поэтому

$$\sigma(\alpha) < (1-\sigma_k(\mathbf{c}))(1+\sigma_k(\mathbf{c})) = 1 - \sigma_k^2(\mathbf{c}). \tag{4.14}$$

Отсюда и (4.13) заключаем, что $\sigma(\alpha) < 1$ и, значит, $\alpha \in \mathbf{C}_{<1}$.

Случай $c_k \leqslant 1$. Теперь из условия $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{>1}$ вытекает неравенство

$$c_k = \sigma(\mathbf{c}) - \sigma_k(\mathbf{c}) > 1 - \sigma_k(\mathbf{c}). \tag{4.15}$$

С другой стороны, так как $\sigma(\mathbf{c}) = c_1 + \dots + c_k + \dots + c_D$ и $c_k = \max(\mathbf{c})$, то

$$\min_{1\leqslant l\leqslant D} \sigma_l(\mathbf{c}) = \sigma_k(\mathbf{c}). \tag{4.16}$$

Отсюда и по определению $\sigma_k(\mathbf{c})$ из (3.4) вытекает неравенство

$$\sigma_k(\mathbf{c}) < 1. \tag{4.17}$$

Поэтому в силу (4.15) получаем

$$c_k > 1 - \sigma_k(\mathbf{c}) > 0. \tag{4.18}$$

По (4.15) и (4.17) можем записать

$$\sigma(\alpha) = (1-\sigma_k(c))\Big(1 + \frac{\sigma_k(\mathbf{c})}{c_k}\Big) < (1-\sigma_k(\mathbf{c}))(1+\sigma_k(\mathbf{c})) = 1 - \sigma_k^2(\mathbf{c}).$$

Из (4.14) и (4.18) имеем $\sigma(\alpha) < 1$, т.е. и в этом случае получаем $\alpha \in \mathbf{C}_{<1}$.

Для доказательства утверждения 2 заметим, что справедливы следующие утверждения:

1) для любого $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{>1}$ выполняется неравенство $c_k = \max(\mathbf{c}) > \frac{1}{D}$ и, следовательно, по (4.12)

$$0 < 1 - t_c = \frac{\sigma(\mathbf{c}) - 1}{c_k} < \frac{\sigma(\mathbf{c}) - 1}{D} < \sigma(\mathbf{c}) - 1; \tag{4.19}$$

2) для любого $\mathbf{c}' \in \mathbf{C}_1$ существует $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{>1}$, достаточно близкое к $\mathbf{c}'$;

3) из (4.19) и 2) следует, что вектор $\alpha = \lambda_c \mathbf{c}$, принадлежащий $\mathbf{C}_{<1}$, также достаточно близкий к вектору $\mathbf{c}'$.

Отсюда и условия, что векторы α имеют вид $\alpha = \lambda \mathbf{c}$, $0 < \lambda < \lambda_c$, вытекает утверждение 2 леммы 4.2. $\square$

Зададим перекладывание

$$\mathcal{S}_v(\mathcal{C}^-_{\mathbf{c},\lambda}) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{S}_v(\mathcal{P}^{-c}_0) \cup \mathcal{S}_v(\mathcal{P}^{-c}_1) \cup \ldots \cup \mathcal{S}_v(\mathcal{P}^{-c}_D) \tag{4.20}$$

вытянутого параллелотопа с разбиением (4.10), где $\mathcal{S}_v(\mathcal{P}^{-c}_k) = \mathcal{P}^{-c}_k[v_k] = \mathcal{P}^{-c}_k + v_k$ — параллельный сдвиг многогранника $\mathcal{P}^{-c}_k$ на вектор v_k, определенный равенствами (4.4). Перекладывание $\mathcal{S}_v$ индуцирует многозначное отображение $S_v : \mathrm{Str}_{\mathbf{c}}(\mathcal{C}^-) \to \mathbb{R}^D$, определяемое условиями $x \mapsto S_v(x) = x + v_k$, если $x \in \mathcal{P}^{-c}_k$.

Из [12, предложение 2.1] вытекает

Предложение 4.2. *Зеркально-вытянутый параллелотоп* $\mathcal{C}^-_{\mathbf{c},\lambda} = \mathrm{Str}^-_{\mathbf{c}}(\mathcal{C}^-)$ *замкнут* $\mathcal{S}_v(\mathcal{C}^-_{\mathbf{c},\lambda}) \subseteq \mathcal{C}^-_{\mathbf{c},\lambda}$ *относительно операции перекладывания* (4.20).

Формально перекладывания вытянутых параллелотопов (4.3) и (4.20) задаются через параллельные сдвиги на одни и те же векторы v_k из (4.4). Поэтому многозначное отображение S_v становится однозначным и на зеркально-вытянутом параллелотопе $S_v : \mathcal{C}^-_{\mathbf{c}} \longrightarrow \mathcal{C}^-_{\mathbf{c}}$, если отображение S_v рассмотреть по $\mathrm{mod}\,\mathbb{Z}^D$, и данное отображение также согласовано со сдвигом тора S_α, определенным в (4.7), через коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{C}^-_{\mathbf{c}} & \xrightarrow{S_v} & \mathcal{C}^-_{\mathbf{c}} & \\ \mathrm{mod}\,\mathbb{Z}^D & \downarrow & & \downarrow & \mathrm{mod}\,\mathbb{Z}^D \\ & \mathbb{T}^D & \xrightarrow{S_\alpha} & \mathbb{T}^D & \end{array} \tag{4.21}$$

§5. Перекладывающиеся торические развертки

5.1. Определение перекладывающихся торических разверток. Подмножество $T^D \subset \mathbb{R}^D$ назовем *перекладывающейся торической разверткой*, если оно удовлетворяет следующим условиям.

1) Множество T^D ограниченно.

2) Задано разбиение

$$T^D = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \cdots \sqcup T_D \tag{5.1}$$

на непересекающиеся множества T_k.

3) С помощью разбиения (5.1) и некоторой фиксированной системы векторов $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ из $\mathbb{R}^D$ задано перекладывание $\mathcal{S}_v(T^D) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{S}_v(T_0) \cup \mathcal{S}_v(T_1) \cup \cdots \cup \mathcal{S}_v(T_D)$, где $\mathcal{S}_v(T_k) = T_k[v_k]$.

4) Множество T^D замкнуто относительно перекладывания $\mathcal{S}_v$, т.е. выполняется включение $\mathcal{S}_v(T^D) \subseteq T^D$.

5) Отображение факторизации

$$T^D \overset{\mathrm{mod}\,L_v}{\overrightarrow{\sim}} \mathbb{T}^D_v : \quad x \mapsto x \,\mathtt{mod}\, L_v \tag{5.2}$$

задает биекцию между T^D и тором $\mathbb{T}_v^D \simeq \mathbb{R}^D/L_v$, где $L_v = \mathbb{Z}[l_1, \ldots, l_D]$ — полная решетка из $\mathbb{R}^D$ с базисом $l_k = v_k - v_0$ для $k = 1, \ldots, D$.

6) Коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & T^D & \overset{\operatorname{mod} L_v}{\overrightarrow{\sim}} & \mathbb{T}_v^D & \\ S_v & \downarrow & & \downarrow & S_\alpha \\ & T^D & \overset{\operatorname{mod} L_v}{\overrightarrow{\sim}} & \mathbb{T}_v^D & \end{array} \tag{5.3}$$

где S_v — отображение $S_v(x) = x + v_k$, если $x \in T_k$, индуцированное перекладыванием $\mathcal{S}_v$, и $S_\alpha(x) = x + \alpha \operatorname{mod} L_v$ — сдвиг тора $\mathbb{T}_v^D$ на вектор $\alpha \equiv v_0 \operatorname{mod} L_v$.

5.2. Построение перекладывающихся торических разверток. Случай $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leqslant 1}$. Чтобы построить для вытянутого параллелотопа $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}^+$ с разбиением (4.2) соответствующую ему перекладывающуюся торическую развертку $T_{\mathbf{c},\lambda}^+ \subset \mathbb{R}^D$, нам потребуется следующий алгоритм, определяющий индекс $i(x)$ точек $x \in \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}^+$ в случае *иррационального* сдвига $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_D)$, когда числа

$$1, \alpha_1, \ldots, \alpha_D \ \textit{линейно независимы над} \ \mathbb{Z}. \tag{5.4}$$

Перекладывание $\mathcal{S}_v$ из п. 5.1 называется *иррациональным*, если у соответствующего (5.3) сдвига тора S_α вектор α будет иррациональным.

Важность понятия иррационального сдвига состоит в том, что, как хорошо известно [8], только при выполнении условия (5.4) орбита любой точки относительно сдвига S_α всюду плотно заполняет весь тор $\mathbb{T}^D$.

***i*-Алгоритм. Шаг 1.** Для точки $x \in \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}^{+\mathrm{int}}$ полагаем

$$i(x) = k, \ \text{где} \ k \text{ — наименьший номер с условием } x \in \mathcal{P}_k^{+c}. \tag{5.5}$$

Тем самым мы определили индексы $i(x)$ для всех внутренних точек x из $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}^+$. Как следствие отсюда вытекает, что отображение перекладывания S_v однозначно определено на $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}^{+\mathrm{int}}$.

Шаг 2. Пусть точка x принадлежит границе $\partial\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}^+$ многогранника $\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}^+$ и пусть существует точка $x' \in \mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}^{+\mathrm{int}}$ с условием

$$S_v(x') = x. \tag{5.6}$$

Тогда индекс $i(x)$ также определяем по правилу (5.5).

Шаг 3. Пусть $x_1 = x$ — та же самая точка, что была на шаге 2. Так как индекс точки x_1 уже определен, то однозначно определен ее образ $x_2 = S_v(x_1)$. Если $x_2 \in \partial\mathcal{C}_{\mathbf{c},\lambda}^+$, то приписываем ей индекс $i(x_2)$ по правилу

(5.5). Затем рассматриваем точку $x_3 = S_v(x_2)$ и т.д. Если на каком-то шаге окажется $x_j = S_v(x_{j-1})$ внутренней точкой $\mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda}$, то для нее индекс $i(x_j)$ уже был определен на шаге 1.

Шаг 4. Пусть точка $y \in \partial\mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda}$ не удовлетворяет условию (5.6) и не попадает ни в какую S_v-орбиту точек $x \in \partial\mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda}$ с условием (5.6). Таким точкам припишем индекс $i(y) = -1$.

Из i-алгоритма вытекает, что любая точка x из вытянутого параллелотопа $\mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda}$ имеет однозначно определенный *индекс* $i(x) = -1, 0, 1, \ldots, D$.

Используя индекс $i(x)$, определим следующие множества

$$\mathcal{P}^+_k = \{x \in \mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda}; i(x) = k\} \tag{5.7}$$

для $k = 0, 1, \ldots, D$. Из однозначности индекса $i(x)$ следует $\mathcal{P}^+_{k_1} \cap \mathcal{P}^+_{k_2} = \emptyset$ с номерами $k_1 \neq k_2$.

Теорема 5.1. *В случае иррационального сдвига α множество*

$$T^{+D}_{\mathbf{c},\lambda} = \mathcal{P}^+_0 \sqcup \mathcal{P}^+_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{P}^+_D \tag{5.8}$$

является перекладывающейся торической разверткой из $\mathbb{R}^D$.

Доказательство вытекает из предложения 4.2 и [12, теорема 1.2]. □

Итак, мы доказали, что любому вытянутому параллелотопу $\mathcal{C}^+_{\mathbf{c}}$ с разбиением $\mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda}$ из (4.2) i-алгоритм ставит в соответствие

$$\mathcal{C}^+_{\mathbf{c}} \;\Rightarrow\; \mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda} \;\Rightarrow\; T(\mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda}) = T^{+D}_{\mathbf{c},\lambda} \tag{5.9}$$

перекладывающуюся торическую развертку $T^{+D}_{\mathbf{c},\lambda} \subset \mathcal{C}^+_{\mathbf{c}}$ с разбиением (5.8). Ее роль состоит в том, что посредством биекции (5.2) она задает разбиение тора

$$\mathbb{T}^{+D}_{\mathbf{c},\lambda} = \mathbb{T}^{+D}_0 \sqcup \mathbb{T}^{+D}_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{T}^{+D}_D \tag{5.10}$$

на множества $\mathbb{T}^{+D}_k = \mathcal{P}^+_k \bmod \mathbb{Z}^D$ ограниченного остатка [12]. Тор с разбиением (5.10) будем обозначать

$$\mathbb{T}^{+D}_{\mathbf{c},\lambda} = \mathbb{T}(T^{+D}_{\mathbf{c},\lambda}). \tag{5.11}$$

Сдвиг $S_\alpha : \mathbb{T}^D \xrightarrow{\sim} \mathbb{T}^D$ является автоморфизмом тора. Поэтому он задает перекладывание на множестве (5.10), обладающее свойством $S_\alpha(\mathbb{T}^{+D}_{\mathbf{c},\lambda}) = \mathbb{T}^{+D}_{\mathbf{c},\lambda}$, где $S_\alpha(\mathbb{T}^{+D}_{\mathbf{c},\lambda}) = S_\alpha(\mathbb{T}^{+D}_0) \sqcup S_\alpha(\mathbb{T}^{+D}_1) \sqcup \ldots \sqcup S_\alpha(\mathbb{T}^{+D}_D)$ — разбиение. Из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} & T^{+D}_{c,\lambda} & \overset{\mathrm{mod}\,\mathbb{Z}^D}{\overrightarrow{\sim}} & \mathbb{T}^{+D}_{c,\lambda} & \\ S_v & \downarrow & & \downarrow & S_\alpha \\ & T^{+D}_{c,\lambda} & \overset{\mathrm{mod}\,\mathbb{Z}^D}{\overrightarrow{\sim}} & \mathbb{T}^{+D}_{c,\lambda} & \end{array} \tag{5.12}$$

следует, что $S_v : T^{+D}_{c,\lambda} \overrightarrow{\sim} T^{+D}_{c,\lambda}$ — биективное отображение. Следовательно, перекладывание $\mathcal{S}_v$ развертки $T^{+D}_{c,\lambda}$ обладает свойствами

$$\mathcal{S}_v(T^{+D}_{\mathbf{c},\lambda}) = T^{+D}_{\mathbf{c},\lambda}, \tag{5.13}$$

где

$$\mathcal{S}_v(T^{+D}_{\mathbf{c},\lambda}) = \mathcal{S}_v(\mathcal{P}^+_0) \sqcup \mathcal{S}_v(\mathcal{P}^+_1) \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{S}_v(\mathcal{P}^+_D) \tag{5.14}$$

— разбиение. Таким образом, перекладывающаяся торическая развертка $T^{+D}_{\mathbf{c},\lambda}$ действительно является перекладывающимся множеством относительно операции (5.14). Рассматривая замыкание всех множеств из разбиения (5.17) развертки $T^{+D}_{\mathbf{c},\lambda}$, получаем снова разбиение (4.2) вытянутого параллелотопа $\mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda}$. Отсюда и (5.13), (5.14) вытекает равенство

$$\mathcal{S}_v(\mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda}) = \mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda}, \tag{5.15}$$

где $\mathcal{S}_v(\mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda}) = \mathcal{S}_v(\mathcal{P}^{+c}_0) \cup \mathcal{S}_v(\mathcal{P}^{+c}_1) \cup \ldots \cup \mathcal{S}_v(\mathcal{P}^{+c}_D)$ — разбиение.

Из последовательности выполненных шагов (2.5), (5.9) и (5.10) складывается следующий алгоритм построения разбиений тора $\mathbb{T}^{+D}_{\mathbf{c},\lambda}$.

Общая схема для зеркально-вытянутого параллелотопа $\mathcal{C}^+_{\mathbf{c}}$

$$\mathcal{C}^+ \;\Rightarrow\; \mathcal{C}^+_{\mathbf{c}} \;\Rightarrow\; \mathcal{C}^+_{\mathbf{c},\lambda} \;\Rightarrow\; T^{+D}_{\mathbf{c},\lambda} \;\Rightarrow\; \mathbb{T}^{+D}_{\mathbf{c},\lambda}. \tag{5.16}$$

5.3. Построение перекладывающихся торических разверток. Случай $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{>1}$. Для зеркально-вытянутого параллелотопа $\mathcal{C}^-_c$ в случае иррационального α имеем следующую схему, аналогичную схеме (5.16).

Общая схема для зеркально-вытянутого параллелотопа $\mathcal{C}^-_{\mathbf{c}}$

$$\mathcal{C}^- \;\Rightarrow\; \mathcal{C}^-_{\mathbf{c}} \;\Rightarrow\; \mathcal{C}^-_{\mathbf{c},\lambda} \;\Rightarrow\; T^{-D}_{\mathbf{c},\lambda} \;\Rightarrow\; \mathbb{T}^{-D}_{\mathbf{c},\lambda}. \tag{5.17}$$

Здесь $T^{-D}_{\mathbf{c},\lambda} = \mathcal{P}^-_0 \sqcup \mathcal{P}^-_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{P}^-_D$ — перекладывающаяся торическая развертка с разбиением на множества $\mathcal{P}^-_k = \{x \in \mathcal{C}^-_{\mathbf{c},\lambda}; i(x) = k\}$ для $k = 0, 1, \ldots, D$, где $i(x)$ — индекс точки x, вычисленный по i-алгоритму п. 5.2, примененному к перекладывающемуся зеркально-вытянутому параллелотопу $\mathcal{C}^{-}_{\mathbf{c},\lambda}$, определенному в (4.10);

$$\mathbb{T}^{-D}_{\mathbf{c},\lambda} = \mathbb{T}^{-D}_{0} \sqcup \mathbb{T}^{-D}_{1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}^{-D}_{D} \tag{5.18}$$

— разбиение тора на множества $\mathbb{T}^{-D}_{k} = \mathcal{P}^{-}_{k} \bmod \mathbb{Z}^D$, являющиеся в силу [12] множествами ограниченного остатка. Аналогично (5.12) также имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{cccc} & T^{-D}_{\mathbf{c},\lambda} & \overset{\operatorname{mod}\mathbb{Z}^D}{\xrightarrow{\sim}} & \mathbb{T}^{-D}_{\mathbf{c},\lambda} & \\ S_v & \downarrow & & \downarrow & S_\alpha \\ & T^{-D}_{\mathbf{c},\lambda} & \overset{\operatorname{mod}\mathbb{Z}^D}{\xrightarrow{\sim}} & \mathbb{T}^{-D}_{\mathbf{c},\lambda} & \end{array} \tag{5.19}$$

§6. Распределение точек орбит на торах

6.1. Торические развертки и множества ограниченного остатка. Пусть $T^{D}_{\mathbf{c},\lambda}$ — одна из перекладывающихся торических разверток $T^{+D}_{\mathbf{c},\lambda}$ или $T^{-D}_{\mathbf{c},\lambda}$ и пусть она имеет разбиение

$$T^{D}_{\mathbf{c},\lambda} = \mathcal{P}_0 \sqcup \mathcal{P}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{P}_D \tag{6.1}$$

с заданным на ней иррациональным перекладыванием $\mathcal{S}_v$ (см. определение п. 5.2). Указанной развертке $T^{D}_{\mathbf{c},\lambda}$ ввиду (5.11) соответствует разбиение тора

$$\mathbb{T}^{D}_{\mathbf{c},\lambda} = \mathbb{T}^{D}_{0} \sqcup \mathbb{T}^{D}_{1} \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}^{D}_{D} \tag{6.2}$$

на множества $\mathbb{T}^{D}_{k} = \mathcal{P}_k \bmod \mathbb{Z}^D$, на котором определен сдвиг $S_\alpha(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathbb{Z}^D$.

Введем обозначение

$$\beta = \alpha_n(l) = \frac{1}{n}(\alpha + l), \tag{6.3}$$

при этом n — произвольное натуральное число и $l \in \mathbb{Z}^D$ — целый вектор. Определим считающую функцию

$$\mathbf{r}_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}^{D}_{\mathbf{c},\lambda}) = \sharp\{j; S^{j}_{\beta}(x_0) \in \mathbb{T}^{D}_{k}; 0 \leqslant j < i\}, \tag{6.4}$$

где S_β — сдвиг тора $S_\beta(x) \equiv x + \beta \bmod \mathbb{Z}^D$ на вектор β, определенный равенством (6.3), и x_0 — произвольная начальная точка на торе $\mathbb{T}^D$. Обозначим

$$\delta_k(i; \gamma, x_0, \mathbb{T}^{D}_{\mathbf{c},\lambda}) = \mathbf{r}_k(i; \gamma, x_0, \mathbb{T}^{D}_{\mathbf{c},\lambda}) - i a_k(\mathbb{T}^{D}_{\mathbf{c},\lambda}) \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, D \tag{6.5}$$

— *отклонение* распределения точек орбиты $\mathrm{Orb}(S_\beta, x_0) = \{S_\beta^j(x_0); j = 0,1,2,\ldots\}$ относительно области $\mathbb{T}_k^D$ на торе $\mathbb{T}^D$, где $a_k(\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D) = \mathrm{vol}\,\mathbb{T}_k^D$.

Теорема 6.1 (многомерная теорема Гекке). *Пусть* $\mathbf{c} \in \mathbf{C}$, $\alpha = \lambda\mathbf{c}$, *где* $0 < \lambda < \lambda_c$ *и* λ_c *определено условиями*

$$\lambda_c = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leqslant 1}, \\ 1 - \frac{\sigma(\mathbf{c})-1}{\max(\mathbf{c})}, & \text{если } \mathbf{c} \in \mathbf{C}_{>1}, \end{cases} \tag{6.6}$$

и пусть, кроме того, S_α *— иррациональный сдвиг тора. Тогда при любом* $k = 0, 1, \ldots, D$ *коэффициенты* $a_k(\mathbb{T}_{c,\lambda}^D)$ *из* (6.5) *вычисляются по формуле*

$$a_k(\mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D) = \begin{cases} \alpha_k & \text{для } k = 1, \ldots, D, \\ 1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_D & \text{для } k = 0, \end{cases} \tag{6.7}$$

и для отклонений (6.5) *выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i; \gamma, x_0, \mathbb{T}_{\mathbf{c},\lambda}^D)| \leqslant c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c})n \tag{6.8}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ *Константы* $c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c})$ *вычисляются по формуле*

$$c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c}) = \max_{v \in V(\mathcal{C}_\mathbf{c})} \mathbf{e}_k \cdot v - \min_{v \in V(\mathcal{C}_\mathbf{c})} \mathbf{e}_k \cdot v, \tag{6.9}$$

где $\mathbf{e}_k$ *— единичные векторы для* $k = 1, \ldots, D$ *и* $\mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_1 - \cdots - \mathbf{e}_D$. *Здесь в* (6.9) *через* $V(\mathcal{C}_\mathbf{c})$ *обозначено множество вершин вытянутого параллелотопа* $\mathcal{C}_c$. *Таким образом, константы* $c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c})$ *в неравенстве* (6.8) *не зависят от выбора множителя* λ *в определении* (6.3) *вектора сдвига* β.

Доказательство. Формула (6.7) вытекает из формулы (2.4) и [12, теорема 4.1] в случае вытянутого параллелотопа $\mathcal{C}_\mathbf{c}^+$ и формулы (2.9) и [12, теорема 4.2] в случае зеркально-вытянутого параллелотопа $\mathcal{C}_\mathbf{c}^-$. Неравенство (6.8) получается как частный случай теоремы 5.1 из [11]. □

Вычислим константы $c_k(\mathcal{C}_\mathbf{c})$ из (6.8), рассматривая отдельно случаи $\mathcal{C}_\mathbf{c} = \mathcal{C}_\mathbf{c}^+$ и $\mathcal{C}_\mathbf{c} = \mathcal{C}_\mathbf{c}^-$.

6.2. Вытянутые параллелотопы $\mathcal{C}_\mathbf{c}^+$. Пусть $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_n)$ — мультииндекс, где $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_n \leqslant D$, $n = 1, \ldots, D$. Положим $|\mathbf{j}| = n$. С помощью мультииндексов $\mathbf{j}$ вершины $V(C^+)$ единичного куба C^+ можно сокращенно записать в виде

$$\mathbf{e}_{\mathbf{j}_0}, \quad \mathbf{e}_\mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{j}_D}. \tag{6.10}$$

Здесь полагаем $\mathbf{e}_{\mathbf{j}_0} = 0$ для $|\mathbf{j}_0| = 0$, $\mathbf{e}_\mathbf{j} = \mathbf{e}_{j_1} + \cdots + \mathbf{e}_{j_n}$ для $0 < |\mathbf{j}| < D$, $\mathbf{e}_{\mathbf{j}_D} = \mathbf{e}_1 + \cdots + \mathbf{e}_D$ для $|\mathbf{j}_D| = D$. Вершины $V(C_\mathbf{s}^+)$ вытянутого куба $C_\mathbf{s}^+$ запишутся соответственно в виде

$$\mathbf{e}_{\mathbf{j}_0}, \quad \mathbf{e}_\mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{j},s} = \mathbf{e}_\mathbf{j} + s, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{j}_D,s} = \mathbf{e}_{\mathbf{j}_D} + s. \tag{6.11}$$

Пусть $M_{\mathbf{c}}^+$ — линейное отображение (2.1) и L_s^+ — решетка, определенная в (1.3). Согласно (2.3) записываем $M_{\mathbf{s}}^+(\mathbf{s}) = \mathbf{c}$, и тогда имеем

$$M_s^+(\mathbf{e_j}) = \mathbf{e_j} - |\mathbf{j}|\mathbf{c} \ \text{ для любого } \ |\mathbf{j}| = 0, 1, \ldots, D. \tag{6.12}$$

Отсюда получаем равенства

$$M_s^+(\mathbf{e}_{\mathbf{j},s}) = \mathbf{e_j} - (|\mathbf{j}| - 1)\mathbf{c} \ \text{ для любого } \ |\mathbf{j}| = 1, \ldots, D. \tag{6.13}$$

Принимая во внимание (6.11)–(6.13), видим, что множество вершин $V(\mathcal{C}_c^+) = M_s V(C_s^{+D})$ вытянутого параллелотопа $\mathcal{C}_c^+$ состоит из следующих вершин:

$$\mathbf{e}_{\mathbf{j}_0}, \quad \mathbf{e_j} - |\mathbf{j}|\mathbf{c}, \quad \mathbf{e_j} - |\mathbf{j}|\mathbf{c} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{j}_D} - D\mathbf{c} + \mathbf{c}, \tag{6.14}$$

где $1 \leqslant |\mathbf{j}| \leqslant D - 1$.

Найдем максимальное и минимальное значения скалярных произведений $\mathbf{e}_k \cdot v$ для $v \in V(\mathcal{C}_c^+)$ на единичные векторы $\mathbf{e}_k$ для всех вершин $k = 1, \ldots, D$ и на вектор $\mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_1 - \ldots - \mathbf{e}_D$ для $k = 0$.

Случай $k = 1, \ldots, D$**.** Имеем

для $|\mathbf{j}| = 0$:

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{j}_0} = 0; \tag{6.15}$$

для $1 \leqslant |\mathbf{j}| < D$:

$$\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e_j} - |\mathbf{j}|\mathbf{c}) = \delta_{k,\mathbf{j}} - |\mathbf{j}|\mathbf{c}_k,$$
$$\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e_j} - |\mathbf{j}|\mathbf{c} + \mathbf{c}) = \delta_{k,\mathbf{j}} - |\mathbf{j}|\mathbf{c}_k + \mathbf{c}_k,$$

где $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_D)$ и

$$\delta_{k,\mathbf{j}} = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in \mathbf{j}, \\ 0, & \text{если } k \notin \mathbf{j}; \end{cases} \tag{6.16}$$

для $|\mathbf{j}| = D$:

$$\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}_{\mathbf{j_D}} - D\mathbf{c} + \mathbf{c}) = 1 - (D - 1)c_k.$$

Отсюда находим экстремальные значения скалярных произведений

$$\min_{v \in V(\mathcal{C}_c^+)} \mathbf{e}_k \cdot v = -(D - 1)c_k, \qquad \max_{v \in V(\mathcal{C}_c^+)} \mathbf{e}_k \cdot v = 1. \tag{6.17}$$

Случай $k = 0$**.** Теперь соответственно имеем

для $|\mathbf{j}| = 0$:

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{j}_0} = 0; \tag{6.18}$$

для $1 \leqslant |\mathbf{j}| < D$:

$$\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e_j} - |\mathbf{j}|\mathbf{c}) = -|\mathbf{j}| - |\mathbf{j}| \, \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{c} = -|\mathbf{j}|(1 - \sigma(\mathbf{c})),$$

где $\sigma(\mathbf{c}) \leqslant 1$ в силу условия $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leqslant 1}$, и, следовательно,

$$\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e_j} - |\mathbf{j}|\mathbf{c} + \mathbf{c}) = -|\mathbf{j}|(1 - \sigma(\mathbf{c})) - \sigma(\mathbf{c}) = -1 - (|\mathbf{j}| - 1)(1 - \sigma(\mathbf{c}));$$

для $|\mathbf{j}| = D$:

$$\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}_{\mathbf{j_D}} - Ds' + s') = -1 - (D-1)(1-\sigma(\mathbf{c})).$$

Поэтому, принимая во внимание неравенство $1 - \sigma(\mathbf{c}) \geqslant 0$, в случае $k = 0$ находим экстремальные значения скалярных произведений

$$\min_{v \in V(\mathcal{C}_c^+)} \mathbf{e}_k \cdot v = -1 - (D-1)(1-\sigma(\mathbf{c})), \qquad \max_{v \in V(\mathcal{C}_c^+)} \mathbf{e}_k \cdot v = 0. \tag{6.19}$$

Теорема 6.2. *Пусть* $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leqslant 1}$, $\alpha = \lambda \mathbf{c}$, *где* $0 < \lambda < 1$, *и* S_α — *иррациональный сдвиг тора* (5.4). *Тогда для отклонений* (6.5) *выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}^D_{\mathbf{c},\lambda})| \leqslant c^+_{k,D} n \tag{6.20}$$

при любом $k = 0, 1, \ldots, D$ *для всех* $i = 0, 1, 2, \ldots$. *Константы* $c^+_{k,D} = c_k(\mathcal{C}^+_{\mathbf{c}})$ *вычисляются по формуле*

$$c^+_{k,D} = 1 + (D-1)c_k \tag{6.21}$$

для $k = 1, \ldots, D$ *и*

$$c^+_{k,D} = 1 + (D-1)(1-\sigma(\mathbf{c})) \tag{6.22}$$

для $k = 0$.

Доказательство следует из теоремы 6.1 и формул (6.17), (6.19). □

Из формул (6.21), (6.22) вытекает

Следствие 6.1. *Для константы* $\max(\mathcal{C}^+_{\mathbf{c}}) = \max_{0 \leqslant k \leqslant D} c^+_{k,D}$ *выполняется неравенство*

$$\max(\mathcal{C}^+_{\mathbf{c}}) \leqslant D \ \text{ для любого } \ \mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leqslant 1}. \tag{6.23}$$

6.3. Зеркально-вытянутые параллелотопы $\mathcal{C}^-_{\mathbf{c}}$. Снова используя мультииндексы $\mathbf{j}$ из п. 6.2, вершины $V(C^-)$ единичного куба C^-, но теперь натянутого на векторы $-\mathbf{e}_1, \ldots, -\mathbf{e}_D$, можно записать в виде

$$\mathbf{e}_{\mathbf{j}_0}, \quad -\mathbf{e}_{\mathbf{j}}, \quad -\mathbf{e}_{\mathbf{j}_D}, \tag{6.24}$$

а вершины $V(C^-_{\mathbf{s}})$ зеркально-вытянутого куба $C^-_{\mathbf{s}}$ — в виде

$$\mathbf{e}_{\mathbf{j}_0}, \quad -\mathbf{e}_{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{e}^-_{\mathbf{j},s} = \mathbf{s} - \mathbf{e}_{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{e}^-_{\mathbf{j_D},s} = \mathbf{s} - \mathbf{e}_{\mathbf{j_D}}, \tag{6.25}$$

где $|\mathbf{j}| = 1, \ldots, D-1$.

Пусть L^-_s — решетка (1.8). Тогда линейное отображение (2.7) задает изоморфизм $M^-_s : L^-_s \overset{\sim}{\longrightarrow} \mathbb{Z}^D$ решетки L^-_s и кубической решетки $\mathbb{Z}^D$, при этом $M^-_s(\mathbf{s}) = \mathbf{c}$ в силу формулы (2.8). Отсюда вытекают равенства

$$M^-_s(\mathbf{e}_{\mathbf{j}}) = |\mathbf{j}|\mathbf{c} - \mathbf{e}_{\mathbf{j}} \ \text{ для любого } \ |\mathbf{j}| = 0, 1, \ldots, D. \tag{6.26}$$

Принимая во внимание (6.25) и (6.26), видим, что множество вершин $V(\mathcal{C}_c^-) = M_s^- V(C_s^{-D})$ зеркально-вытянутого параллелотопа $\mathcal{C}_c^-$ состоит из следующих вершин:

$$\mathbf{e}_{\mathbf{j}_0}, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{j}} - |\mathbf{j}|\mathbf{c}, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{j}} - |\mathbf{j}|\mathbf{c} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{j}_D} - D\mathbf{c} + \mathbf{c}, \tag{6.27}$$

где $1 \leqslant |\mathbf{j}| \leqslant D-1$. Используя (6.27), вычислим максимальное и минимальное значения скалярных произведений $\mathbf{e}_k \cdot v$ для всех вершин $v \in V(\mathcal{C}_c^-)$.

Случай $k = 1, \ldots, D$. Имеем

для $0 \leqslant |\mathbf{j}| < D$:

$$\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}_{\mathbf{j}} - |\mathbf{j}|\mathbf{c}) = \delta_{k,\mathbf{j}} - |\mathbf{j}|c_k,$$
$$\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}_{\mathbf{j}} - |\mathbf{j}|\mathbf{c} + \mathbf{c}) = \delta_{k,\mathbf{j}} - |\mathbf{j}|c_k + c_k,$$

где $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_D)$;

для $|\mathbf{j}| = D$:

$$\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}_{\mathbf{j}_D} - D\mathbf{c} + \mathbf{c}) = 1 - Dc_k + c_k.$$

Отсюда находим следующие экстремальные значения для произведений

$$\min_{v \in V(\mathcal{C}_c^-)} \mathbf{e}_k \cdot v = -(D-1)c_k, \qquad \max_{v \in V(\mathcal{C}_c^-)} \mathbf{e}_k \cdot v = 1. \tag{6.28}$$

Случай $k = 0$. Имеем

для $|\mathbf{j}| = 0$:

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{j}_0} = 0;$$

для $1 \leqslant |\mathbf{j}| < D$:

$$\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}_{\mathbf{j}} - |\mathbf{j}|\mathbf{c}) = |\mathbf{j}|(\sigma(\mathbf{c}) - 1),$$

отсюда

$$\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}_{\mathbf{j}} - |\mathbf{j}|\mathbf{c} + \mathbf{c}) = |\mathbf{j}|(\sigma(\mathbf{c}) - 1) - \sigma(\mathbf{c});$$

для $|\mathbf{j}| = D$:

$$\mathbf{e}_k \cdot (\mathbf{e}_{\mathbf{j}_\mathbf{D}} - D\mathbf{c} + \mathbf{c}) = D(\sigma(\mathbf{c}) - 1) - \sigma(\mathbf{c}).$$

В этом случае экстремальными значениями будут

$$\min_{v \in V(\mathcal{C}_c^-)} \mathbf{e}_k \cdot v = -1, \qquad \max_{v \in V(\mathcal{C}_c^-)} \mathbf{e}_k \cdot v = (D-1)(\sigma(\mathbf{c}) - 1). \tag{6.29}$$

Теорема 6.3. *Пусть* $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{>1}$, $\alpha = \lambda\mathbf{c}$ *с коэффициентом* $0 < \lambda < \lambda_c$, *где* λ_c *определено в* (6.6), *и пусть* S_α *— иррациональный сдвиг тора. Тогда для отклонений* (6.5) *выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}^D_{c,\lambda})| \leqslant c^-_{k,D} n \tag{6.30}$$

при любом $k = 0, 1, \ldots, D$ *для всех* $i = 0, 1, 2, \ldots$ *Константы* $c^-_{k,D} = c_k(\mathcal{C}^-_c)$ *вычисляются по формуле*

$$c^-_{k,D} = 1 + (D-1)c_k \tag{6.31}$$

для $k = 1, \ldots, D$ *и*

$$c^-_{k,D} = 1 + (D-1)(\sigma(\mathbf{c}) - 1) \tag{6.32}$$

для $k = 0$.

Доказательство следует из теоремы 6.1 и формул (6.28), (6.29). □

6.4. Случай $n = 1$. Если в формуле (6.3) при выборе вектора сдвига β положить $n = 1$ и воспользоваться теоремой 6.1 из [11], то можно получить усиление оценок для отклонений δ_k в теоремах 6.2 и 6.3.

Теорема 6.4. *В условиях теоремы* 6.3 *для отклонений (6.5) выполняются точные неравенства*

$$\min_{v \in V(\mathcal{C}_c)} \mathbf{e}_k \cdot (v - x_0) \leqslant \delta_k(i; \alpha, x_0, \mathbb{T}^D_{c,\lambda}) \leqslant \max_{v \in V(\mathcal{C}_c)} \mathbf{e}_k \cdot (v - x_0) \tag{6.33}$$

при любом $k = 0, 1, \ldots, D$ *для всех* $i = 0, 1, 2, \ldots$

Выбирая подходящим образом начальную точку x_0, можно симметризовать границы неравенств (6.33) и, тем самым, уменьшить границы изменения для отклонений $|\delta_k(i; \alpha, x_0, \mathbb{T}^D_{c,\lambda})|$. С этой целью заметим, что вытянутый параллелотоп $\mathcal{C}^+_c$ является центрально симметричным многогранником. Поскольку для его вершины $0 \in V(\mathcal{C}^+_c)$ симметричной в параллелотопе $\mathcal{C}^+_c$ будет вершина $\mathbf{e}_{\mathbf{j}_D} - D\mathbf{c} + \mathbf{c} \in V(\mathcal{C}^+_c)$, то отсюда находим центр симметрии

$$\operatorname{centre}(\mathcal{C}_c) = -\frac{1}{2}(\mathbf{e}_0 + (D-1)\mathbf{c}) \tag{6.34}$$

вытянутого параллелотопа $\mathcal{C}^+_c$.

Теорема 6.5. *В условиях теоремы* 6.3 *пусть начальной точкой выбрана* $x_0 \in \mathbb{T}^D$, *удовлетворяющая сравнению* $x_0 \equiv \operatorname{centre}(\mathcal{C}_c) \operatorname{mod} \mathbb{Z}^D$, *где* $\operatorname{centre}(\mathcal{C}_c)$ — *центр симметрии* (6.34) *вытянутого параллелотопа* $\mathcal{C}_c$. *Тогда имеют место следующие утверждения.*

1. *При любом* $k = 0, 1, \ldots, D$ *для отклонений* (6.5) *выполняются точные неравенства*

$$|\delta_k(i; \beta, x_0, \mathbb{T}^D_{c,\lambda})| \leqslant \frac{1}{2} c_{k,D}\, n \tag{6.35}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ *Константы* $c_{k,D}$ *вычисляются по формулам* (6.21), (6.22) *в случае* $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\leqslant 1}$ *и* (6.31), (6.32) *в случае* $\mathbf{c} \in \mathbf{C}_{>1}$.

2. *Если* $x_0 \not\equiv \operatorname{centre}(\mathcal{C}_c) \operatorname{mod} \mathbb{Z}^D$, *то найдутся такие* k *и* i, *что неравенство* (6.35) *будет нарушено.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно воспользоваться теоремой 6.4 и заметить, что для любого $k = 0, 1, \ldots, D$ справедливы равенства

$$\mathrm{centre}(\mathcal{C}_c)_k = \frac{1}{2}\Big(\min_{v \in V(\mathcal{C}_c)} \mathbf{e}_k \cdot v + \max_{v \in V(\mathcal{C}_c)} \mathbf{e}_k \cdot v\Big).$$

Здесь $\mathrm{centre}(\mathcal{C}_c)_k$ обозначает k-координату центра симметрии $\mathrm{centre}(\mathcal{C}_c)$, если $k = 1, \ldots, D$, и произведение $\mathbf{e}_0 \cdot \mathrm{centre}(\mathcal{C}_c)$, если $k = 0$. □

§7. Модули торических разбиений

7.1. Расширение множества вытянутых параллелотопов. Далее мы будем работать с аффинными отображениями, разделяя обозначениями точки x и отвечающие им векторы $\mathbf{x}$ с началом в 0 и концом в точке x. Используя данное соглашение и сокращение (3.10), введем дополнительное обозначение для вытянутых параллелотопов

$$\mathcal{C}_c = \mathcal{C}_{\mathbf{c}} \tag{7.1}$$

и обозначим C_* множество точек, соответствующих множествам векторов $\mathbf{C}_*$, определенных в (3.5), (3.7), (3.8).

Поскольку $\mathcal{C}_c = \mathcal{C}_{c'} \Leftrightarrow c = c'$, то воспользуемся биекцией

$$c \overrightarrow{\sim} \mathcal{C}_c \tag{7.2}$$

и отождествим точку $c \in \mathrm{C}$ с отвечающим (7.2) ему вытянутым параллелотопом $\mathcal{C}_c$. Определим аффинную унимодулярную группу

$$\mathbb{A} = \{A = (M, t);\ M \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z}),\ t \in \mathbb{R}^D\} \tag{7.3}$$

с умножением

$$A \cdot A' = (M, t) \cdot (M', t') = (MM', Mt' + t). \tag{7.4}$$

Рассмотрим множество

$$\mathcal{T}_{\mathrm{str}} = \{(A, c);\ A \in \mathbb{A},\ c \in \mathbf{C}\}, \tag{7.5}$$

инвариантное относительно действия

$$\mathbb{A} \times \mathcal{T}_{\mathrm{str}} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{str}} : A' \cdot (A, c) = (A'A, c) \tag{7.6}$$

группы $\mathbb{A}$. Любой паре $(A, c) \in \mathcal{T}_{\mathrm{str}}$ поставим в соответствие

$$(A, c) \mapsto A\mathcal{C}_c \tag{7.7}$$

вытянутый параллелотоп

$$A\mathcal{C}_c = M\mathcal{C}_c + t. \tag{7.8}$$

Поскольку равенство $M \cdot \mathbb{Z}^D = \mathbb{Z}^D$ выполняется тогда и только тогда, когда $M \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$, то отсюда следует, что унимодулярная группа $\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$

является группой автоморфизмов $\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^D)$ кубической решетки $\mathbb{Z}^D$.

Из теоремы 3.1 вытекает разбиение пространства

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}^D} A\mathcal{C}_c[l]$$

на многогранники $A\mathcal{C}_c[l] = A\mathcal{C}_c + l$. Таким образом, любой паре $(A, c) \in \mathcal{T}_{\mathrm{str}}$ отвечает

$$(A, c) \overrightarrow{\sim} A\mathcal{C}_c \tag{7.9}$$

вытянутый параллелотоп $A\mathcal{C}_c$, трансляционно разбивающий пространство $\mathbb{R}^D$ относительно одной и той же трансляционной кубической решетки $\mathbb{Z}^D$.

Обозначим

$$\mathcal{C}_{\mathrm{str}} = \{A\mathcal{C}_c; (A, c) \in \mathcal{T}_{\mathrm{str}}\} \tag{7.10}$$

— множество вытянутых параллелотопов. В силу инвариантности (1.1) множества $\mathcal{T}_{\mathrm{str}}$ оно также инвариантно $\mathbb{A} \cdot \mathcal{C}_{\mathrm{str}} = \mathcal{C}_{\mathrm{str}}$ относительно действия группы $\mathbb{A}$. Ранее рассмотренные в п. 3.2 вытянутые параллелотопы из множества $\mathcal{C}_{\mathrm{str}}^{\mathrm{can}} = \{\mathcal{C}_c; c \in C\}$ будем называть *приведенными*. Они характеризуются условием $\mathcal{E} \subset V(\mathcal{C}_c)$, где $\mathcal{E} = \{0, e_1, \ldots, e_D\}$ — множество вершин единичного симплекса.

7.2. Аффинная симплициальная группа. Отождествим единичный симплекс $\mathcal{E}$ с его вершинами и рассмотрим его группу автоморфизмов

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{E}) = \{A = (M, t); M \in \mathrm{Mat}_D(\mathbb{R}), t \in \mathbb{R}^D, A\mathcal{E} = \mathcal{E}\}. \tag{7.11}$$

Так как отображение $\mathcal{E} \overset{A}{\overrightarrow{\sim}} \mathcal{E} : e \mapsto Ae$ — биекция, то из определения (7.11) следует, что $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ является подгруппой $\mathrm{Aut}(\mathcal{E}) \subset \mathbb{A}$ аффинной группы $\mathbb{A}$ конечного порядка $\sharp\mathrm{Aut}(\mathcal{E}) = (D+1)!$

Найдем *фундаментальную область*

$$F_{\triangle} = \mathrm{Aut}(\mathcal{E}) \backslash \mathbb{R}^D. \tag{7.12}$$

С этой целью введем в рассмотрение симметрическую группу S_{D+1} и определим ее действие на пространстве $\mathbb{R}^{D+1}$ в качестве линейных отображений

$$S_{D+1} \times \mathbb{R}^{D+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{D+1} : \sigma\widehat{x} = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(D+1)}),$$

где $\widehat{x} = (x_1, \ldots, x_{D+1}) \in \mathbb{R}^{D+1}$. Гиперплоскость $H \subset \mathbb{R}^{D+1}$, проходящая через точки $\widehat{e}_1 = (1, \ldots, 0), \ldots, \widehat{e}_{D+1} = (0, \ldots, 1)$ (здесь $D+1$ координата), определяется уравнением $x_1 + \cdots + x_{D+1} = 1$. Отсюда легко увидеть, что гиперплоскость H инвариантна $S_{D+1} \cdot H \subset H$ относительно действия группы S_{D+1}. В качестве ее фундаментальной области

$F^{D+1} = S_{D+1}\backslash\mathbb{R}^{D+1}$ в пространстве $\mathbb{R}^{D+1}$ можно выбрать множество

$$F^{D+1} = \{\widehat{x} \in \mathbb{R}^{D+1}; x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_{D+1}\}. \tag{7.13}$$

Тогда фундаментальную область $F_H^{D+1} = S_{D+1}\backslash H$ группы S_{D+1} на гиперплоскости H можно представить в виде $F_H^{D+1} = H \cap F^{D+1}$, что в силу (7.13) в координатах запишется как

$$F_H^{D+1} = \{\widehat{x} \in \mathbb{R}^{D+1}; x_1 + \cdots + x_{D+1} = 1, x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_{D+1}\}. \tag{7.14}$$

Определим проекцию

$$\mathbb{R}^{D+1} \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathbb{R}^D : \widehat{x} = (x_1, \ldots, x_D, x_{D+1}) \mapsto \mathrm{pr}\,\widehat{x} = x = (x_1, \ldots, x_D). \tag{7.15}$$

Для любой подстановки $\sigma \in S_{D+1}$ выполняется формула коммутирования

$$\mathrm{pr}\,\sigma\widehat{x} = A\,\mathrm{pr}\,\widehat{x}, \tag{7.16}$$

где A — однозначно определенный элемент из группы $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$. Сравнивая порядки групп S_{D+1} и $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$, видим, что индуцируемое коммутационным соотношением (7.16) отображение

$$S_{D+1} \overrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$$

— изоморфизм.

Предложение 7.1. *Фундаментальная область* $F_\triangle$ (7.12) *имеет вид*

$$F_\triangle = \{x \in \mathbb{R}^D; x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_D \geqslant 1 - x_1 - \ldots - x_D\}. \tag{7.17}$$

Доказательство. Для проекции pr существует обратное отображение

$$\mathbb{R}^D \xrightarrow{\mathrm{pr}^{-1}} H : x = (x_1, \ldots, x_D) \mapsto \widehat{x} = (x_1, \ldots, x_D, 1 - x_1 - \ldots - x_D) \tag{7.18}$$

на гиперплоскость H, и, значит, $\mathrm{pr} : H \overrightarrow{\sim} \mathbb{R}^D$ — биекция. Из (7.14), (7.15), и (7.18) следует (7.17). □

7.3. Действие группы $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ **на вытянутые параллелотопы.** В определениях (1.1) и (1.4) вытянутых параллелотопов $\mathcal{C}_c$ присутствует симплекс $\mathcal{E}$. Запишем это обстоятельство в более явном виде

$$\mathcal{C}_c = \mathcal{C}(c; x_0, x_1, \ldots, x_D), \tag{7.19}$$

где c — центр, $x_0 = 0, x_1 = e_1, \ldots, x_D = e_D$ — вершины симплекса $\mathcal{E}$. Запись вытянутых параллелотопов $\mathcal{C}_c$ в виде (7.19) указывает на свойство симметрии точек симплекса

$$\mathcal{C}(c; x_0, x_1, \ldots, x_D) = \mathcal{C}(c; x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(D)}) \tag{7.20}$$

относительно любой подстановки σ из симметрической группы S_{D+1}. Здесь в (7.19) определения (1.1) и (1.4) для вытянутого параллелотопа

$\mathcal{C}(c; x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(D)})$ модифицируются следующим образом: 1) за начальную точку выбирается $x_{\sigma(0)}$, и векторы $\mathbf{e}_k$ заменяются на векторы $\mathbf{e}_{\sigma(k)}$ с началом $x_{\sigma(0)}$ и концом $x_{\sigma(k)}$; 2) вектор сдвига $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$ заменяется на вектор $\mathbf{c}_{\sigma(0)}$ с началом в точке $x_{\sigma(0)}$ и концом c. Таким образом, из (7.20) следует, что вытянутый параллелотоп

$$\mathcal{C}_c = \mathcal{C}(c; x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(D)})$$

не зависит от выбора порядка вершин симплекса $\mathcal{E}=\{x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(D)}\}$. Заметим, что

$$\mathbb{Z}^D = \mathbb{Z}[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_D] = \mathbb{Z}[\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma(D)}],$$

т.е. векторы $\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma(D)}$ образуют базис кубической решетки $\mathbb{Z}^D$.

Предложение 7.2. *В обозначениях* (7.19) *имеет место соотношение*

$$A\mathcal{C}_c = \mathcal{C}_{Ac} \ \ \textit{для любого} \ \ A \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E}). \tag{7.21}$$

Доказательство. По определению (7.19) можем записать

$$A\mathcal{C}_c = A\mathcal{C}(c; x_0, x_1, \ldots, x_D) = \mathcal{C}(Ac; x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(D)}),$$

где σ — подстановка (7.16), отвечающая симметрии A. Далее по (7.20) получаем

$$\mathcal{C}(Ac; x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(D)}) = \mathcal{C}(Ac; x_0, x_1, \ldots, x_D) = \mathcal{C}_{Ac}.$$

Откуда следует равенство (7.21). □

Следствие 7.1. *Для любого* $A \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ *выполняется эквивалентность*

$$\mathcal{C}_{c'} = A\mathcal{C}_c \Leftrightarrow c' = Ac.$$

Доказательство. Импликация „$\Leftarrow$“ вытекает из (7.21). Обратно, по (7.21) имеем $A\mathcal{C}_c = \mathcal{C}_{Ac}$. Отсюда и условия $\mathcal{C}_{c'} = A\mathcal{C}_c$ выводим равенство $\mathcal{C}_{c'} = \mathcal{C}_{Ac}$. Из определения вытянутых параллелотопов $\mathcal{C}_c$ следует, что для любых $c, c' \in \mathbf{C}$ справедлива эквивалентность $\mathcal{C}_c = \mathcal{C}_{c'} \ \Leftrightarrow \ c = c'$. Отсюда и предыдущего равенства следует $c' = Ac$. □

7.4. Пространство модулей вытянутых параллелотопов.

Теорема 7.1.

1. *В качестве фундаментальной области* $\mathcal{F}_{\mathrm{str}} = \mathbb{A}\backslash\mathcal{T}_{\mathrm{str}}$ *для множества* (7.5) *вытянутых параллелотопов* $\mathcal{T}_{\mathrm{str}}$ *относительно аффинной группы* $\mathbb{A}$ *можно выбрать множество*

$$\mathcal{F}_{\mathrm{str}} = \{((E, 0), c); c \in \mathcal{M}_{\mathrm{str}}\}, \tag{7.22}$$

где $\mathcal{M}_{\rm str} = \mathbf{C} \cap F_\triangle$ *и* $F_\triangle$ *— фундаментальная область* (7.17). *Таким образом, существует биекция*

$$\mathcal{F}_{\rm str} \overrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\rm str} : ((E,0),c) \mapsto c. \tag{7.23}$$

2. *Любой вытянутый параллелотоп* $\mathcal{C}^* \in \mathcal{C}_{\rm str}$ *однозначно представим в виде*

$$\mathcal{C}^* = A\mathcal{C}_c, \ \text{где} \ A \in \mathbb{A}, c \in \mathcal{M}_{\rm str}. \tag{7.24}$$

Доказательство вытекает из предложения 7.2 и следствия 7.1. □

В силу (7.7) существует биекция

$$\mathcal{T}_{\rm str} \overrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{\rm str} \tag{7.25}$$

между множеством (7.5) пар $\mathcal{T}_{\rm str}$ и множеством (7.10) вытянутых параллелотопов $\mathcal{C}_{\rm str}$. Из (7.25) и теоремы 7.1 следует, что множество $\mathcal{M}_{\rm str}$ из (7.22) является *пространством модулей* вытянутых параллелотопов из множества $\mathcal{C}_{\rm str}$ относительно действия аффинной группы $\mathbb{A}$.

7.5. Пространство модулей вытянутых параллелотопов с разбиением. От вытянутых параллелотопов $\mathcal{C}_c$ по схемам (5.16) и (5.17) можно формально перейти к их разбиениям $\mathcal{C}_{c,\lambda}$. Поскольку $\mathcal{C}_{c,\lambda} = \mathcal{C}_{c',\lambda'} \Leftrightarrow c = c'$ и $\lambda = \lambda'$, то воспользуемся биекцией

$$(c,\lambda) \overrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{c,\lambda} \tag{7.26}$$

и отождествим пару (c,λ) с отвечающим ей вытянутым параллелотопом $\mathcal{C}_{c,\lambda}$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{T}_{\rm til} = \{(A,c,\lambda);\ A \in \mathbb{A},\ c \in \mathrm{C},\ 0 < \lambda < \lambda_c\},$$

инвариантное $\mathbb{A} \cdot \mathcal{T}_{\rm til} = \mathcal{T}_{\rm til}$ относительно действия

$$\mathbb{A} \times \mathcal{T}_{\rm til} \longrightarrow \mathcal{T}_{\rm til} : A' \cdot (A,c,\lambda) = (A'A,c,\lambda) \tag{7.27}$$

группы $\mathbb{A}$. Отождествим

$$(A,c,\lambda) \overrightarrow{\sim} A\mathcal{C}_{c,\lambda} \tag{7.28}$$

множество троек $\mathcal{T}_{\rm til}$ и множество вытянутых параллелотопов с разбиением

$$\mathcal{C}_{\rm til} = \{A\mathcal{C}_{c,\lambda}; (A,c,\lambda) \in \mathcal{T}_{\rm til}\}.$$

Ввиду (7.27), (7.28) множество $\mathcal{C}_{\rm til}$ инвариантно $\mathbb{A}\cdot\mathcal{C}_{\rm til} = \mathcal{C}_{\rm til}$ относительно действия группы $\mathbb{A}$. По аналогии с вытянутыми параллелотопами $\mathcal{C}_c \in \mathcal{C}_{\rm str}^{\rm can}$ их разбиения $\mathcal{C}_{c,\lambda}$ из множества

$$\mathcal{C}_{\rm til}^{\rm can} = \{\mathcal{C}_{c,\lambda};\ c \in C,\ 0 < \lambda < \lambda_c\}$$

также назовем *приведенными*.

Следствием теоремы 7.1 является

Теорема 7.2. *Любой вытянутый параллелотоп с разбиением $\mathcal{C}^*$ из семейства $\mathcal{C}_{\mathrm{col}}$ однозначно представляется в виде произведения*

$$\mathcal{C}^* = A\mathcal{C}_{c,\lambda}, \tag{7.29}$$

при этом $A \in \mathbb{A}$ и $(c,\lambda) \in \mathcal{M}_{\mathrm{til}}$. Здесь полагаем

$$\mathcal{M}_{\mathrm{til}} = \{(c,\lambda); c \in \mathcal{M}_{\mathrm{str}}, 0 < \lambda < \lambda_c\}, \tag{7.30}$$

где λ_c определено в (4.11) и $\mathcal{M}_{\mathrm{str}}$ — пространство модулей из (7.22), определяемое в координатах с помощью следующих $D+2$ неравенств:

$$\mathcal{M}_{\mathrm{str}}: \begin{cases} c_1 \geqslant c_2, \\ \quad\vdots \\ c_{D-1} \geqslant c_D, \\ c_D > 0, \\ c_1 + \dots + c_{D-1} + 2c_D \geqslant 1, \\ c_2 + \dots + c_D < 1. \end{cases} \tag{7.31}$$

Из биекции (7.28) и теоремы 7.2 следует, что множество $\mathcal{M}_{\mathrm{til}}$ является *пространством модулей* вытянутых параллелотопов с разбиением из множества $\mathcal{C}_{\mathrm{til}}$ относительно действия аффинной группы $\mathbb{A}$.

§8. Разбиения тора на множества ограниченного остатка

8.1. Модули торических разбиений. Определим группу

$$\overline{\mathbb{A}} = \{\overline{A} = (M,\bar{t}); M \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z}), \bar{t} \in \mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/\mathbb{Z}^D\} \tag{8.1}$$

с умножением $\overline{A}\cdot\overline{A'} = (M,\bar{t})\cdot(M',\overline{t'}) = (MM', M\overline{t'} + \bar{t} \mod \mathbb{Z}^D)$ (ср. (7.4)). Отсюда следует разложение $\overline{A} = (E,\bar{t})\cdot(M,0)$. Группа $\overline{\mathbb{A}}$ действует как группа аффинных автоморфизмов на торе

$$\mathbb{T}^D \xrightarrow[\sim]{\overline{A}} \mathbb{T}^D: \ x \mapsto \overline{A}(x) \equiv Mx + \bar{t} \mod \mathbb{Z}^D. \tag{8.2}$$

Рассмотрим множество $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{til}} = \{(\overline{A},c,\lambda); A \in \overline{\mathbb{A}}, c \in \mathrm{C}, 0 < \lambda < \lambda_c\}$, инвариантное

$$\overline{\mathbb{A}}\cdot\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{til}} = \overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{til}} \tag{8.3}$$

относительно действия (7.8) группы $\overline{\mathbb{A}}$. Отождествим

$$(\overline{A},c,\lambda) \xrightarrow{\sim} \overline{A}\mathbb{T}^D_{c,\lambda} \tag{8.4}$$

множество троек $\overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{til}}$ и множество разбиений тора $\mathbb{T}_{\mathrm{til}} = \{\overline{A}\mathbb{T}^D_{c,\lambda}; (\overline{A},c,\lambda) \in \overline{\mathcal{T}}_{\mathrm{til}}\}$. Ввиду (8.3), (8.4) множество $\mathbb{T}_{\mathrm{til}}$ инвариантно $\overline{\mathbb{A}}\cdot\mathbb{T}_{\mathrm{til}} = \mathbb{T}_{\mathrm{til}}$ относительно действия группы $\overline{\mathbb{A}}$. Рассмотренные в п. 5 разбиения тора $\mathbb{T}^D_{c,\lambda}$ из

множества
$$\mathbb{T}_{\text{til}}^{\text{can}} = \{\mathbb{T}_{c,\lambda}^D; c \in \mathrm{C}, 0 < \lambda < \lambda_c\} \tag{8.5}$$
назовем *приведенными*, а разбиения из множества $\mathbb{T}_{\text{til}}$ назовем *аффинными параллелотопными разбиениями* тора $\mathbb{T}^D$.

Из теоремы 7.2 вытекает аналогичный результат для разбиений тора из семейства $\mathbb{T}_{\text{til}}$.

Теорема 8.1. *Любое разбиение тора $\mathbb{T}^*$ из семейства $\mathbb{T}_{\text{til}}$ однозначно представляется в виде произведения*
$$\mathbb{T}^* = \overline{A}\mathbb{T}_{c,\lambda}^D, \tag{8.6}$$
где $\overline{A} \in \overline{\mathbb{A}}$ и (c, λ) из $\mathcal{M}_{\text{til}}$ — пространства модулей (7.30).

Из теоремы 8.1 следует, что множество $\mathcal{M}_{\text{til}}$ также можно рассматривать, как *пространство модулей* параллелотопных разбиений тора $\overline{A}\mathbb{T}_{c,\lambda}^D$ из семейства $\mathbb{T}_{\text{col}}$ относительно действия редуцированной аффинной группы $\overline{\mathbb{A}}$.

8.2. Эквивалентные орбиты. Пусть S_γ — произвольный сдвиг тора $\mathbb{T}^D$ и
$$\mathrm{Orb}(S_\gamma, x_0) = \{S_\gamma^n(x_0) = x_n \equiv x_0 + n\gamma \bmod \mathbb{Z}; n = 0, 1, 2, \ldots\} \tag{8.7}$$
— орбита начальной точки $x_0 \in \mathbb{T}^D$. Ее образ $\overline{A}\mathrm{Orb}(S_\gamma, x_0)$, где $\overline{A} = (M, \bar{t})$ выбран из группы $\overline{\mathbb{A}}$, состоит из точек
$$\overline{A}S_\gamma^n(x_0) = M(x_0 + n\gamma) + \bar{t} = \overline{A}x_0 + nM\gamma. \tag{8.8}$$
Отсюда следует, что образом орбиты (8.7) снова будет орбита
$$\overline{A}\mathrm{Orb}(S_\gamma, x_0) = \mathrm{Orb}(S_{M\gamma}, \overline{A}x_0) \tag{8.9}$$
с начальной точкой $\overline{A}x_0$ относительно сдвига $S_{M\gamma}$. Из (8.8) вытекает соотношение $\overline{A}S_\gamma(x) = S_{M\gamma}(\overline{A}x)$. Это означает, что выполняется формула коммутирования
$$\overline{A}S_\gamma = S_{M\gamma}\overline{A}. \tag{8.10}$$

Пусть дано разбиение тора $\mathbb{T}_{c,\lambda}^D = \mathbb{T}_0^D \sqcup \mathbb{T}_1^D \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}_D^D$ из семейства $\mathbb{T}_{\text{til}}^{\text{can}}$. Тогда любой орбите $\mathrm{Orb}(S_\gamma, x_0)$ можно поставить в соответствие *кодовое слово*
$$w(\mathrm{Orb}(S_\gamma, x_0), \mathbb{T}_{c,\lambda}^D) = k_0 k_1 \ldots k_i \ldots, \tag{8.11}$$
где буквы $k_i = k(x_i)$ берутся из алфавита $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, D\}$ и определяются условием $x_i = S_\gamma^i(x_0) \in \mathbb{T}_{k_i}^D$.

Теорема 8.2. *Для любого* $\overline{A} = (M, \overline{t})$ *из группы* $\overline{\mathbb{A}}$ *и любой начальной точки* $x_0 \in \mathbb{T}^D$ *имеет место равенство следующих кодовых слов*

$$w(\mathrm{Orb}(S_{M\gamma}, \overline{A}x_0), \overline{A}\mathbb{T}^D_{c,\lambda})) = w(\mathrm{Orb}(S_\gamma, x_0), \mathbb{T}^D_{c,\lambda}). \tag{8.12}$$

Доказательство. Поскольку $\overline{A} \in \overline{\mathbb{A}}$ есть автоморфизм (8.2) тора $\mathbb{T}^D$, непосредственно из построений вытекает равенство $w(\overline{A}\mathrm{Orb}(S_\gamma, x_0), \overline{A}\mathbb{T}^D_{c,\lambda})= w(\mathrm{Orb}(S_\gamma, x_0), \mathbb{T}^D_{c,\lambda})$. Используя формулу (8.9), отсюда получаем нужное равенство (8.12). □

8.3. Границы отклонений. Пусть даны произвольный сдвиг тора S_γ, начальная точка $x_0 \in \mathbb{T}^D$ и некоторое разбиение тора

$$\mathbb{T}^* = \mathbb{T}^D_0 \sqcup \mathbb{T}^D_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}^D_D \tag{8.13}$$

из семейства $\mathbb{T}_{\mathrm{til}}$. Для $k = 0, 1, \ldots, D$ рассмотрим (ср. (6.4) и (6.5)) *считающую функцию*

$$\mathbf{r}_k(i; \gamma, x_0, \mathbb{T}^*) = \sharp\{j; S^j_\gamma(x_0) \in \mathbb{T}^D_k; 0 \leqslant j < i\} \tag{8.14}$$

и *отклонение*

$$\delta_k(i; \gamma, x_0, \mathbb{T}^*) = \mathbf{r}_k(i; \gamma, x_0, \mathbb{T}^*) - i a_k(\mathbb{T}^*) \tag{8.15}$$

распределения точек орбиты $\mathrm{Orb}_{S_\gamma}(x_0)$ относительно области $\mathbb{T}^D_k$ на торе $\mathbb{T}^D$, где $a_k(\mathbb{T}^*) = \mathrm{vol}\, \mathbb{T}^D_k$. Для любого элемента $\overline{A} = (M, \overline{t})$ из группы $\overline{\mathbb{A}}$ образ

$$\overline{A}\mathbb{T}^* = \overline{A}\mathbb{T}^D_0 \sqcup \overline{A}\mathbb{T}^D_1 \sqcup \ldots \sqcup \overline{A}\mathbb{T}^D_D$$

разбиения (8.13) также является разбиением тора $\mathbb{T}^D$, и для него можно снова определить считающую функцию (8.14) и отклонение (8.15).

Теорема 8.3. *Пусть* $c \in \mathrm{C}$, $\alpha = \lambda c$, *где* $0 < \lambda < \lambda_c$ *и* λ_c *определено в* (6.6), S_α — *иррациональный сдвиг тора,* $\beta = \alpha_n(b)$ *определено в* (4.1), *и пусть, кроме того,* $\overline{A}\mathbb{T}^D_{c,\lambda}$ — *разбиение тора из семейства* $\mathbb{T}_{\mathrm{til}}$, *полученного с помощью* $\overline{A} = (M, \overline{t})$ *из группы* $\overline{\mathbb{A}}$ *и вытянутого параллелотопа* $\mathcal{C}_c$. *Тогда при любом* $k = 0, 1, \ldots, D$ *для отклонений* (8.15) *выполняются неравенства*

$$|\delta_k(i; M\beta, x_0, \overline{A}\mathbb{T}^D_{c,\lambda})| \leqslant c_{k,D}\, n \tag{8.16}$$

для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ *Константы* $c_{k,D}$ *в неравенстве* (8.16) *вычисляются по формулам* (6.21), (6.22) *для* $c \in \mathrm{C}_{\leqslant 1}$ *и* (6.31), (6.32) *для* $c \in \mathrm{C}_{>1}$.

Доказательство. По теореме 8.2 записываем

$$w(\mathrm{Orb}(S_{M\beta}, x_0), \overline{A}\mathbb{T}^D_{c,\lambda})) = w(\mathrm{Orb}(S_\beta, \overline{A}^{\,-1}x_0), \mathbb{T}^D_{c,\lambda}).$$

Отсюда и (8.15) получаем равенство отклонений

$$\delta_k(i; M\beta, x_0, \overline{A}\mathbb{T}^D_{c,\lambda}) = \delta_k(i; \beta, \overline{A}^{\,-1}x_0, \mathbb{T}^D_{c,\lambda})$$

в силу равенства объемов $a_k(\overline{A}\mathbb{T}^D_{c,\lambda}) = \operatorname{vol}\overline{A}\mathbb{T}^D_k = \operatorname{vol}\mathbb{T}^D_k = a_k(\mathbb{T}^D_{c,\lambda})$, поскольку M — унимодулярная матрица по определению (7.3). Отсюда и теорем 6.2, 6.3 вытекает неравенство (8.16). $\square$

Объяснение независимости оценки (8.16) для отклонений $\delta_k(i; M\beta, x_0, \overline{A}\mathbb{T}^D_{c,\lambda}))$ от параметра $0 < \lambda < \lambda_c$ вытекает из формулы (6.9). Независимость же оценки (8.16) от выбора элемента $\overline{A}$ из группы $\overline{\mathbb{A}}$ приводит к неожиданному эффекту. Покажем его на простейшем примере.

Пример 8.1. Выберем элемент $\overline{A} \in \overline{\mathbb{A}}$ вида $\overline{A} = (M^l, 0)$, где $l = 1, 2, \dots$ и матрица $M \in \mathrm{GL_D}(\mathrm{\mathbb{Z}^D})$ имеет собственные числа $\lambda_1 > 1$, $\lambda_2 < 1, \dots, \lambda_D < 1$, являющимися числами Пизо. В этом случае для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая степень l, что в ε-окрестности любой точки на торе $\mathbb{T}^D$ содержатся точки всех $D + 1$ областей из разбиения тора $\overline{A}\mathbb{T}^D_{c,\lambda} = \overline{A}\mathbb{T}^D_0 \sqcup \overline{A}\mathbb{T}^D_1 \sqcup \dots \sqcup \overline{A}\mathbb{T}^D_D$. При этом, согласно теореме 8.3, не растут абсолютные границы изменения отклонений $\delta_k(i; M\beta, x_0, \overline{A}\mathbb{T}^D_{c,\lambda})$ для любой области $\overline{A}\mathbb{T}^D_k$.

§9. Аппроксимации разбиений тора

9.1. Подъем сдвига тора S_α. Фиксируем $\alpha \in \mathrm{C}_{\leqslant 1}$, $\alpha \neq 0$. Обозначим

$$\mathbb{T}^D_{\alpha,\lambda} = \mathbb{T}^D_{c,\lambda}, \ \text{ где } \ c = \frac{1}{\lambda}\alpha \in \mathrm{C}. \tag{9.1}$$

Определим множество разбиений тора

$$\mathbb{T}^D(\alpha, \overline{\mathbb{A}}) = \bigcup_{\substack{\overline{A}=(M,\overline{t})\in\overline{\mathbb{A}} \\ \alpha_M \in \mathrm{C}_{\leqslant 1}}} \ \bigcup_{\substack{\lambda\in(0,1] \\ \frac{1}{\lambda}\alpha_M\in \mathrm{C}}} \overline{A}\mathbb{T}^D_{\alpha_M,\lambda}, \tag{9.2}$$

где $\alpha_M = \overline{M^{-1}\alpha} \equiv M^{-1}\alpha \ \mathtt{mod}\ \mathbb{Z}^D$. Таким образом, по условию имеем $\sigma(\alpha_M) \leqslant 1$.

Теорема 9.1. *Пусть S_α — иррациональный сдвиг тора и $\mathbb{T}^D(\alpha, \overline{\mathbb{A}})$ — семейство разбиений тора (9.2). Тогда любое разбиение $\mathbb{T}^*$ из $\mathbb{T}^D(\alpha, \overline{\mathbb{A}})$ является разбиением тора $\mathbb{T}^D$ на множества ограниченного остатка относительно сдвига S_α.*

Доказательство. По определению (9.2) разбиение $\mathbb{T}^*$ имеет вид $\overline{A}\mathbb{T}^D_{\alpha_M,\lambda} = \overline{A}\mathbb{T}^D_{c_M,\lambda}$, где $\alpha_M = \lambda c_M$ и $c_M \in \mathrm{C}$. Подставляя $\gamma = \alpha_M$ в формулу (8.12), получим следующее равенство слов

$$w(\mathrm{Orb}(S_\alpha, x_0), \overline{A}\mathbb{T}^D_{c_M,\lambda})) = w(\mathrm{Orb}(S_{\alpha_M}, \overline{A}^{\,-1}x_0), \mathbb{T}^D_{c_M,\lambda}).$$

По теореме 8.3 разбиение тора $\mathbb{T}^D_{c_M,\lambda}$ яввляется разбиением на множества ограниченного остатка относительно сдвига S_{α_M}. Отсюда и последнего равенства вытекает утверждение теоремы. $\square$

9.2. Гиперболические автоморфизмы тора. Для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ из $\mathbb{R}^D_+$ рассмотрим $\mathbb{Z}$-модуль

$$\mathbb{Z}_\alpha = \mathbb{Z}[\alpha_1, \dots, \alpha_D, 1], \tag{9.3}$$

порождаемый элементами $\alpha_1, \dots, \alpha_D, 1$ над кольцом $\mathbb{Z}$. Он имеет $\mathbb{Z}$-ранг $\operatorname{rank} \mathbb{Z}_\alpha$, удовлетворяющий неравенствам $1 \leqslant \operatorname{rank} \mathbb{Z}_\alpha \leqslant D + 1$. В этих терминах вектор α будет иррациональным (5.4), если $\operatorname{rank} \mathbb{Z}_\alpha = D + 1$.

Лемма 9.1. *Пусть* $\operatorname{rank} \mathbb{Z}_\alpha \geqslant 2$ *и* M *пробегает множество матриц из унимодулярной группы* $\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ *размерности* $D \geqslant 2$. *Тогда элементы* $M^{-1}\alpha \bmod \mathbb{Z}^D$ *всюду плотно заполняют тор* $\mathbb{T}^D$.

Доказательство. В группе $\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ рассмотрим матрицы вида $M_{ij}(n) = E + nE_{ij}$ для $i \neq j$ и $n = 0, 1, 2, \dots$, где E — единичная матрица размерности D, у матрицы E_{ij} на (i, j)-месте стоит 1, а остальные элементы равны 0. Имеем $M_{ij}(n)\alpha = \alpha + n\alpha_j \mathbf{e}_i$, или иначе это можно записать в терминах сдвига тора

$$M_{ij}(n)\alpha = S^n_{\alpha_j \mathbf{e}_i}(x_0), \tag{9.4}$$

где $x_0 = \alpha$ — начальная точка. Таким образом, имеем биекцию $M_{ij}(n) \Leftrightarrow S^n_{\alpha_j \mathbf{e}_i}$. Действие в (9.4) определено через умножение матрицы $M_{ij}(n)$ на столбец из компонент $\alpha_j \mathbf{e}_i$ вектора α_j. Получаем орбиту

$$\mathrm{Orb}(S_{\alpha_j \mathbf{e}_i}, \alpha) = \{S^n_{\alpha_j \mathbf{e}_i}(\alpha); n = 0, 1, 2, \dots\} \tag{9.5}$$

с начальной точкой $x_0 = \alpha$ относительно сдвига $S_{\alpha_j \mathbf{e}_i}$ на вектор $\alpha_j \mathbf{e}_i$. Если α_j — иррациональное число, то орбита (9.5) обладает следующими свойствами:

1) она всюду плотно заполняет некоторый одномерный тор на D-мерном торе $\mathbb{T}^D$, проходящий через точку α;

2) при этом все точки орбиты (9.5), кроме, может быть, одной, имеют иррациональную i-координату, так как точка $M_{ij}(n_1)\alpha - M_{ij}(n_2)\alpha = (n_1 - n_2)\alpha_j \mathbf{e}_i$ имеет иррациональную i-координату для любых $n_1 \neq n_2$.

По условию $\operatorname{rank} \mathbb{Z}_\alpha \geqslant 2$, поэтому хотя бы одна координата у вектора α иррациональна. Пусть это будет α_1. Далее действуем следующим образом. Обозначим $\alpha^{(1)} = \alpha$.

1) Строим всюду плотную орбиту $\mathrm{Orb}_1 = \mathrm{Orb}(S_{\alpha^{(1)}_1 \mathbf{e}_2}, \alpha^{(1)})$.

2) Выбираем точки $\alpha^{(2)} \in \mathrm{Orb}_1$ с иррациональной координатой $\alpha_2^{(2)}$ и строим для каждой из них всюду плотную орбиту $\mathrm{Orb}(S_{\alpha_2^{(2)}\mathbf{e}_3}, \alpha^{(2)})$. Получаем множество Orb_2, всюду плотно заполняющее двумерный тор $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{T}^D$ из точек вида

$$(\alpha_1, x_2, x_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_D), \ \text{где} \ x_2, x_3 \in \mathbb{T}^1.$$

3) Продолжая аналогично, получаем $(D-1)$-мерный тор $\mathbb{T}^{D-1} \subset \mathbb{T}^D$ из точек вида $(\alpha_1, x_2, \ldots, x_D)$, всюду плотно заполняемого указанными точками $\alpha^{(D-1)} = (\alpha_1, x_2, \ldots, x_D)$ из множества Orb_{D-1}, у которых координаты $x_2, \ldots, x_D$ иррациональны.

4) Для любой точки $\alpha^{(D-1)}$ строим орбиту $\mathrm{Orb}(S_{x_2\mathbf{e}_1}, \alpha^{(D-1)})$ и получаем множество Orb_D, всюду плотно заполняющего весь тор $\mathbb{T}^D$.

Это доказывает лемму 9.1, так как множество Orb_D было получено умножением матриц из группы $\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ на точку α. □

9.3. Цветная аппроксимация разбиений тора. Пусть даны два произвольных разбиения $\mathbb{T}$ и $\mathbb{T}^*$ тора $\mathbb{T}^D$. Тогда по определению (8.11) парам $(\mathrm{Orb}(S_\alpha, x_0), \mathbb{T})$ и $(\mathrm{Orb}(S_{\alpha^*}, x_0^*), \mathbb{T}^*)$ можно поставить в соответствие кодовые слова $w(\mathrm{Orb}(S_\alpha, x_0), \mathbb{T})$ и $w(\mathrm{Orb}(S_{\alpha^*}, x_0^*), \mathbb{T}^*)$. Выберем произвольное натуральное число N. Если начальные буквы указанных кодовых слов совпадают

$$w_i(\mathrm{Orb}(S_\alpha, x_0), \mathbb{T}) = w_i(\mathrm{Orb}(S_{\alpha^*}, x_0^*), \mathbb{T}^*) \tag{9.6}$$

для всех номеров $i < N$, то пары $(\mathrm{Orb}(S_\alpha, x_0), \mathbb{T})$ и $(\mathrm{Orb}(S_{\alpha^*}, x_0^*), \mathbb{T}^*)$ назовем *N-согласованными.* Разбиения же $\mathbb{T}$ и $\mathbb{T}^*$, для которых найдутся сдвиги тора S_α, S_{α^*} и некоторые начальные точки x_0, x_0^* с условием (9.6) будем называть *N-согласованными разбиениями.*

Теорема 9.2 (цветная аппроксимация разбиений тора). *Пусть даны тор $\mathbb{T}^D$ размерности $D \geqslant 2$, произвольный вектор сдвига $\alpha^* \in \mathrm{C}_{<1}$ и разбиение тора $\mathbb{T}^D_{\alpha^*,\lambda^*}$ с параметром $0 < \lambda^* < 1$, удовлетворяющим условию $c^* = \frac{1}{\lambda^*}\alpha^* \in \mathrm{C}_{<1}$. Пусть, кроме того, даны произвольный иррациональный вектор сдвига α и натуральное число N. Тогда существуют разбиение тора $\mathbb{T}^D_\alpha$ из семейства разбиений $\mathbb{T}^D(\alpha, \overline{\mathbb{A}})$ и начальная точка $x_0 \in \mathbb{T}^D$ такие, что совпадают начальные буквы*

$$w_i(\mathrm{Orb}(S_\alpha, x_0^*), \mathbb{T}^D_\alpha) = w_i(\mathrm{Orb}(S_{\alpha^*}, x_0^*), \mathbb{T}^D_{\alpha^*,\lambda^*}) \tag{9.7}$$

для всех $i < N$, т.е. пары $(\mathrm{Orb}(S_\alpha, x_0^*), \mathbb{T}^D_\alpha)$ и $(\mathrm{Orb}(S_{\alpha^*}, x_0^*), \mathbb{T}^D_{\alpha^*,\lambda^*})$ являются N-согласованными.

Доказательство. По лемме 9.1 для любого $\varepsilon > 0$ существует $M \in GL_D(\mathbb{Z})$ с условием $\varrho(M^{-1}\alpha, \alpha^*) < \varepsilon$, где $\varrho(x, y) = \| x_1 - y_1 \| + \cdots + \| x_D - y_D \|$ —

метрика на торе $\mathbb{T}^D$. Здесь $\|\cdot\|$ обозначает расстояние до ближайшего целого.

Строим разбиение $\mathbb{T}^D_{c',\lambda^*}$. Для этого выбираем ε с условием, что

$$\alpha' \in \mathrm{C}_{<1}, \ \ c' = \frac{1}{\lambda^*}\alpha' \in \mathrm{C}_{<1}, \ \text{ где } \ \alpha' \equiv M^{-1}\alpha \bmod \mathbb{Z}^D.$$

Получаем еще одно разбиение $\mathbb{T}^D_\alpha = A\mathbb{T}^D_{\lambda^*,\alpha'}$, где $A=(M,0)$. Для любой начальной точки $x_0 \in \mathbb{T}^D$ имеем совпадение слов

$$w(\mathrm{Orb}(S_\alpha,x_0),\mathbb{T}^D_\alpha) = w(\mathrm{Orb}(S_{\alpha'},Ax_0),\mathbb{T}^D_{\alpha',\lambda^*}). \tag{9.8}$$

Докажем N-согласованность для разбиений $\mathbb{T}^D_{\alpha',\lambda^*}$ и $\mathbb{T}^D_{\alpha^*,\lambda^*}$. Обозначим Δ подмножество точек тора $\mathbb{T}^D$ с различной окраской относительно указанных выше разбиений и $\partial^* = \partial\,\mathbb{T}^D_{\alpha^*,\lambda^*}$ — границы областей разбиения $\mathbb{T}^D_{\alpha^*,\lambda^*}$. Пусть ∂^*_λ — окрестность границы ∂^* радиуса $\lambda = c_1\varepsilon^{1/2}$. Ее объем равен $\mathrm{vol}(\partial^*_\lambda) = c_2\lambda$. Далее c_i, $i=1,2,3,\ldots$, обозначают постоянные с условием $0 < c_{\min} \leqslant c_i \leqslant c_{\max} < +\infty$, при этом границы $c_{\min}, c_{\max}$ не зависят от ε. При достаточно малом ε окрестности ∂^*_λ удовлетворяют свойствам:

1) выполняется включение $\Delta \subset \partial^*_\lambda$;

2) если между точками x^* и x расстояние $\varrho(x^*,x) < c_3\lambda$, то они меют один и тот же цвет относительно разбиений $\mathbb{T}^D_{\alpha^*,\lambda^*}$ и $\mathbb{T}^D_{\alpha',\lambda^*}$ соответственно.

Выберем натуральное N вида

$$N = c_N\varepsilon^{-1/2}, \ \text{ где } \ c_N < \min\{c_1c_2, c_1c_3\}.$$

Для него выполняются неравенства

$$N\mathrm{vol}(\partial^*_\lambda) < 1, \quad N\varepsilon < c_3\lambda. \tag{9.9}$$

Из первого свойства (9.9) вытекает существование такой точки $x^*_0 \in \mathbb{T}^D$, что

$$x^*_i = S^i_{\alpha^*}(x^*_0) \notin \partial^*_\lambda \tag{9.10}$$

для всех $i < N$. Докажем (9.10). Пусть $X_N = \bigcup_{0\leqslant i\leqslant N-1} S^{-i}_{\alpha^*}(\partial^*_\lambda)$. Тогда из первого свойства (9.9) вытекает неравенство

$$\mathrm{vol}(X_N) \leqslant \sum_{0\leqslant i\leqslant N-1} \mathrm{vol}(S^{-i}_{\alpha^*}(\partial^*_\lambda)) = N\mathrm{vol}(\partial^*_\lambda) < 1.$$

Следовательно, существует точка $x^*_0 \in \mathbb{T}^D \backslash X_N$. Такая точка x^*_0 удовлетворяет свойству (9.10). Согласно второму неравенству из (9.9), записываем

$$w_i(\mathrm{Orb}(S_{\alpha'},x^*_0),\mathbb{T}^D_{\alpha',\lambda^*}) = w_i(\mathrm{Orb}(S_{\alpha^*},x^*_0),\mathbb{T}^D_{\alpha^*,\lambda^*}).$$

Отсюда и (9.8) выводим равенство начальных букв

$$w_i(\mathrm{Orb}(S_\alpha, x_0^*), A\mathbb{T}^D_{\alpha',\lambda^*}) = w_i(\mathrm{Orb}(S_{\alpha^*}, x_0^*), \mathbb{T}^D_{\alpha^*,\lambda^*})$$

для любого $i < N$. Так как N неограниченно возрастает при $\varepsilon \to 0$, то из последнего равенства вытекает утверждение теоремы. □

Смысл доказанной теоремы 9.2 состоит в следующем. Пусть $\alpha \in \mathrm{C}_{\leqslant 1}$ — произвольный вектор сдвига, имеющий ранг $\operatorname{rank}\mathbb{Z}_\alpha \geqslant 2$. Тогда найдется разбиение тора $\mathbb{T}^D_\alpha$ из семейства $\mathbb{T}^D(\alpha, \overline{\mathbb{A}})$, N-согласованное с любым наперед заданным разбиением $\mathbb{T}^D_{c^*,\lambda^*}$ ($c^* \in \mathrm{C}_{<1}$), где произвольное натуральное число N также наперед заданно, т.е. семейство разбиений $\mathbb{T}^D(\alpha, \overline{\mathbb{A}})$ обладает свойством цветной аппроксимации всех разбиений вида $\mathbb{T}^D_{c^*,\lambda^*}$ из семейства $\mathbb{T}^{\mathrm{can}}_{\mathrm{col}}$ разбиений тора (8.5).

Это универсальное свойство сдвигов S_α тора $\mathbb{T}^D$ исчезает в случае размерности $D = 1$, когда тор $\mathbb{T}^D$ становится единичной окружностью. Причина: при $D = 1$ унимодулярная группа $\mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ вырождается в конечную группу, состоящую из двух элементов $\{1, -1\}$. Поэтому лемма 9.1 перестает быть верной, а вместе с ней и теорема 9.2.

Замечание 9.1. Кроме большого семейства $\mathbb{T}^D(\alpha, \overline{\mathbb{A}})$, можно рассмотреть его подсемейство $\mathbb{T}^D(\alpha, H)$, где H — некоторая подгруппа из $\overline{\mathbb{A}}$. Например, $H = \langle \overline{A} \rangle$ — циклическая подгруппа, порождаемая элементом $\overline{A} = (M, 0)$ с матрицей $M \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{Z})$ такой, что орбита $M^i\alpha \bmod \mathbb{Z}^D$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, будет всюду плотна на торе $\mathbb{T}^D$.

9.4. Частотная аппроксимация разбиений тора. Пусть дано бесконечное слово $w = k_0 k_1 \ldots k_i \ldots$, записанное в алфавите $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, D\}$. Определим *частотное распределение* $\nu(w) = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_D)$ букв в слове w, полагая

$$\nu_k = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sharp\{k_i \in w; k_i = k, i < N\}, \tag{9.11}$$

если пределы в (9.11) существуют. Из определения вытекают обычные свойства частот: $\nu_k \geqslant 0$ и $\nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_D = 1$. Найдем частотное распределение $\nu(w)$ для кодового слова $w = w(\mathrm{Orb}(S_\alpha, x_0), \mathbb{T}^D_{c,\lambda})$, где $c \in \mathrm{C}_{<1}$, $\alpha = \lambda c$ и $x_0 \in \mathbb{T}^D$ — произвольная начальная точка. Имеем

$$\sharp\{k_i \in w; k_i = k, i < N\} = \mathbf{r}_k(N; \alpha, x_0, \mathbb{T}^D_{c,\lambda}).$$

Здесь справа записана счетная функция (8.14). Согласно (8.15) ее можно представить в виде суммы

$$\mathbf{r}_k(N; \alpha, x_0, \mathbb{T}^D_{c,\lambda}) = N\alpha_k + \delta_k(N; \alpha, x_0, \mathbb{T}^D_{c,\lambda}).$$

Отсюда для частот ν_k получаем аппроксимационную формулу

$$\nu_{k,N} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N}\sharp\{k_i \in w; k_i = k, i < N\} = \alpha_k + \varrho_{k,N} \tag{9.12}$$

с остатком $\varrho_{k,N} = \frac{1}{N}\delta_k(N;\alpha, x_0, \mathbb{T}^D_{c,\lambda})$, который в силу теоремы 8.3 имеет следующую оценку

$$|\varrho_{k,N}| \leqslant \frac{D}{N} \tag{9.13}$$

для любого $k = 0, 1, \ldots, D$. Таким образом, в слове $w = w(\mathrm{Orb}(S_\alpha, x_0), \mathbb{T}^D_{c,\lambda})$ буквы ввиду (9.12) имеют следующие частоты

$$\nu_k = \alpha_k \tag{9.14}$$

для $k = 0, 1, \ldots, D$. Более того, не зная происхождения слова w, а только последовательность входящих в него букв, в силу неравенства (9.13) можно оценить $|\nu_k - \nu_{k,N}| < \varepsilon$ их частоты ν_k с любой наперед заданной точностью $\varepsilon > 0$, зная лишь начало слова w длины $N = \left[\frac{D}{\varepsilon}\right] + 1$.

Теорема 9.3 (частотная аппроксимация разбиений тора). *Пусть даны произвольные иррациональный вектор сдвига α, частотное распределение $\nu = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_D)$, где $\nu \in \mathrm{C}_{<1}$, и $\varepsilon > 0$. Тогда существует разбиение тора $\mathbb{T}^D_\alpha$ из семейства разбиений $\mathbb{T}^D(\alpha, \overline{\mathbb{A}})$, определенного в* (9.2), *такое, что*

$$|\nu(w) - \nu| < \varepsilon, \tag{9.15}$$

где $|\cdot|$ — длина вектора, $\nu(w)$ — частотное распределение в слове $w = w(\mathrm{Orb}(S_\alpha, x_0), \mathbb{T}^D_\alpha)$ с любой начальной точкой $x_0 \in \mathbb{T}^D$.

Доказательство. В теореме 9.2 выбираем вектор сдвига $\alpha^* = \nu$ и находим вектор $\alpha' = M^{-1}\alpha \in \mathrm{C}_{<1}$ с условием $|\alpha' - \nu| = |\alpha' - \alpha^*| < \varepsilon$. Строим разбиение $\mathbb{T}^D_\alpha = A \cdot \mathbb{T}^D_{\alpha',\lambda^*}$ из $\mathbb{T}^D(\alpha, \overline{\mathbb{A}})$, для которого кодовое слово w имеет частотное распределение $\nu(w) = \alpha'$. Отсюда и последнего неравенства следует неравенство (9.15). □

Из свойства цветной аппроксимации семейства разбиений тора $\mathbb{T}^D(\alpha, \overline{\mathbb{A}})$ (теорема 9.2) вытекает, как следствие, свойство частотной аппроксимации (теорема 9.3). Это легко можно увидеть непосредственно из определения N-согласованности слов п. 9.3 и оценки (9.13) для остатка $\varrho_{k,N}$.

Случай размерности $D = 1$ требует отдельного обсуждения. Заметим, что случай $D = 1$ не содержится в теореме 9.3. Как отмечалось в п. 9.3, для одномерных разбиений свойство цветной аппроксимации нарушается. Свойство же частотной аппроксимации сохраняется, поскольку, подбирая

$n = 1, 2, 3, \ldots$ в разбиении окружности $\mathbb{T}^1 = [0, [n\alpha]) \sqcup [[n\alpha], 1)$, длину первого интервала можно приблизить к заданному значению. Однако с ростом n будут неограниченно расти величины отклонений распределений точек орбит для поворота окружности на угол α. Для размерностей $D \geqslant 2$ в силу теоремы 9.2 отклонения для всех разбиений тора $\mathbb{T}^D_\alpha$ из семейства $\mathbb{T}^D(\alpha)$ ограничены абсолютной константой

$$|\delta_k(i; \alpha, x_0, \mathbb{T}^D_\alpha)| \leqslant D \tag{9.16}$$

для любого $k = 0, 1, \ldots, D$.

§10. Сбалансированные слова

10.1. Размерности $D \geqslant 2$. Пусть $w = k_0 k_1 k_2 \ldots$ — конечное или бесконечное слово, записанное в алфавите $\mathcal{A}$, и κ — произвольное целое неотрицательное число. Слово w называется *κ-сбалансированным*, если у произвольных одинаковой длины факторов (подслов) u, v слова w разность вхождений любой буквы $k \in \mathcal{A}$ не превышает κ. Для определенности, и чтобы не вводить нового термина условимся считать в определении κ минимальным из всех возможных с указанным выше свойством.

Покажем, что слова $w = w(\mathrm{Orb}(S_\alpha, x_0), \mathbb{T}^D_{c,\lambda})$, порождаемые разбиениями тора $\mathbb{T}^D_{c,\lambda}$, будут κ-сбалансированными, и оценим величину κ.

Теорема 10.1. *Пусть дано $\mathbb{T}^D_{c,\lambda}$ — разбиение тора $\mathbb{T}^D$ размерности $D \geqslant 2$ с параметрами $0 < \lambda < 1$ и c, удовлетворяющим условию*

$$|c - c_{\min}| < \varepsilon_D, \tag{10.1}$$

где $c_{\min} = (\frac{1}{D+1}, \ldots, \frac{1}{D+1})$ и $\varepsilon_D > 0$ — некоторая константа, зависящая только от размерности тора D, и пусть при этом сдвиг $\alpha = \lambda c$ будет иррациональным. Тогда для любой начальной точки $x_0 \in \mathbb{T}^D$ кодовое слово $w = w(\mathrm{Orb}(S_\alpha, x_0), \mathbb{T}^D_{c,\lambda})$ является κ-сбалансированным, где

$$\kappa = \begin{cases} 2 & \text{для } D = 2, \\ 3 & \text{для } D \geqslant 3. \end{cases} \tag{10.2}$$

Таким образом, величина сбалансированности κ остается ограниченной с ростом размерности D.

Доказательство. Выберем два произвольных фактора $u = k_{i_0} \ldots k_{i_0+N}$, $v = k_{j_0} \ldots k_{j_0+N}$ слова w длины N и некоторую букву $k \in \mathcal{A}$. Имеем

$$\begin{aligned} \sharp\{k_i \in u; k_i = k\} &= \mathbf{r}_k(N; \alpha, x_{i_0}, \mathbb{T}^D_{c,\lambda}), \\ \sharp\{k_i \in v; k_i = k\} &= \mathbf{r}_k(N; \alpha, x_{j_0}, \mathbb{T}^D_{c,\lambda}), \end{aligned} \tag{10.3}$$

где справа стоят счетные функции (8.14) и $x_i = S^i(x_0)$. Используя отклонения (8.15), их можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k(N;\alpha,x_{i_0},\mathbb{T}^D_{c,\lambda}) &= N\alpha_k + \delta_k(N;\alpha,x_{i_0},\mathbb{T}^D_{c,\lambda}),\\ \mathbf{r}_k(N;\alpha,x_{j_0},\mathbb{T}^D_{c,\lambda}) &= N\alpha_k + \delta_k(N;\alpha,x_{j_0},\mathbb{T}^D_{c,\lambda}). \end{aligned} \tag{10.4}$$

Из равенств (10.3), (10.4) получаем неравенство

$$|\sharp\{k_i\in u; k_i=k\} - \sharp\{k_i\in v; k_i=k\}| \leqslant |\delta_k(N;\alpha,x_{i_0},\mathbb{T}^D_{c,\lambda})| + |\delta_k(N;\alpha,x_{j_0},\mathbb{T}^D_{c,\lambda})|.$$

Из условия (10.1) следует $c \in \mathrm{C}_{<1}$. Поэтому из последнего неравенства и теоремы 8.3 выводим неравенство

$$|\sharp\{k_i\in u; k_i=k\} - \sharp\{k_i\in v; k_i=k\}| \leqslant [2c_k(\mathcal{C}_c^+)], \tag{10.5}$$

где константы справа вычисляются по формулам $c_k(\mathcal{C}_c^+) = 1 + (D-1)c_k$ для $k = 1,\dots,D$ и $c_k(\mathcal{C}_c^+) = 1 + (D-1)(1-\sigma(c))$ для $k = 0$. С помощью функции $\max(\mathcal{C}_c^+)$, определенной в следствии 6.1, неравенства (10.5) можно переписать в более единообразном виде

$$|\sharp\{k_i\in u; k_i=k\} - \sharp\{k_i\in v; k_i=k\}| \leqslant [2\max(\mathcal{C}_c^+)] \tag{10.6}$$

для всех $k = 0,1,\dots,D$. Важность функции $\max(\mathcal{C}_c^+)$ объясняется следующим неравенством

$$\kappa \leqslant [2\max(\mathcal{C}_c^+)], \tag{10.7}$$

связывающим значение для κ с положением точки c в области $\mathrm{C}_{<1}$. Если вектор сдвига α иррациональный, то орбита $\mathrm{Orb}(S_\alpha,x_0)$ всюду плотно заполняет тор $\mathbb{T}^D$ [8], и тогда для размерностей $D \geqslant 2$, используя точные неравенства (6.33), можно показать, что в действительности связь между κ и положением точки $c \in \mathrm{C}_{<1}$ выражается формулой

$$\kappa = [2\max(\mathcal{C}_c^+)]. \tag{10.8}$$

Заметим, что точка $c_{\min} \in \mathrm{C}_{<1}$, определенная в (10.1), является единственной точкой, где функция $\max(\mathcal{C}_c^+)$ достигает своего минимума

$$\min_{c\in\mathbf{C}_{<1}} \max(\mathcal{C}_c^+) = 2 - \frac{2}{D+1}. \tag{10.9}$$

Если c удовлетворяет условию (10.1) и ε_0 достаточно малое, то из (10.9) и формулы (10.8) вытекают требуемые равенства (10.2) для κ. $\square$

В κ-сбалансированном слове $w = w(\mathrm{Orb}(S_\alpha,x_0),\mathbb{T}^D_{c,\lambda})$ из теоремы 10.1 следует, что частоты ν_k букв $k = 1,\dots,D$ равны

$$\nu_k = \frac{\lambda}{D+1} + \omega_{k,D}(\lambda), \quad \text{где } |\omega_{k,D}(\lambda)| < \lambda\varepsilon_D,$$

и, следовательно, частоты $\nu_1, \dots, \nu_D$ уравновешены. Они колеблются около значения $\frac{\lambda}{D+1}$, которое может уменьшаться от $\frac{1}{D+1}$ до 0 при изменении λ от 1 до 0. В то же время частота ν_0 буквы $k = 0$ колеблется

$$\nu_0 = 1 - \frac{\lambda D}{D+1} + \omega_{0,D}(\lambda), \text{ где } |\omega_{0,D}(\lambda)| < D\lambda\varepsilon_D$$

около значения $1 - \frac{\lambda D}{D+1}$, возрастающего от $\frac{1}{D+1}$ до 1.

Просматривается интересная асимметрия частотного распределения букв в κ-сбалансированных словах $w = w(\mathrm{Orb}(S_\alpha, x_0), \mathbb{T}^D_{c,\lambda})$ при малых значениях κ из (10.2): в слове w буквы разбиваются на две группы $\{0\}$ и $\{1, \dots, D\}$ с разным поведением частот при изменении скалярного параметра $0 < \lambda < 1$.

10.2. Размерность $D = 1$. Одномерный случай снова является критическим. В этом случае из неравенства (10.7) удается получить только верхнюю оценку $\kappa \leqslant 2$. Хотя известно, что на самом деле имеет место равенство $\kappa = 1$. Покажем, как это можно доказать нашим методом. Следуя схеме доказательства теоремы 10.1, но используя неравенства (6.33), получаем оценку

$$\kappa \leqslant [c_k(\mathcal{C}_c^+) + \mathbf{e}_k \cdot (x_{j_0} - x_{i_0})]. \tag{10.10}$$

Здесь $\mathcal{C}_c^+$ — единичный полуинтервал $[0, 1)$ для любого $0 < c < 1$, поэтому $c_k(\mathcal{C}_c^+) = 1$; $\mathbf{e}_0 = -1$, $\mathbf{e}_1 = 1$; начальные точки $x_{i_0}, x_{j_0} \in [0, 1)$ имеют вид $x_{i_0} \equiv i_0\alpha \,\mathtt{mod}\, \mathbb{Z}$, $x_{j_0} \equiv j_0\alpha \,\mathtt{mod}\, \mathbb{Z}$, где номера начальных букв i_0, j_0 в факторах $u, v \in w$ независимо пробегают значения $0, 1, 2, \dots$ Если α — иррациональное число, то $|\mathbf{e}_k \cdot (x_{j_0} - x_{i_0})| < 1$. Отсюда и (10.10) получаем ожидаемое равенство $\kappa = 1$. Такие 1-сбалансированные слова w называются словами Штурма. Они впервые были открыты Морсом и Хедлундом [5].

Список литературы

[1] Altman E., Gaujal B., Hordijk A., *Balanced sequences and optimal routing*, J. ACM **47** (2000), 752–775.

[2] Hecke E., *Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Sem. Hamburg. Univ. **1** (1921), 54–76.

[3] Heinis A., *Languages under substitutions and balanced words*, J. Théor. Nombres Bordeaux **16** (2004), no. 1, 151–172.

[4] Knuth D., *Efficient balanced codes*, IEEE Trans. Inform. Theory **32** (1986), 51–53.

[5] Morse M., Hedlund G. A., *Symbolic dynamics. II. Sturmian trajectories*, Amer J. Math. **62** (1940), 1–42.

[6] Rauzy G., *Nombres algébriques et substitutions*, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147–178.

[7] Vuillon L., *Balanced words*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **10** (2003), 787–805.

[8] Weyl H., *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Ann. **77** (1916), 313–352.

[9] Арнольд В. И., *Цепные дроби*, МЦНМО, М., 2001.

[10] Журавлев В. Г., *Разбиения Рози и множества ограниченного остатка на торе*, Зап. науч. семин. ПОМИ **322** (2005), 83–106.

[11] Журавлев В. Г., *Многомерная теорема Гекке о распределении дробных частей*, Алгебра и анализ **24** (2012), №1, 95–130.

[12] Журавлев В. Г., *Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка*, Зап. науч. семин. ПОМИ **392** (2011), 95–145.

Владимирский государственный
гуманитарный университет
600024, Владимир
пр. Строителей, 11
Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 20 декабря 2010 г.