Г. А. Дерфель, С. А. Молчанов, Спектральные методы в теории дифференциально-функциональных уравнений, *Матем. заметки*, 1990, том 47, выпуск 3, 42–51

Математические заметки

том 47 выпуск 3 март 1990

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. А. Дерфель, С. А. Молчанов

Дифференциально-функциональные уравнения с линейно преобразованным аргументом возникают в различных приложениях. Так, в известной работе В. А. Амбарцумяна [1] показано, что уравнение

$$y'(t) = ay(\alpha t) + by(t), \quad \alpha > 1, \tag{1}$$

описывает поглощение света в межзвездной среде, и проведен (небезошибочный) анализ его решений.

Ранее аналогичное уравнение, но с $\alpha < 1$ (т. е. с заменой «растяжения» на «сжатие») исследовалось К. Малером [2] в связи с задачей «о разбиении» в теории чисел. В числе других приложений упомянем также теорию динамических систем [3, 4], теорию вероятностей на алгебраических структурах, теорию нелинейных колебаний.

Полный анализ уравнения (1) (при различных значениях параметров a, b, α) дан Т. Като и Дж. Мак Леодом [5]. Т. Като [6] поставлен вопрос об исследовании уравнений, содержащих члены как со «сжатиями», так и с «растяжениями» аргумента. В частности, особый интерес в физических приложениях представляет задача о существовании ограниченных (почти периодических) решений.

Цель настоящей работы дать ответ на вопрос Т. Като для уравнения

$$y''(t) = \sum\nolimits_{j=-l}^{l} a_j y(\alpha_j t) + \lambda y(t), \quad a_j, \alpha_j, \lambda \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

которое естественно возникает в тех же задачах, что и (1).

Будем предполагать, что α_j мультипликативно соизмеримы, т. е. существует $q > 1$ такое, что $\alpha_j = q^j$. Тогда (2) записывается в виде

$$y''(t) = \sum\nolimits_{j=-l}^{\prime l} a_j y(q^j t) + \lambda y(t), \tag{3}$$

где $\sum\nolimits_{j=-l}^{\prime l}$ означает сумму $\sum\nolimits_{\substack{j=-l\\ j\neq 0}}^{l}$.

§ 1. Формулировка результатов.

Одним из основных результатов работы является теорема 1, которая описывает структуру ограниченных решений уравнения (3) при больших по модулю значениях λ.

Обозначим $M = \sum_{j=-l}^{\prime l} |a_j|$, $K = M \max\{q^{2l}, 2/(1-1/q^2)\}$.

ТЕОРЕМА 1. 1) *При* $\lambda < -K$ *уравнение* (3) *имеет два нетривиальных ограниченных линейно независимых решения* $y_1(t)$, $y_2(t)$. *Эти решения являются почти периодическими функциями.*

2) *При* $\lambda < -K$ *каждое ограниченное решение является почти периодической функцией, представимой в виде линейной комбинации* $y_1(t)$, $y_2(t)$.

3) *При* $\lambda > K$ *уравнение* (3) *не имеет ограниченных на всей оси решений, отличных от тождественного нуля.*

Идея построения ограниченных решений уравнения (3) и доказательства теоремы 1 состоит в следующем: эти решения ищутся в виде рядов Дирихле, показатели которых (чисто мнимые или вещественные) принадлежат геометрической прогрессии со знаменателем q, т. е.

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\{i\omega q^n t\}, \qquad -\infty < t < \infty, \tag{4}$$

или

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\{-\omega q^n t\}, \qquad 0 \leqslant t < \infty, \tag{5}$$

где $\omega \in [1, q]$, $\{c_n\}_{-\infty}^{\infty} \in l^2$. Тогда числа $\{c_n\}$ определяются из разностного уравнения типа Якоби

$$[L_\omega c](n) = -q^{2n}\omega^2 c_n - \sum_{j=-l}^{\prime l} a_j c_{n-j} = \lambda c_n. \tag{6}$$

Нас будут интересовать локализованные решения уравнения (6), т. е. точечная компонента спектра несамосопряженного разностного оператора L_ω. Таким образом, доказательство п. 1 теоремы 1 сводится к доказательству леммы 1.

ЛЕММА 1. *В полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda < -K$ *спектр несамосопряженного разностного оператора* L *чисто вещественный, дискретный, неограниченный.*

Поведение решений уравнения (3) при $|\lambda| < K$ зависит от соотношения между коэффициентами a_j. Рассмотрим возникающую ситуацию на примере модельного уравнения

$$y''(t) = ay(t/q) + by(qt) + \lambda y(t). \tag{7}$$

ТЕОРЕМА 2. 1) *Если* $0 < a < b$, *то уравнение* (7) *имеет нетривиальное ограниченное на всей оси решение при всех* $\lambda < 2\sqrt{ab}$.

2) *Если* $a > b > 0$, *то уравнение* (7) *не имеет нетривиальных ограниченных на всей оси решений ни при каком* $\lambda > -2\sqrt{ab}$.

Следствие 1. *Уравнение*

$$y''(t) = ay(t/q) + by(qt) \tag{8}$$

имеет нетривиальное ограниченное на всей оси решение, если $0 < < a < b$, *и не имеет таких решений, если* $a > b > 0$.

Замечание 1. В работах [7, 8] для уравнения

$$y''(t) = ay(\alpha_1 t) + by(\alpha_2 t), \tag{9}$$

содержащего либо только «сжатия» ($|\alpha_j| < 1$, $j = 1, 2$), либо только «растяжения» ($|\alpha_j| > 1$; $j = 1, 2$) аргумента был установлен следующий результат, обобщающий результаты Т. Като и Дж. Мак Леода [5].

ТЕОРЕМА 3. 1) *Если* $A = \max\limits_{j=1,2} |\alpha_j| < 1$, *то уравнение* (9) *не имеет нетривиальных ограниченных решений.*

2) *Если* $\alpha = \min\limits_{j=1,2} |\alpha_j| > 1$, *то существует нетривиальное быстро убывающее* (*как* $\exp\{-\gamma \ln^2 (1 + |t|)\}$; $\gamma > 0$) *решение уравнения* (6).

Следствие 1 показывает, что уравнение (8) аналогично уравнению со «сжатиями» (9), если вес «сжатия» в (8) больше веса растяжения, и подобно уравнению с «растяжениями» — в противном случае.

Доказательство теоремы 2 основано на редукции уравнения (8) к задаче описания спектра разностного уравнения Шредингера

$$[Hc](n) = c_{n+1} + c_{n-1} + q^{2^n}\omega^2 c_n = \lambda c_n \tag{10}$$

с потенциалом $q(n) = q^{2^n}\omega^2$, для которого $q(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $q(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Рассмотрим наряду с (10) разностное уравнение Шредингера более общего вида:

$$[Hc](n) = c_{n+1} + c_{n-1} + q(n)c_n = \lambda c_n, \tag{11}$$

потенциал $q(n)$ которого подчинен условиям

$$|q(n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \tag{12}$$

$$\sum\nolimits_{n=0}^{\infty} |q(-n)| < \infty. \tag{13}$$

Справедлива аналогичная лемме 1 лемма 2 [9].

ЛЕММА 2. *Если выполнены условия* (12) и (13), *то оператор Шредингера H имеет абсолютно непрерывный двукратный спектр на интервале* $[-2, 2]$ *и дискретный, неограниченный вне этого интервала.*

Замечание 2. В случае когда в уравнении (2) $a_j < 0$ ($j = 0, \pm 1, \ldots, \pm l$), утверждение п. 3 теоремы 1 может быть уточнено и усилено прямыми вероятностными методами. Рассмотрим уравнение

$$y''(t) = \sum\nolimits_{j=0}^{l} a_j y(\alpha_j t + \beta_j) + \lambda y(t), \tag{14}$$

где $a_j < 0$, α_j, β_j, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\alpha_j t + \beta_j \neq t$ ($j = 0, \ldots, l$).

ТЕОРЕМА 4. *Уравнение* (14) *не имеет нетривиальных ограниченных решений при* $\lambda > M$, *где* $M = \sum\nolimits_{j=0}^{l} |a_j|$.

§ 2. Доказательства.

2.1. Доказательство п. 1 теоремы 1 начнем с леммы 1. Для этого представим оператор $L_\omega = L$ как сумму $L = H + B$, где $[Hc](n) = -q^{2n}\omega^2 c_n$ — самосопряженный оператор, а $[Bc](n) = -\sum_{j=-l}^{\prime l} a_j c_{n-j}$ — ограниченный, $\|B\| = \sum_{j=-l}^{\prime l} |a_j| = M$.

Утверждение 1. *Пусть $\lambda = -q^{2n}\omega^2$ — собственное значение оператора H, $D_n = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda - \lambda_n| \leqslant M\}$, тогда при* $\operatorname{Re}\lambda < -2Mq^2/(q^2-1)$ *весь спектр оператора L состоит из изолированных собственных значений и содержится в объединении кругов $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$: в каждом круге D_n (а эти круги не пересекаются) имеется одно, и только одно, собственное значение λ_n' оператора L.*

Доказательство утверждения 1 опирается на общие результаты о возмущении самосопряженного оператора с дискретным спектром ограниченным (вообще говоря, несамосопряженным) [10]. Действительно, спектр оператора H в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < -2Mq^2/(q^2-1)$ состоит из однократных изолированных собственных значений $\lambda_n = -q^{2n}\omega^2$ $(q > 1,\ \omega \in [1, q])$ и расстояние между соседними собственными числами λ_n допускает оценку

$$|\lambda_n - \lambda_{n-1}| = q^{2n}\omega^2\left(1 - \frac{1}{q^2}\right) = q^{2n}\omega^2\frac{q^2-1}{q^2} > 2M\frac{q^2}{q^2-1}\cdot \frac{q^2-1}{q^2} = 2M = 2\|B\|,$$

поэтому оператор $L = H + B$ имеет дискретный спектр в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < -2Mq^2/(q^2-1)$.

Для доказательства леммы 1 убедимся еще в том, что спектр оператора L (вообще говоря, несамосопряженного) чисто вещественный. Допустим противное, т. е. предположим, что в некотором круге D_n с центром в точке λ_n и радиусом M оператор L имеет невещественное собственное значение λ, отвечающее собственному вектору $\{\bar c_n\}_{-\infty}^{\infty}$. Тогда оператор L в том же круге D_n имеет еще одно собственное значение $\bar\lambda$, которое отвечает собственному вектору $\{\bar c_n\}_{-\infty}^{\infty}$. Таким образом, оператор L в круге D_n имеет два различных собственных значения, что противоречит утверждению 1. Полученное противоречие доказывает вещественность спектра оператора L.

Теперь уже несложно завершить доказательство п. 1 теоремы 1. Обозначим через $\lambda_i(\omega)$, $i = 1, 2, \ldots$, $\omega \in [1, q]$, точки дискретного спектра оператора L_ω и заметим, что: 1) $\lambda_i(\omega)$ непрерывно зависят от $\omega \in [1, q]$; 2) $\forall i \in \mathbf{N}\ \exists j \in \mathbf{N}$: $\lambda_i(q) = \lambda_j(1)$. Отсюда следует, что для любого $\lambda < -K$ найдется $\omega(\lambda) \in [1, q]$ такое, что оператор L_ω имеет число λ своим собственным значением. Функции

$$y_{1,2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\{\pm i\omega(\lambda) q^n t\}, \tag{15}$$

где $\{c_n\}_{-\infty}^{\infty} \in l^2$ — собственный вектор, отвечающий собственному значению λ, являются искомыми ограниченными (почти периодическими) решениями уравнения (3).

2.2. Доказательство п. 2 теоремы 1. Пусть $y(t)$ — произвольное ограниченное решение уравнения (3) с начальными условиями

$$y(0) = d_0, \quad y'(0) = d_1, \tag{16}$$

а y_1, y_2 определены по формулам (15). Положим $z(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ и подберем c_1 и c_2 так, чтобы $z(0) = d_0$; $z'(0) = d_1$. Для доказательства п. 2 теоремы 1 достаточно установить, что при $\lambda < -K$ решение задачи Коши (3), (16) в классе ограниченных функций единственно. Действительно, в этом случае

$$y(t) \equiv z(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t).$$

Доказательство единственности вытекает, в свою очередь, из следующих ниже лемм 3, 4.

ЛЕММА 3. *Пусть* $|\lambda| > K$, $y(t)$ — *ограниченное решение задачи Коши* (3), (16), $f(p)$ — *его преобразование Лапласа. Тогда* $f(p)$ *является функцией аналитической в полуплоскости* $\operatorname{Re} p > 0$, *удовлетворяющей функциональному уравнению*

$$p^2f(p) = d_1 + d_0p + {\sum_{j=-l}^{l}}' a_jq^{-j}f(p/q^j) + \lambda f(p) \tag{17}$$

и ограниченной на каждом луче $R_\varphi = \{p \in \mathbf{C} \mid p = re^{i\varphi}, 0 < r < \infty\}$ *из угла* $-\pi/2 + \varepsilon < \varphi < \pi/2 - \varepsilon$ *для любого* $\varepsilon > 0$.

ЛЕММА 4. *При* $\lambda < -K$ *на положительной полуоси* $\mathbf{R}_+ = \{p \mid 0 < p < \infty\}$ *уравнение* (17) *имеет единственное ограниченное решение.*

Доказательство леммы 3. Из ограниченности $y(t)$ следует, что в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$

$$|f(p)| \leqslant C/\operatorname{Re} p, \tag{18}$$

а поскольку на луче R_φ $|p| = \sqrt{1 + k^2}\operatorname{Re} p$, где $k = \operatorname{tg}\varphi$, то

$$|f(p)| \leqslant C_1/|p| \text{ при } p \in R_\varphi, \tag{19}$$

и, в частности, $f(p) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$ $(p \in R_\varphi)$. Остается еще убедиться в том, что функция $f(p)$ ограничена при $p \to 0$ вдоль луча R_φ.

Покажем, что при больших $|\lambda|$ из (17) и (19) вытекает ограниченность $f(p)$ на каждом луче R_φ $(-\pi/2 + \varepsilon < \varphi < \pi/2 - \varepsilon)$. Для этого рассмотрим характеристическое уравнение

$$\sum_{i=0}^{2l} b_i\rho^{2l-i} + \lambda\rho^l = 0, \quad \text{где} \quad b_i = a_{l-i}q^{i-l}, \tag{20}$$

однородного q-разностного уравнения

$$p^2f(p) = {\sum_{j=-l}^{l}}' a_jq^{-j}f(p/q^j) + \lambda f(p). \tag{21}$$

Пусть ρ_i $(i = 1, \ldots, 2l)$ — корни уравнения (20), $k_i = \log_q\rho_i$. Далее ограничимся для простоты изложения случаем отсутствия резонансов, т. е. предположим, что:

1) $\forall i = 1, \ldots, 2l \quad k_i \notin \mathbf{Z}$,

2) $\forall i, j = 1, \ldots, 2l \quad k_i - k_j \notin \mathbf{Z}$.

Общее решение $f(p)$ неоднородного уравнения (17) есть сумма $f_1(p) + g(p)$, где $g(p)$ — частное решение (17), а $f_1(p)$ — общее решение однородного уравнения (21). Согласно [11], можно построить частное решение $g(p)$, являющееся аналитической в нуле функцией, а

$$f_1(p) = p^{k_1} Q_1(p) s_1(p) + \ldots + p^{k_{2l}} Q_{2l}(p) s_{2l}, \tag{22}$$

где $Q_i(p)$ — аналитические в нуле функции (которые могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов), $s_i(p)$ — произвольные q-периодические функции (т. е. функции, удовлетворяющие соотношению $s(qp) = s(p)$). Из (19) следует, что функции $s_i(a)$ можно считать ограниченными.

Предположим, что функция $f(p)$ неограниченна при $p \to 0$ вдоль R_φ. Тогда из (22) следует, что среди показателей k_i найдется хотя бы один такой, что $\operatorname{Re} k_i < 0$, а из (19) заключаем, что $k = \min \operatorname{Re} k_i \geqslant -1$. Таким образом, $-1 \leqslant k < 0$.

Выберем теперь на луче R_φ точку p_0 $(1 \leqslant |p_0| < q)$ так, чтобы $s_k(p_0) \neq 0$, и рассмотрим функцию f на последовательности точек $p_n = p_0/q^n$. На этой последовательности $s_i(p_n) = s_i(p_0) = \mathrm{const}$, и поэтому при $p = p_n$ $(n = 1, \ldots)$

$$f(p) \sim Cp^k, \quad p \to +0, \quad -1 \leqslant k < 0. \tag{23}$$

В неравенстве

$$|\lambda|\,|f(p)| \leqslant |d_1| + |d_0| p + p^2 |f(p)| + \sum\nolimits'^{l}_{j=-l} |a_j| q^{-j} |f(p/q^j)|,$$

полученном из (17), разделим обе части на p^k и устремим p к нулю. Учитывая (23) и неравенство $0 \leqslant k + 1 < 1$, получаем

$$|\lambda| \leqslant \sum\nolimits'^{l}_{j=-l} |a_j|\,|q^{-(k+1)j}| \leqslant q^l \sum\nolimits'^{l}_{j=-l} |a_j| = q^l M,$$

в то время как, по предположению, $|\lambda| > q^l M$. Полученное противоречие доказывает лемму 3.

Доказательство леммы 4 вытекает из принципа сжимающих отображений. В банаховом пространстве B непрерывных ограниченных функций, определенных на $\mathbf{R}_+$, зададим оператор A по формуле

$$A[f(p)] = \frac{d_1 + d_0 p}{p^2 - \lambda} + \frac{1}{p^2 - \lambda} \sum\nolimits'^{l}_{j=-l} a_j q^{-j} f(p/q^j). \tag{24}$$

Тогда A переводит пространство B в себя, поскольку $p^2 - \lambda \neq 0$ при $p \geqslant 0$, $\lambda < -K$. Кроме того, при $p \geqslant 0$, $\lambda < -K$

$$|Af_1 - Af_2| = \frac{1}{|p^2 - \lambda|} \left| \sum\nolimits'^{l}_{j=-l} a_j q^{-j} (f_1(p/q^j) - f_2(p/q^j)) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum\nolimits'^{l}_{j=-l} |a_j| q^{-j} / |\lambda| \right) \sup_{p \geqslant 0} |f_1(p) - f_2(p)| \leqslant (K/|\lambda|)\, \rho(f_1, f_2),$$

и, значит, при $|\lambda| > K$ оператор A является сжимающим. Этим доказана лемма 4 и утверждение п. 2 теоремы 1.

2.3. Доказательство п. 3 теоремы 1 вытекает из лемм 5, 6, 7.

ЛЕММА 5. *Для любого $\lambda > K$ уравнение* (3) *имеет на полуоси $\mathbf{R}_+$ нетривиальное ограниченное решение вида*

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\{-\omega q^n t\}, \qquad t \geqslant 0, \tag{25}$$

где $\omega = \omega(\lambda) \in [1, q]$, $\{c_n\}_{-\infty}^{\infty} \in l^2$ *и, более того, при* $\lambda > K$ *всякое ограниченное на* $\mathbf{R}_+$ *решение уравнения* (3) *может быть записано в виде* (25). *Аналогично на отрицательной полуоси* $\mathbf{R}_-$ *уравнение* (3) *имеет решение вида*

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\{\omega q^n t\}, \quad t \leqslant 0, \tag{26}$$

и всякое ограниченное на $\mathbf{R}_-$ *решение может быть записано в виде* (26).

ЛЕММА 6. *Пусть* $\lambda > K$, *тогда решение* (25) (*соответственно* (26)) *уравнения* (3) *удовлетворяет на* $\mathbf{R}_+$ (*соответственно* $\mathbf{R}_-$) *оценке*

$$|y(t)| \leqslant C/t^2. \tag{27}$$

ЛЕММА 7. *Пусть* $\lambda > K$, *тогда всякое решение уравнения* (3), *определенное на всей оси и принадлежащее пространству* $L(-\infty, \infty)$, *тождественно равно нулю.*

Доказательство леммы 5. Доказательство существования ограниченного на $\mathbf{R}_+$ решения вида (25) аналогично доказательству п. 1 теоремы 1, а доказательство единственности получается модификацией рассуждений, приведенных в п. 2.2.

Легко видеть, что коэффициенты $\{c_n\}_{-\infty}^{\infty}$ удовлетворяют уравнению

$$[M_\omega c](n) = q^{2n}\omega^2 c_n - \sum_{j=-l} a_j c_{n-j} = \lambda c_n, \tag{28}$$

аналогичному (6).

Доказательство леммы 6. Убедимся прежде всего, что коэффициенты c_n в (25) удовлетворяют при $n = -1, -2, \ldots$ неравенствам

$$|c_n| \leqslant D q^{\alpha n} \tag{29}$$

с $\alpha > 2$, $D > 0$. Для этого заметим, что

$$c_n \sim D_0 b^n \quad (n \to -\infty),$$

где b — один из корней $b_1, \ldots, b_{2l}$ характеристического уравнения

$$-\lambda = \sum_{j=-l}^{\prime l} a_j b^{-j} \tag{30}$$

разностного уравнения (28) (для упрощения изложения ограничимся случаем отсутствия кратных корней характеристического уравнения (30)). Положим $b = q^{\beta}$, т. е.

$$c_n \sim D_0 q^{\beta n} \quad (n \to -\infty), \tag{31}$$

и докажем, что $\beta > 2$. Поскольку $c_n \xrightarrow[n \to -\infty]{} 0$, то ясно, что $\beta > 0$. Чтобы убедиться в невозможности неравенства $0 < \beta \leqslant 2$, подставим (31) в (30), разделим обе части уравнения на $q^{\beta n}$ и устремим $n \to -\infty$. Получим

$$|\lambda| \leqslant {\sum}'^{l}_{j=-l} |a_j| q^{\beta j} \leqslant q^{\beta l} M,$$

но по условию $|\lambda| > K \geqslant q^{2l} M$. Значит, $\beta > 2$ и неравенство (29) доказано. Продолжим оценку $y(t)$, разбив сумму в (25) на две $\sum_{-\infty}^{0}$ и $\sum_{0}^{\infty}$. При этом, во-первых,

$$\left| \sum_0^\infty c_n e^{-\omega q^n t} \right| \leqslant e^{-\omega t} \sum_0^\infty |c_n| \leqslant D_1 e^{-\omega t} \leqslant D_2 t^{-2}, \tag{32}$$

где D_1, $D_2 > 0$, во-вторых, согласно (29) для любого $\varepsilon > 0$ и $\gamma = 1/q$

$$\left| \sum_{-\infty}^{0} c_n e^{-\omega q^n t} \right| \leqslant D \sum_{-\infty}^{0} q^{\alpha n} e^{-\omega q^n t} = D \sum_0^\infty \gamma^{\alpha n} e^{-\omega \gamma^n t} =$$

$$= D \sum_0^\infty (\gamma^{\alpha n} e^{-\omega \gamma^n t})^{1-\varepsilon} (\gamma^{\alpha n} e^{-\omega \gamma^n t})^{\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{n \geqslant 0} [\gamma^{\alpha n} e^{-\omega \gamma^n t}]^{1-\varepsilon} \sum_0^\infty \gamma^{\alpha n \varepsilon} \leqslant D_3 \sup_{n \geqslant 0} [\gamma^{\alpha n} e^{-\omega \gamma^n t}]^{1-\varepsilon}, \tag{33}$$

$D_3 > 0$.

Несложные вычисления показывают, что

$$\sup_{n \geqslant 0} e^{-\omega \gamma^n t + \alpha n \ln \gamma} \leqslant D_4 t^{-\alpha} \tag{34}$$

с константой $D_4 > 0$. Из (25), (32), (33), (34) заключаем окончательно, что $|y(t)| \leqslant C t^{-(1-\varepsilon)\alpha}$ $(\alpha > 2)$. Лемма 6 доказана.

Доказательство леммы 7. Если $y(t)$ — решение уравнения (3), принадлежащее $L(-\infty, \infty)$, то преобразование Фурье $f(p)$ функции $y(t)$ существует и удовлетворяет уравнению

$$-p^2 f(p) = {\sum}'^{l}_{j=-l} a_j q^{-j} f(p/q^j) + \lambda f(p)$$

или

$$p^2 f(p) = -{\sum}'^{l}_{j=-l} a_j q^{-j} f(p/q^j) + (-\lambda) f(p).$$

Из леммы 4 следует, что $f(p) \equiv 0$ на $\mathbf{R}_+$. Аналогично $f(p) \equiv 0$ и на $\mathbf{R}_-$. Значит, $f(p) \equiv 0$ на $\mathbf{R}$ и $y(t) \equiv 0$ на $\mathbf{R}$.

2.4. Доказательство теоремы 2 опирается на лемму 2 об описании спектра разностного уравнения Шредингера (10).

1) Будем искать решение уравнения (7) в виде (4). Тогда

$$-q^{2n} \omega^2 c_n = a c_{n+1} + b c_{n-1} + \lambda c_n.$$

Полагая

$$c_n = (b/a)^{n/2} d_n,\tag{35}$$

получим уравнение

$$[Hd](n) = \sqrt{ab}\,(d_{n+1} + d_{n-1}) + q^{2n}\omega^2 d_n = -\lambda d_n.$$

Согласно лемме 2 оператор H имеет на интервале $[-2\sqrt{ab}, 2\sqrt{ab}]$ абсолютно непрерывный спектр, и для соответствующих обобщенных собственных функций $\{\overline{d_n}\}_{-\infty}^{\infty}$, как нетрудно видеть, выполняются оценки

$$\begin{aligned} &|d_n| \leqslant \text{const} && (n = 0, -1, \ldots),\\ &|d_n| \leqslant \text{const}\cdot\exp(-\varepsilon n^2) && (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned}\tag{36}$$

с некоторым $\varepsilon > 0$. Из (35) и (36) следует, что при $b > a > 0$ $\{c_n\}_{-\infty}^{\infty} \in l^2$, а функция (4) является ограниченным почти периодическим решением.

2) Предположим теперь, что $a > b > 0$ и существует ограниченное решение $y(t)$ уравнения (7) такое, что $y(t) \not\equiv 0$. Обозначим преобразование Лапласа этого решения через $f(p)$. Тогда

$$p^2 f(p) = d_1 + d_0 p + qaf(qp) + (b/q) f(p/q) + \lambda f(p),\tag{37}$$

где $d_0 = y(0)$, $d_1 = y'(0)$, и выполняется оценка (19). Общее решение может быть записано в виде $f(p) = f_1(p) + g(p)$, где $f_1(p)$ — решение однородного уравнения

$$p^2 f(p) = qaf(qp) + (b/q) f(p/q) + \lambda f(p),$$

а $g(p)$ — аналитическая в окрестности нуля функция, частное решение неоднородного уравнения (37). Выберем далее точку $\omega \in [1, q]$ так, чтобы $f_1(\omega) \neq 0$, и положим $c_n = f_1(\omega/q^n)$, тогда $(b/q)\,c_{n+1} + (aq)\,c_{n-1} + q^{-2n}\omega^2 c_n = -\lambda c_n$. Если положить теперь

$$c_n = \theta^n d_n, \qquad \theta = q\sqrt{a/b},\tag{38}$$

то $[Hd](n) = \sqrt{ab}\,(d_{n+1} + d_{n-1}) + q^{-2n}\omega^2 d_n = -\lambda d_n$. Из леммы 2 вытекает, что на интервале $I = [-2\sqrt{ab}, 2\sqrt{ab}]$ оператор H имеет абсолютно непрерывный спектр и $d_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, если $\lambda \in I$. Из (38) заключаем, что при $\lambda \in I$ и $n \to \infty$ величина $|c_n/q^n|$ неограниченна, значит, при $p \to 0$ неограниченными являются функции $|pf_1(p)|$ и $|pf(p)|$, что противоречит (19). Полученное противоречие показывает, что $y(t) \equiv 0$.

2.5. Доказательство теоремы 4. Рассмотрим случайный процесс, который за время $\mathrm{d}t$ с вероятностью $\nu_j \mathrm{d}t$ совершает скачок $x \to \alpha_j x + \beta_j$ $(j = 0, \ldots, l)$ и с вероятностью $1 - (\nu_1 + \ldots + \nu_l)\,\mathrm{d}t$ совершает броуновское движение $x \to x + w_{\mathrm{d}t}$. Дифференциальное выражение инфинитезимального оператора такого процесса задается формулой

$$Ay(x) = \frac{1}{2} y''(x) + \sum_{j=0}^{l} \nu_j y(\alpha_j x + \beta_j) - \Big(\sum_{j=0}^{l} \nu_j\Big) y(x).$$

По теореме Хилле — Иосида уравнение $Ay = \mu y$ не имеет нетривиальных ограниченных по всей оси решений, если $\mu > 0$. Значит, уравнение (14) не имеет нетривиальных ограниченных решений при $\lambda > M$.

Авторы благодарят А. А. Шкаликова за полезные обсуждения.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 02.10.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Амбарцумян В. А. О флуктуации яркости Млечного пути // ДАН СССР. 1944. Т. 44. С. 223—226.

[2] Mahler K. On a special functional equation // J. London. Math Soc. 1940. V. 15. P. 115—123.

[3] Полищук В. М., Шарковский А. Н. Общее решение линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 9. С. 1627—1645.

[4] Романенко Е. Ю., Шарковский А. Н. Асимптотика решений дифференциально-функциональных уравнений // Асимптотическое поведение решений дифференциально-функциональных уравнений. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. С. 5—39.

[5] Kato T., McLeod J. B. The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77, N 6. P. 891—937.

[6] Kato T. Asymptotic behavior of solution of the functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Delay and functional-differential equations and their applications. N.-Y.: Acad. Press, 1972. P. 197 — 217.

[7] Дерфель Г. А. Об одном классе дифференциально-функциональных уравнений с линейно преобразованным аргументом // ДАН СССР. 1976. Т. 83, № 3. С. 561—563.

[8] Дерфель Г. А. О поведении решений функциональных и дифференциально-функциональных уравнений с несколькими преобразованиями аргумента // Укр. мат. журн. 1982. Т. 34, № 3. С. 350—356.

[9] Дерфель Г. А., Молчанов С. А. Вероятностные и спектральные методы в теории дифференциально-функциональных уравнений // УМН. 1987. Т. 42, № 4. С. 126.

[10] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

[11] Adams R. Linear q-difference equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1931. V. 37, N 6. P. 361—400.