

УДК 533.93

## ПЛАЗМЕННАЯ ЧАСТОТА, ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ И ПРОВОДИМОСТЬ НЕИДЕАЛЬНОЙ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ПЛАЗМЫ

© 2020 г. А. Л. Хомкин<sup>1,\*</sup>, А. С. Шумихин<sup>1,\*\*</sup><sup>1</sup>Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия

\*E-mail: alhomkin@mail.ru

\*\*E-mail: shum\_ac@mail.ru

Поступила в редакцию 05.11.2019 г.

После доработки 08.12.2019 г.

Принята к публикации 24.12.2019 г.

Рассчитана проводимость неидеальной полностью ионизованной плазмы в предположении, что прямолинейные участки траектории электрона отсутствуют. Траектория состоит из кусочков параболических траекторий, лежащих внутри ячейки Вигнера–Зейтца. Проводимость в таком приближении пропорциональна плазменной частоте и близка к экспериментально измеренной проводимости плотной плазмы цезия.

DOI: 10.31857/S0040364420030096

### ВВЕДЕНИЕ

При обсуждении проблемы проводимости “неидеальной плазмы” в 70-х гг. прошедшего столетия было высказано много интересных идей и предложены многочисленные “универсальные” расчетные формулы [1]. В настоящей заметке обращается внимание на гипотезу о существовании предельной проводимости полностью ионизованной неидеальной плазмы, высказанную в работе Асиновского Э.И. и Валуева А.А. [2]. Насколько известно авторам, в этой работе впервые было введено понятие “предельной” проводимости сильно неидеальной плазмы:

$$\sigma_l = \frac{\omega_p}{4\pi}. \quad (1)$$

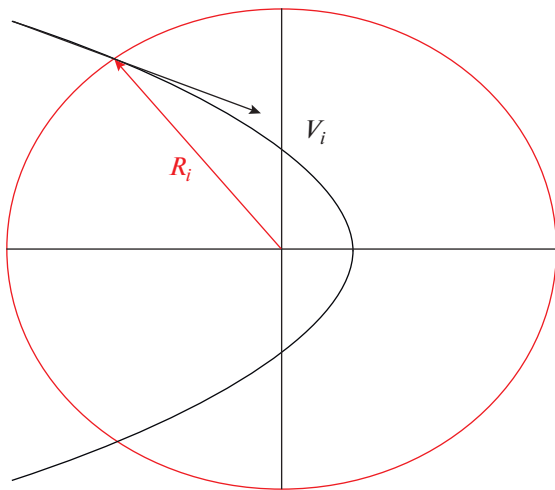
В (1)  $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 n_e / m}$  – плазменная частота, выраженная через концентрацию  $n_e$ , заряд  $e$  и массу  $m$  электронов. Большинство экспериментов не подтверждали это предположение. Лишь экспериментальные данные, полученные Дикстер И.Я. и Зейгарником В.А. в плотных парах цезия [3] при их экстраполяции, указывали на (1). В указанных экспериментах была получена достаточно плотная плазма с практически полной ионизацией и отсутствием влияния столкновений электронов с атомами, что отличало эти эксперименты от большинства других. Подчеркнем, что именно анализ экспериментальных данных [3] привел авторов [2] к соотношению (1). При этом следует отметить, что (1) совершенно не соответствует классической картине процессов переноса

в газах и плазме, которая предполагает движение частицы по прямолинейной траектории, прерываемой случайными, мгновенными столкновениями. Проводимость полностью ионизованной плазмы при этом практически не зависит от плотности (число носителей равно числу рассеивателей). К сожалению, совокупность всех экспериментальных данных и их точность не позволяли сделать окончательных выводов о существовании тех или иных “эффектов” неидеальности.

Отметим еще один важный для дальнейшего эффект. Еще в работах [4, 5] было обращено внимание на возрастающую роль в процессах переноса состояний рассеяния – столкновительных комплексов при увеличении плотности атомарных газов.

В связи с прогрессом вычислительной техники исследователи вновь обратили внимание на переносные и другие динамические свойства полностью ионизованной неидеальной плазмы. Метод молекулярной динамики (ММД) позволил получить [6, 7] проводимость неидеальной “полностью ионизованной” классической плазмы. В [8] с использованием ММД выполнено комплексное исследование переносных свойств одно- и многократно ионизованной неидеальной классической плазмы. Рассчитаны электронный и ионный корреляторы скоростей и токов. Выполнены расчеты коэффициентов диффузии и проводимости, которые позволяют получить ряд новых аналитических результатов.

В [9] найдены поправки к проводимости идеальной плазмы, учитывающие существование



**Рис. 1.** Траектория пролета электроном ячейки Вигнера–Зейтца по параболической траектории:  $R_i$  – радиус ячейки ВЗ,  $V_i$  – скорость электрона на границе ячейки ВЗ при влете в нее.

электрон-ионных столкновительных комплексов. Их экстраполяция в область больших неидеальностей качественно соответствовала результатам [6] и указывала на возрастание роли пролета электроном области собственно столкновения.

В настоящей работе выполнен расчет коррелятора скоростей, коэффициента диффузии, частоты столкновений и проводимости сильно неидеальной плазмы, в предположении, что траектория электрона представляет собой последовательность параболических траекторий, лежащих внутри ячейки Вигнера–Зейтца (ВЗ). Предполагается, что прямолинейные участки траектории вообще отсутствуют. Получены соотношения, связывающие плазменную частоту и скорость электрона на пересечении параболической траектории электрона с границей ячейки ВЗ. Рассчитанная в рамках модели проводимость сильно неидеальной плазмы подтверждает гипотезу Асиновского Э.И. и Валуева А.А. [2] и коррелирует с асимптотикой результатов Дихтер И.Я. и Зейгарника В.А. [3].

## ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим полностью ионизованную плазму, состоящую из  $N_e$  электронов и  $N_i$  ионов, находящихся в объеме  $V$ , при температуре  $kT = 1/\beta$ . Соответствующие плотности частиц  $n_{e,i} = N_{e,i}/V$ . Определим необходимые для дальнейшего радиус ячейки Вигнера–Зейтца  $R_{WZ}$  и маделунговский параметр неидеальности  $\Gamma$ :

$$R_{WZ} = \left( \frac{3}{4\pi n_i} \right)^{1/3}, \quad \Gamma = \frac{\beta e^2}{R_{WZ}},$$

а также дебаевский радиус  $R_D$  и дебаевский параметр неидеальности  $\Gamma_D$ :

$$R_D = \left( \frac{1}{4\pi\beta e^2 (n_e + n_i)} \right)^{1/2},$$

$$\Gamma_D = \beta e^2 / R_D = \beta e^2 \sqrt{4\pi\beta e^2 (n_e + n_i)}.$$

При математическом моделировании нет необходимости решать достаточно сложное кинетическое уравнение Больцмана, тем более что оно получено для идеального газа. Уже в [10] с использованием ММД рассчитывается коррелятор скорости, который определяется через скалярное произведение начальной и текущей скоростей частицы:

$$K = \int_0^{\infty} \langle \mathbf{V}(0) \mathbf{V}(t) \rangle dt.$$

Физический смысл этой величины легко получить в приближении ближайшего соседа, считая, что после усреднения скорость частицы близка к тепловой  $V_T$ . Скорость частицы будет равна начальной при условии, что она не столкнется с иной частицей. Для этого необходимо, чтобы в объеме  $v = QV_T t$  не было других частиц ( $Q$  – сечение рассеяния). Вероятность такого события определяется формулой Пуассона  $\omega = \exp(-nv) = \exp(-nV_T Q t)$  или  $\omega = \exp(-t/\tau)$ , где  $\tau = 1/nV_T Q$  – время свободного пробега. После усреднения по скоростям получим коррелятор

$$K = V_T^2 \tau.$$

Вводя длину пробега  $l = 1/nQ$ , для коррелятора можно получить соотношение

$$K = V_T l.$$

Теория линейного отклика позволяет связать коррелятор скоростей  $K$  и коэффициенты переноса, такие как проводимость  $\sigma = n_e e^2 K / 3T$  и коэффициент диффузии  $D = K/3$ .

Рассчитаем коррелятор скоростей для сильно неидеальной полностью ионизованной плазмы в рамках следующих предположений:

1. Участки прямолинейного свободного движения электрона отсутствуют. Траектория электрона состоит из участков траекторий внутри ячейки Вигнера–Зейтца (рис. 1). Электрон взаимодействует только с ближайшим к нему ионом.

2. Траекторией пролета электрона внутри ячейки ВЗ является парабола.

3. При переходе из ячейки в ячейку электрон “забывает” свою скорость. Считаем, что учет корреляции скоростей при переходах из ячейки в ячейку приведет к численному коэффициенту, близкому к единице.

ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ТРАЕКТОРИЯ

Параметры параболической траектории пролета в кулоновском потенциале хорошо известны. Для частицы с энергией  $E$  и моментом импульса  $M$  в [11] приведено решение кеплеровой задачи для всех траекторий: эллипса, гиперболы и параболы. Координаты траекторий получены в неявном виде, в частности для параболы через параметры  $\eta$  и  $p = M^2/me^2$ .

Траектория электрона  $R(t)$  описывается параметрически:

$$R = \frac{p}{2}(1 + \eta^2), \quad t = \sqrt{\frac{mp^3}{e^2}} \frac{\eta}{2} \left(1 + \frac{\eta^3}{2}\right).$$

Для декартовых координат имеем

$$X = \frac{p}{2}(1 - \eta^2), \quad Y = p\eta.$$

Параметр  $\eta$  “пробегают” значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ . На параболе полная энергия частицы равна нулю:

$$\frac{mV_i^2}{2} = \frac{e^2}{R_i},$$

а момент импульса

$$M = mV_i R_i \sin\phi,$$

где  $\phi$  – угол между вектором скорости  $V_i$  и радиус-вектором  $R_i$ . Для записи коррелятора понадобятся декартовы координаты скорости электрона вдоль траектории:

$$\begin{aligned} V_x(\eta) &= \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -p\eta \frac{\partial \eta}{\partial t}, \\ V_y(\eta) &= \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = p \frac{\partial \eta}{\partial t}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= 2\sqrt{\frac{e^2}{mp^3}} \frac{1}{(1 + \eta^2)}. \end{aligned}$$

КОРРЕЛЯТОР СКОРОСТЕЙ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ПЕРЕНОСА

Траектории пролета ячейки ВЗ по параболе отличаются только углом  $\phi$ , по нему и проведем усреднение. От интегрирования по времени перейдем к интегрированию по  $\eta$ :

$$\begin{aligned} K &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{-\eta_i}^{\eta_i} [V_x(-\eta_i)V_x(\eta) + V_y(-\eta_i)V_y(\eta)] d\eta d\phi = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{-\eta_i}^{\eta_i} [V_y(-\eta_i)V_y(\eta)] d\eta d\phi = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ 4\sqrt{\frac{e^2 p}{m}} \arctg\left(\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \phi} - 1}\right) \right] d\phi = V_i R_i K_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $K_0 = 1.029$  – константа. Интегрирование  $X$ -компоненты скорости дает нуль. Соответственно, для коэффициента диффузии имеем  $D = K/3 = 0.343V_i R_i$  – то же выражение (2), но с другой константой  $K_D = 0.343$ . Предполагая экспоненциальный характер зависимости от времени, для времени “пробега”  $\tau$  получаем

$$\tau = \frac{K}{V_i^2} = 1.028 \frac{R_i}{V_i}.$$

Плазменная частота, выраженная через скорость электрона на границе ячейки ВЗ и ее радиус, не зависит от расчета коррелятора и определяется соотношением:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{3V_i}{2R_i}}, \quad \omega_p \tau = 1.26.$$

Для проводимости, используя общее соотношение

$$\sigma = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \tau,$$

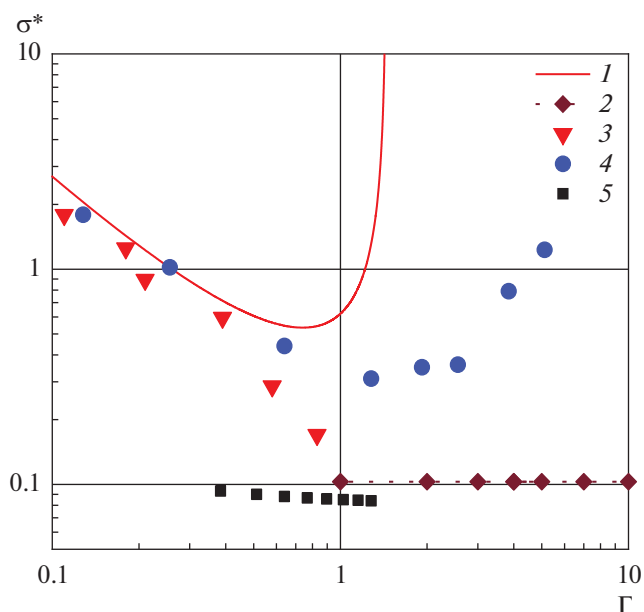
получим выражение, практически совпадающее с предложенным в работе [2]:

$$\sigma = \frac{\omega_p}{4\pi} (\omega_p \tau) = \frac{\omega_p}{4\pi} 1.26.$$

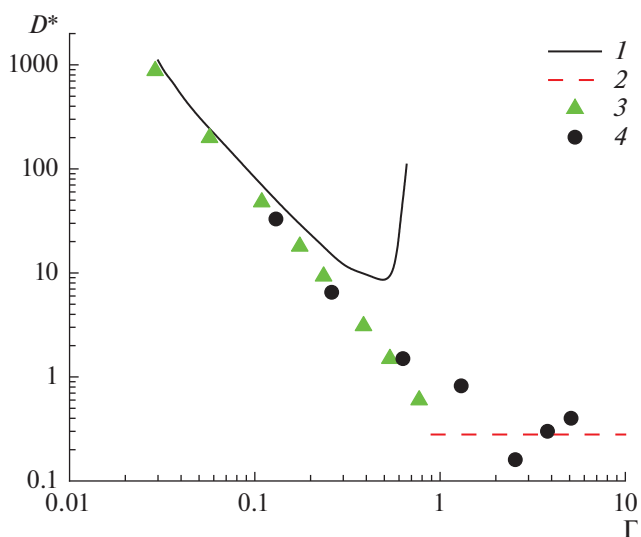
СРАВНЕНИЕ С ЧИСЛЕННЫМ И ФИЗИЧЕСКИМ ЭКСПЕРИМЕНТАМИ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 2 и 3 представлено сравнение полученных результатов с данными численных расчетов и эксперимента для проводимости  $\sigma$  и коэффициента диффузии  $D$ . Данные по проводимости и коэффициенту диффузии, полученные в [6], дополнены результатами [8] и представлены в безразмерном виде  $\sigma^* = \sigma/\omega_p$ . В данной работе получено  $\sigma^* = 1.26/4\pi = 0.103$ ,  $D^* = \frac{D}{\omega_p R_i^2} = \frac{0.343}{\sqrt{3/2}} = 0.28$ .

На рис. 2 хорошо виден участок падения проводимости при  $\Gamma < 1$ . Здесь численные данные ММД [6] и [8] практически совпадают. Давно замечено, что проводимость в этой области описывается минимальной, причем теоретически оправданной, коррекцией кулоновского логарифма [9]. При  $\Gamma > 1$  имеются расчеты только [6] и по данной модели. Их расхождение связано, по видимому, с тем, что в [6] кулоновский потенциал скорректирован в начале координат. Если это потенциал “с полочкой”, то ее влияние будет заметно именно при больших значениях параметра  $\Gamma$  (размер ячейки ВЗ сравнивается с размером “полочки”). Не сомневаясь в правильности расчетов,



**Рис. 2.** Зависимость безразмерной проводимости полностью ионизованной плазмы от параметра неидеальности  $\Gamma$ : 1 – расчет по формуле Спитцера–Ландау (см. [8]), 2 – настоящая работа, 3 – [8], 4 – [6], 5 – эксперимент [3].



**Рис. 3.** Безразмерный коэффициент диффузии: 1–4 – то же, что на рис. 2.

их все же следует рассматривать как модельные, которые зависят от конкретной процедуры коррекции кулоновского потенциала в начале координат. Полученная в данной работе проводимость (назовем ее “столкновительной”) качественно совпадает с численными данными и соответствует асимптотике экспериментальных данных [3]. Другие экспериментальные данные, рассмотренные в [8], не приводятся, так как

точность процедуры извлечения проводимости “полностью ионизованной” плазмы из измеренной проводимости “частично ионизованной” плазмы инертных газов и особенно воздуха невелика. Данные по коэффициенту диффузии (рис. 3) только подтверждают сделанные выводы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнен модельный расчет коррелятора скорости электрона в плотной классической плазме. Предположено, что траектория электрона состоит из кусочков параболических траекторий, лежащих внутри ячеек Вигнера–Зейтца. Прямолинейные участки пролета отсутствуют. С использованием полученного коррелятора рассчитаны коэффициент диффузии и проводимость. Оказалось, что рассчитанная таким образом проводимость пропорциональна плазменной частоте и практически совпадает с предельной проводимостью, предложенной в работе [2], и асимптотикой экспериментальных данных [3].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фортон В.Е., Храпак А.Г., Якубов И.Т. Физика неидеальной плазмы. М.: Физматлит, 2010.
2. Асиновский Э.И., Валуев А.А. Электропроводность и характерные частоты в неидеальной плазме // ТВТ. 1980. Т. 18. № 6. С. 1318.
3. Дихтер И.Я., Зейгарник В.А. Уравнение состояния и проводимость цезиевой плазмы при давлениях 50–500 атм // ДАН СССР. 1976. Т. 227. № 3. С. 656.
4. Смит Ф. Рассмотрение химических реакций в высокотемпературных газах в рамках теории столкновений. В сб.: Кинетические процессы в газах и плазме / Под ред. Хохштима А. М.: Атомиздат, 1972. С. 277.
5. Kim S., Ross J. Viscosity of Moderately Dense Gases // J. Chem. Phys. 1965. Т. 42. С. 263.
6. Норман Г.Э., Морозов И.В. Столкновения и плазменные волны в неидеальной плазме // ЖЭТФ. 2005. Т. 127. С. 412.
7. Zelener B.B., Zelener B.V., Manykin E.A., Bronin S.Y., Bobrov A.A. Self-diffusion and Conductivity in an Ultracold Strongly Coupled Plasma. Calculation by the Method of Molecular Dynamics // J. Phys.: Conf. Ser. 2018. V. 946. P. 012126.
8. Bobrov A.A., Bunkov A.M., Bronin S.Y., Klyarfeld A.B., Zelener B.B., Zelener B.V. Conductivity and Diffusion Coefficients in Fully Ionized Strongly Coupled Plasma: Method of Molecular Dynamics // Phys. Plasmas. 2019. V. 26. P. 082102.
9. Хомкин А.Л., Шумихин А.С. Проводимость неидеальной полностью ионизованной плазмы: сравнение результатов расчета методом молекулярной динамики и модельного подхода // ТВТ. 2019. Т. 57. № 4. С. 501.
10. Валуев А.А. О колебаниях электронов в неидеальной плазме // ТВТ. 1977. Т. 15. № 6. С. 1143.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Физматлит, 2004. С. 51.