

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Рацеев, О. И. Череватенко, О customary-пространствах алгебр Лейбница–Пуассона,
Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика,
2020, том 20, выпуск 3, 290–296

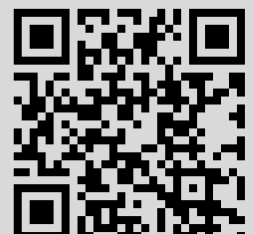
<https://www.mathnet.ru/isu857>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

14 мая 2025 г., 08:19:06





УДК 512.572

О customary-пространствах алгебр Лейбница – Пуассона

С. М. Рацеев, О. И. Череватенко

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, Россия, 432017, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42, ratseevsm@mail.ru

Череватенко Ольга Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова, Россия, 432071, г. Ульяновск, площадь Ленина, д. 4/5, chai@pisem.net

Пусть K — основное поле нулевой характеристики. Хорошо известно, что в этом случае вся информация о многообразии линейных алгебр V содержится в его полилинейных компонентах $P_n(V)$, $n \in \mathbb{N}$, где $P_n(V)$ — линейная оболочка полилинейных слов от n различных букв в свободной алгебре $K(X, V)$. Д. Фаркаш для случая алгебр Пуассона ввел понятие customary-полиномов и доказал, что любое нетривиальное многообразие алгебр Пуассона удовлетворяет некоторому customary-тождеству. Алгебры Лейбница – Пуассона являются обобщениями алгебр Пуассона. В работе исследуется последовательность customary-пространств свободной алгебры Лейбница – Пуассона $\{Q_{2n}\}_{n \geq 1}$. Приводится базис и размерность пространств Q_{2n} . Доказан аналог теоремы Д. Фаркаша для случая алгебр Лейбница – Пуассона: в случае основного поля нулевой характеристики любое нетривиальное тождество свободной алгебры Лейбница – Пуассона имеет в качестве своих следствий нетривиальные тождества в customary-пространствах.

Ключевые слова: алгебра Пуассона, алгебра Лейбница – Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.

Поступила в редакцию: 20.05.2019 / Принята: 09.09.2019 / Опубликовано: 31.08.2020

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)

DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-290-296>

Линейная алгебра $A(+, \{, \}, K)$ с K -биллинейной операцией умножения $\{, \}$ над полем K называется *алгеброй Лейбница*, если в ней выполнено тождество

$$\{\{x, y\}, z\} = \{\{x, z\}, y\} + \{x, \{y, z\}\}.$$

Алгебры Лейбница являются обобщениями алгебр Ли.

Далее везде предполагается, если это специально не оговорено, что основное поле K произвольно.

Векторное пространство A над полем K с двумя K -биллинейными операциями умножения \cdot и $\{, \}$ называется алгеброй Лейбница – Пуассона, если относительно операции \cdot пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции $\{, \}$ — алгеброй Лейбница, и данные операции связаны правилами

$$\begin{aligned} \{a \cdot b, c\} &= a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b, \\ \{c, a \cdot b\} &= a \cdot \{c, b\} + \{c, a\} \cdot b, \end{aligned} \tag{1}$$

где $a, b, c \in A$. Если в алгебре Лейбница – Пуассона выполнено тождество $\{x, x\} = 0$, то данная алгебра будет являться алгеброй Пуассона. Таким образом, алгебры



Лейбница – Пуассона являются обобщениями алгебр Пуассона, которые возникают естественным образом в некоторых разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физике и т.д. Обзоры работ по РІ-алгебрам Пуассона и Лейбница – Пуассона можно найти в работах [1, 2].

Договоримся опускать скобки $\{, \}$ при их левонормированной расстановке: $\{\{a, b\}, c\} = \{a, b, c\}$.

Пусть $L(X)$ – свободная алгебра Лейбница, $F(X)$ – свободная алгебра Лейбница – Пуассона, где $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ – счетное множество свободных образующих. Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных x_1, \dots, x_n .

Определение тождества, РІ-алгебры, многообразия алгебр Лейбница – Пуассона вводятся стандартным образом. Все необходимые сведения о многообразиях РІ-алгебр можно найти, например, в монографиях [3–5].

Лемма 1 (см. [2]). *Базис пространства P_n состоит из всех элементов вида*

$$x_{k_1} \cdot \dots \cdot x_{k_r} \cdot \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\} \cdot \dots \cdot \{x_{j_1}, \dots, x_{j_t}\}, \quad (2)$$

для каждого из которых выполнены следующие условия:

(i) $r \geq 0$, причем $k_1 < \dots < k_r$ при $r > 0$, а при $r = 0$ моном $x_{k_1} \cdot \dots \cdot x_{k_r}$ отсутствует;

(ii) каждая из переменных x_1, \dots, x_n встречается в (2) ровно один раз;

(iii) каждый множитель $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}, \dots, \{x_{j_1}, \dots, x_{j_t}\}$ в (2) левонормирован и имеет длину ≥ 2 ;

(iv) множители в (2) упорядочены по длине: $s \leq \dots \leq t$;

(v) если два соседних множителя в (2), являющиеся скобками $\{, \}$, имеют одинаковую длину

$$\dots \cdot \{x_{p_1}, \dots, x_{p_s}\} \cdot \{x_{q_1}, \dots, x_{q_s}\} \cdot \dots,$$

то $p_1 < q_1$.

Обозначим через Γ_n подпространство в P_n , являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\} \cdot \dots \cdot \{x_{j_1}, \dots, x_{j_t}\}, \quad s \geq 2, \dots, \quad t \geq 2.$$

Тогда из сказанного выше следует, что базисом пространства Γ_n будут являться все элементы вида (2) с условиями (ii)–(v) из леммы 1 при $r = 0$.

Выделим в пространстве Γ_{2n} подпространство Q_{2n} , порожденное элементами вида

$$\{x_{a_1}, x_{a_2}\} \cdot \{x_{a_3}, x_{a_4}\} \cdot \dots \cdot \{x_{a_{2n-1}}, x_{a_{2n}}\}.$$

По аналогии со случаем алгебр Пуассона пространства Q_{2n} назовем customary-пространствами. Пусть S_n – симметрическая группа степени n .

Лемма 2. 1. *Следующие полилинейные элементы от переменных x_1, \dots, x_{2n}*

$$\{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \dots \cdot \{x_{\tau(2n-1)}, x_{\tau(2n)}\}, \quad (3)$$

$$\tau \in S_{2n}, \quad \tau(1) < \tau(3) < \dots < \tau(2n-1), \quad (4)$$

образуют базис пространства Q_{2n} ;

$$2. \dim Q_{2n} = \frac{(2n)!}{n!}.$$



Доказательство. Понятно, что пространство Q_{2n} является линейной оболочкой элементов вида (3) с условием (4). Покажем, что данные элементы линейно независимы.

Пусть A_L — некоторая алгебра Ли с умножением $[\cdot, \cdot]$. В векторном пространстве $A = A_L \oplus A_L$ над полем K определим операцию умножения $[\cdot, \cdot]$ следующим образом:

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1], [x_2, y_1]), \tag{5}$$

где $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in A$. Полученная алгебра A будет являться алгеброй Лейбница. Действительно, нетрудно проверить, что A является линейной алгеброй над полем K . Покажем, что в A выполнено тождество Лейбница. Учтывая, что A_L является алгеброй Ли, получаем:

$$\begin{aligned} [(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)] &= ([x_1, y_1, z_1], [x_2, y_1, z_1]), \\ [(x_1, x_2), (z_1, z_2), (y_1, y_2)] &= ([x_1, z_1, y_1], [x_2, z_1, y_1]) = -([z_1, x_1, y_1], [z_1, x_2, y_1]), \\ [(x_1, x_2), [(y_1, y_2), (z_1, z_2)]] &= ([x_1, [y_1, z_1]], [x_2, [y_1, z_1]]) = -([y_1, z_1, x_1], [y_1, z_1, x_2]). \end{aligned}$$

Для доказательства тождества Лейбница для левых частей данных трех равенств остается применить тождество Якоби для правых частей.

Далее, пусть A — некоторая алгебра Лейбница с умножением $[\cdot, \cdot]$ над полем K . Пусть v_1, v_2, \dots — линейный базис пространства A над K . Рассмотрим коммутативное кольцо полиномов $K[v_1, v_2, \dots]$. Скобки $\{, \}$ для элементов v_i определим как умножение в A : $\{v_i, v_j\} = [v_i, v_j]$. Распространим скобки $\{, \}$ на все $K[v_1, v_2, \dots]$, используя линейность и правила (1). Построенная таким образом алгебра будет являться алгеброй Лейбница – Пуассона, которую обозначим через $LP(A)$.

Пусть $H_{2n} = K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$ — ассоциативное коммутативное кольцо многочленов. Превратим H_{2n} в алгебру Пуассона, введя в H_{2n} скобки Пуассона $\{, \}$ следующим образом:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \frac{\partial g}{\partial Y_i} - \frac{\partial f}{\partial Y_i} \frac{\partial g}{\partial X_i} \right), \quad f, g \in H_{2n}.$$

Полученная алгебра называется алгеброй Гамильтона [6].

Пусть $\tilde{H}_{2n} = H_{2n} \oplus H_{2n}$ — алгебра Лейбница с операцией умножения (5). Рассмотрим алгебру Лейбница – Пуассона $LP(\tilde{H}_{2n})$.

Обозначим через T_{2n} — множество всех перестановок из S_{2n} с условием (4). Предположим, что для некоторого n элементы вида (3) линейно зависимы:

$$\sum_{\tau \in T_{2n}} \alpha_\tau \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \dots \cdot \{x_{\tau(2n-1)}, x_{\tau(2n)}\} = 0, \quad \alpha_\tau \in K,$$

где не все α_τ равны нулю. Пусть $\alpha_\sigma \neq 0, \sigma \in T_{2n}$. В данной линейной комбинации сделаем такие подстановки элементов алгебры $LP(\tilde{H}_{2n})$:

$$\begin{aligned} x_{\sigma(1)} &\rightarrow (0, X_1), & x_{\sigma(2)} &\rightarrow (Y_1, 0), \\ &\dots & & \\ x_{\sigma(2n-1)} &\rightarrow (0, X_n), & x_{\sigma(2n)} &\rightarrow (Y_n, 0). \end{aligned}$$



Тогда рассматриваемая линейная комбинация превратится в равенство

$$\alpha_\sigma(0, 1)^n = (0, 0),$$

что является верным только при $\alpha_\sigma = 0$. Противоречие.

Условие 2 следует из условия 1. □

Моном $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$, $n \geq 2$, свободной алгебры Лейбница $L(X)$ назовем лейбницевым мономом длины n . Будем говорить, что элемент вида $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} \cdot \dots \cdot \{y_{j_1}, \dots, y_{j_m}\}$ свободной алгебры Лейбница – Пуассона $F(X)$ является произведением лейбницевых мономов.

Лемма 3. В полилинейном лейбницевом мономе $\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ от переменных x_1, \dots, x_n вместо переменной x_i , $1 \leq i \leq n$, подставим $x_i \cdot x_{n+1}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \{x_1, \dots, x_i \cdot x_{n+1}, \dots, x_n\} = \\ & = x_i \cdot \{x_1, \dots, x_{n+1}, \dots, x_n\} + x_{n+1} \cdot \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\} + g(x_1, \dots, x_{n+1}), \end{aligned} \quad (6)$$

где g — полилинейный элемент от переменных x_1, \dots, x_{n+1} свободной алгебры Лейбница – Пуассона, являющийся линейной комбинацией произведений лейбницевых мономов, длина каждого из которых не превосходит значения $n - 1$, в случае если $i < n$, и $g = 0$, если $i = n$.

Доказательство. Обозначим $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\}$. Применим математическую индукцию по параметру $n - i$. При $n - i = 0$ тождество (6) выполнено. Пусть $n - i = 1$. Тогда

$$\{A, x_{n-1} \cdot x_{n+1}, x_n\} = \{A, x_n, x_{n-1} \cdot x_{n+1}\} + \{A, \{x_{n-1} \cdot x_{n+1}, x_n\}\}.$$

При этом для первого и второго слагаемых выполнены соответствующие тождества:

$$\begin{aligned} & \{A, x_n, x_{n-1} \cdot x_{n+1}\} = x_{n-1} \cdot \{A, x_n, x_{n+1}\} + x_{n+1} \cdot \{A, x_n, x_{n-1}\}, \\ & \{A, \{x_{n-1} \cdot x_{n+1}, x_n\}\} = \{A, x_{n-1} \cdot \{x_{n+1}, x_n\}\} + \{A, x_{n+1} \cdot \{x_{n-1}, x_n\}\} = \\ & = x_{n-1} \cdot \{A, \{x_{n+1}, x_n\}\} + \{x_{n+1}, x_n\} \cdot \{A, x_{n-1}\} + \\ & + x_{n+1} \cdot \{A, \{x_{n-1}, x_n\}\} + \{x_{n-1}, x_n\} \cdot \{A, x_{n+1}\} = \\ & = x_{n-1} \cdot \{A, x_{n+1}, x_n\} - x_{n-1} \cdot \{A, x_n, x_{n+1}\} + \{x_{n+1}, x_n\} \cdot \{A, x_{n-1}\} + \\ & + x_{n+1} \cdot \{A, x_{n-1}, x_n\} - x_{n+1} \cdot \{A, x_n, x_{n-1}\} + \{x_{n-1}, x_n\} \cdot \{A, x_{n+1}\}. \end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned} & \{A, x_{n-1} \cdot x_{n+1}, x_n\} = x_{n-1} \cdot \{A, x_{n+1}, x_n\} + x_{n+1} \cdot \{A, x_{n-1}, x_n\} + \\ & + \{x_{n+1}, x_n\} \cdot \{A, x_{n-1}\} + \{x_{n-1}, x_n\} \cdot \{A, x_{n+1}\}. \end{aligned}$$

Предположим, что утверждение верно для $n - i < k$, $k \geq 2$. Пусть $n - i = k$. Тогда

$$\{A, x_i \cdot x_{n+1}, \dots, x_n\} = \{A, x_{i+1}, x_i \cdot x_{n+1}, \dots, x_n\} + \{A, \{x_i \cdot x_{n+1}, x_{i+1}\}, \dots, x_n\}.$$

Применяя предположение индукции, получаем:

$$\begin{aligned} & \{A, x_{i+1}, x_i \cdot x_{n+1}, \dots, x_n\} = x_i \cdot \{A, x_{i+1}, x_{n+1}, \dots, x_n\} + x_{n+1} \cdot \{A, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n\} + g_1, \\ & \{A, \{x_i \cdot x_{n+1}, x_{i+1}\}, \dots, x_n\} = \\ & = x_i \cdot \{A, \{x_{n+1}, x_{i+1}\}, \dots, x_n\} + \{x_{n+1}, x_{i+1}\} \cdot \{A, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n\} + \end{aligned}$$



$$+x_{n+1} \cdot \{A, \{x_i, x_{i+1}\}, \dots, x_n\} + \{x_i, x_{i+1}\} \cdot \{A, x_{n+1}, x_{i+2}, \dots, x_n\} + g_2,$$

где g_1, g_2 — линейные комбинации произведений лейбницевых мономов, длина каждого из которых не превосходит значения $n - 1$. В итоге

$$\{A, x_i \cdot x_{n+1}, \dots, x_n\} = x_i \cdot \{A, x_{n+1}, x_{i+1}, \dots, x_n\} + x_{n+1} \cdot \{A, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n\} + \{x_{n+1}, x_{i+1}\} \cdot \{A, x_i, x_{i+2}, \dots, x_n\} + \{x_i, x_{i+1}\} \cdot \{A, x_{n+1}, x_{i+2}, \dots, x_n\} + g_1 + g_2. \quad \square$$

Следующая теорема является аналогом теоремы Фаркаша [7,8] для случая алгебр Лейбница – Пуассона и показывает важность исследования пространств Q_{2n} .

Теорема. Пусть \mathbf{V} — многообразие алгебр Лейбница – Пуассона над полем нулевой характеристики, в котором выполнено нетривиальное тождество. Тогда в \mathbf{V} выполняется нетривиальное тождество вида

$$\sum_{\tau \in T_{2m}} \alpha_{\tau} \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \dots \cdot \{x_{\tau(2m-1)}, x_{\tau(2m)}\} = 0. \quad (7)$$

Доказательство. Из леммы 3 работы [2] следует, что в случае основного поля нулевой характеристики идеал тождеств $Id(\mathbf{V})$ многообразия алгебр Лейбница – Пуассона \mathbf{V} порождается совокупностью полилинейных тождеств из последовательности $\Gamma_n \cap Id(\mathbf{V})$, $n \geq 2$. Поэтому пусть $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ — нетривиальное тождество многообразия \mathbf{V} , где $f \in \Gamma_n \cap Id(\mathbf{V})$ для некоторого n .

Функция $f(x_1, \dots, x_n)$ является нетривиальной линейной комбинацией элементов вида (2) при $r = 0$. Предположим, что элемент f не имеет требуемый вид (7). Тогда в элементе f среди всех слагаемых с ненулевыми коэффициентами зафиксируем такое, которое имеет лейбницевый моном максимальной длины. Пусть это слагаемое имеет вид

$$\alpha \{ \dots \} \cdot \dots \cdot \{ \dots \} \cdot \{x_{i_1}, \dots, x_{i_d}\}, \quad 0 \neq \alpha \in K,$$

где $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_d}\}$ — лейбницевый моном максимальной длины $d > 2$. Без ограничения общности можно считать, что $i_1 = n$. В элементе f вместо переменной x_n подставим $x_n \cdot x_{n+1}$. Тогда из леммы 3 следует, что

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n \cdot x_{n+1}) = x_n \cdot f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}) + x_{n+1} \cdot f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) + g, \quad (8)$$

где $g = g(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \Gamma_{n+1}$, причем ни одно слагаемое с ненулевым коэффициентом элемента g не содержит лейбницевых мономов длины d , в которых на первом месте находится либо переменная x_n , либо переменная x_{n+1} . Так как левая часть равенства (8), а также первые два слагаемых правой части данного равенства принадлежат $Id(\mathbf{V})$, то $g \in \Gamma_{n+1} \cap Id(\mathbf{V})$.

Если элемент g имеет вид (7), то все доказано. Иначе применяем к тождеству $g = 0$ многообразия \mathbf{V} аналогичную процедуру и т.д. В результате получим тождество требуемого вида (7). \square

Заметим, что в работе [9] доказан аналог теоремы Фаркаша для унитарных обобщенных PI алгебр Пуассона и унитарных PI алгебр жордановых скобок, а в работе [10] доказана теорема Фаркаша для многообразий общих алгебр Пуассона.

Библиографический список

1. Рацеев С. М. Числовые характеристики многообразий алгебр Пуассона // Фундамент. и прикл. матем. 2016. Т. 21, вып. 2. С. 217–242.



2. Рацеев С. М., Череватенко О. И. Числовые характеристики алгебр Лейбница – Пуассона // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 1. С. 143–159.
3. Бахтурин Ю. А. Тожества в алгебрах Ли. М. : Наука, 1985. 448 с.
4. Giamb Bruno A., Zaicev M. V. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. AMS Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 122. Providence R.I., 2005. 352 p.
5. Drensky V. Free algebras and PI-algebras : Graduate course in algebra. Singapore : Springer-Verlag, 2000. 271 p.
6. Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M., Regev A. Poisson PI algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 2007. Vol. 359, № 10. P. 4669–4694.
7. Farkas D. R. Poisson polynomial identities // Comm. Algebra. 1998. Vol. 26, № 2. P. 401–416.
8. Farkas D. R. Poisson polynomial identities II // Arch. Math. 1999. Vol. 72, iss. 4. P. 252–260. DOI: <https://doi.org/10.1007/s000130050329>
9. Kaygorodov I. Algebras of Jordan brackets and generalized Poisson algebras // Linear and Multilinear Algebra. 2017. Vol. 65, iss. 6. P. 1142–1157. DOI: <https://doi.org/10.1080/03081087.2016.1229257>
10. Kolesnikov P., Makar-Limanov L., Shestakov I. The Freiheitssatz for generic Poisson algebras // SIGMA. 2014. Vol. 10, iss. 115. 15 p. DOI: <https://doi.org/10.3842/SIGMA.2014.115>

Образец для цитирования:

Рацеев С. М., Череватенко О. И. О customary-пространствах алгебр Лейбница – Пуассона // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, вып. 3. С. 290–296. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-290-296>

On Customary Spaces of Leibniz – Poisson Algebras

S. M. Ratseev, O. I. Cherevatenko

Sergey M. Ratseev, <http://orcid.org/0000-0003-4995-9418>, Ulyanovsk State University, 42 Leo Tostoy St., Ulyanovsk 432017, Russia, ratseevsm@mail.ru

Olga I. Cherevatenko, <http://orcid.org/0000-0003-3931-9425>, Ilya Ulyanov State Pedagogical University, 4/5 Lenina Sq., Ulyanovsk 432071, Russia, chai@pisem.net

Let K be a base field of characteristic zero. It is well known that in this case all information about varieties of linear algebras \mathbf{V} contains in its polylinear components $P_n(\mathbf{V})$, $n \in \mathbb{N}$, where $P_n(\mathbf{V})$ is a linear span of polylinear words of n different letters in a free algebra $K\langle X, \mathbf{V} \rangle$. D. Farkas defined customary polynomials and proved that every Poisson PI-algebra satisfies some customary identity. Poisson algebras are special case of Leibniz – Poisson algebras. In the paper the sequence of customary spaces of the free Leibniz – Poisson algebra $\{Q_{2n}\}_{n \geq 1}$ is investigated. The basis and dimension of spaces Q_{2n} are given. It is also proved that in case of a base field of characteristic zero any nontrivial identity of the free Leibniz – Poisson algebra has nontrivial identities in customary spaces.

Keywords: Poisson algebra, Leibniz – Poisson algebra, variety of algebras, growth of variety.

Received: 20.05.2019 / Accepted: 09.09.2019 / Published: 31.08.2020

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0)



References

1. Ratseev S. M. Numerical characteristics of varieties of Poisson algebras. *J. Math. Sci.*, 2019, vol. 237, iss. 2, pp. 304–322.
2. Ratseev S. M., Cherevatenko O. I. Numerical characteristics of Leibniz – Poisson algebras. *Chebyshevskii Sbornik*, 2017, vol. 18, no. 1, pp. 143–159 (in Russian).
3. Bahturin Yu. A. *Identical relations in Lie algebras*. Utrecht, VNU Science Press, 1987. 310 p. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 1985. 448 p.).
4. Giambruno A., Zaicev M. V. *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*. AMS Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 122. Providence R.I., 2005. 352 p.
5. Drensky V. *Free algebras and PI-algebras: Graduate course in algebra*. Singapore, Springer-Verlag, 2000. 271 p.
6. Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M., Regev A. Poisson PI algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2007, vol. 359, no. 10, pp. 4669–4695. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-07-04008-1>
7. Farkas D. R. Poisson polynomial identities. *Comm. Algebra*, 1998, vol. 26, no. 2, pp. 401–416.
8. Farkas D. R. Poisson polynomial identities II. *Arch. Math.*, 1999, vol. 72, iss. 4, pp. 252–260. DOI: <https://doi.org/10.1007/s000130050329>
9. Kaygorodov I. Algebras of Jordan brackets and generalized Poisson algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, 2017, vol. 65, iss. 6, pp. 1142–1157. DOI: <https://doi.org/10.1080/03081087.2016.1229257>
10. Kolesnikov P., Makar-Limanov L., Shestakov I. The Freiheitssatz for generic Poisson algebras. *SIGMA*, 2014, vol. 10, iss. 115, 15 p. DOI: <https://doi.org/10.3842/SIGMA.2014.115>

Cite this article as:

Ratseev S. M., Cherevatenko O. I. On Customary Spaces of Leibniz – Poisson Algebras. *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2020, vol. 20, iss. 3, pp. 290–296 (in Russian). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-3-290-296>
