

## ЛИТЕРАТУРА

1. Карлович Ю.И., Кравченко В.Г. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1983, т. 47, № 5, с. 1030–1077.
2. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973. 426 с.
3. Карлович Ю.И., Кравченко В.Г. — ДАН, 1980, т. 252, № 6, с. 1307–1311.
4. Мясников А.Г., Сазонов Л.И. — ДАН, 1980, т. 254, № 5, с. 1076–1080.
5. Симоненко И.Б. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1965, т. 29, № 3, с. 567–586.
6. Антоневич А.Б. — Матем. сб., 1984, т. 124, № 1, с. 3–23.
7. Карлович Ю.И. — ДАН, 1974, т. 216, № 1, с. 32–35.
8. Антоневич А.Б., Рыбкин В.Б. — Докл. АН БССР, 1975, т. 19, № 1, с. 5–7.
9. Карапетянц Н.К. — Изв. АН АрмССР. Сер. матем., 1977, т. 12, № 3, с. 165–177.
10. Семенюта В.Н. — ДАН, 1977, т. 237, № 6, с. 1301–1302.
11. Карлович Ю.И., Кравченко В.Г. — ДАН, 1976, т. 231, № 2, с. 277–280.
12. Карлович Ю.И., Кравченко В.Г. — Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 12, с. 2212–2223.
13. Карлович Ю.И., Кравченко В.Г. — ДАН, 1978, т. 239, № 1, с. 38–41.
14. Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах. М.: Мир, 1973. 136 с.
15. Антоневич А.Б., Лебедев А.В. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1983, т. 47, № 5, с. 915–941.

УДК 517.956.227

МАТЕМАТИКА

А.С. МАКИН

### О ФОРМУЛЕ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 22 VI 1987)

Настоящая работа является продолжением работ В.А. Ильина и Е.И. Моисеева [1, 2].

Рассмотрим оператор Шредингера

$$(1) \quad Lu = \Delta u - q(x)u,$$

заданный в произвольной области  $G$  пространства  $R^N$ . Следуя В.А. Ильину [3], под собственной функцией оператора (1), отвечающей комплексному собственному значению  $\lambda$ , будем понимать любую, не равную тождественно нулю комплекснозначную функцию  $u^0(x)$  из класса  $C^{(2)}(G)$ , являющуюся регулярным решением уравнения  $Lu^0 + \lambda u^0 = 0$ .

Аналогично, под присоединенной функцией порядка  $m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , отвечающей тому же  $\lambda$  и собственной функции  $u^0(x)$ , будем понимать любую комплекснозначную функцию  $u^m(x)$  из класса  $C^{(2)}(G)$ , являющуюся регулярным решением уравнения  $Lu^m + \lambda u^m = u^{m-1}$ .

Как и в работе [1], введем следующие обозначения:  $x$  — произвольная точка области  $G$ ,  $r$  — сферический радиус, не превышающий минимума расстояния точки  $x$  до границы области  $G$ ,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1})$  — угловые гиперсферические координаты,  $d\theta$  — элемент площади в угловых гиперсферических координатах,  $\int \dots d\theta$  — интеграл по всем угловым координатам на поверхности  $N$ -мерной гиперсферы,  $Y_n(\theta)$  — любая гиперсферическая функция порядка  $n$ . Обозначим также:

$$W_n(r, t, \lambda) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{t}{r} \right)^{\nu} t [N_{\nu+n}(r\mu) J_{\nu+n}(t\mu) - N_{\nu+n}(t\mu) J_{\nu+n}(r\mu)],$$

где  $\nu = (N - 2)/2$ ,  $\mu = \sqrt{\lambda}$ ,  $\operatorname{Re} \mu \geq 0$ . Пусть  $q(x)$  — произвольная комплексная функция из класса  $C^{(n)}(G)$ ,  $N > 1$ . Тогда имеет место следующая формула среднего значения для собственных и присоединенных функций оператора (1):

$$(2) \quad \frac{1}{\alpha_n} \int_{\theta}^m u(x + \theta r) Y_n(\theta) d\theta = \\ = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \frac{J_{\nu+n}(r\mu) r^n}{(r\mu)^{\nu+n}} \int_{\theta} \frac{\partial^n u^{m-k}(x, \theta)}{\partial r^n} Y_n(\theta) d\theta + \\ + \sum_{k=0}^m \int_0^r \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} W_n(r, t, \lambda) dt \left[ \frac{1}{\alpha_n} \int_{\theta} q(x + \theta t) u^{m-k}(x + \theta t) Y_n(\theta) d\theta \right],$$

где  $\alpha_n = \Gamma(\nu + n + 1) \cdot 2^{\nu+n}/n!$ .

**Лемма 1.** Пусть  $Pv$  — произвольный линейный дифференциальный оператор степени  $n$ , заданный в произвольной области  $Q$  пространства  $R^N$ , а функция  $v^0(x, \lambda)$  при любом  $x \in Q$  и любом  $\lambda \in Q_\lambda$ , где  $Q_\lambda$  — некоторая область комплексной плоскости, удовлетворяет уравнению  $Pv^0 + \lambda v^0 = f(x)$ , где  $f(x)$  — непрерывная функция. Потребуем также, чтобы все функции

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} D^h v^0(x, \lambda), \quad D^h \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} v^0(x, \lambda), \quad |h| \leq n, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

были непрерывны в  $Q \times Q_\lambda$ . Определим функции  $v^m(x, \lambda)$  равенствами

$$(3) \quad v^m(x, \lambda) = -\frac{1}{m} \frac{\partial^m v^{m-1}(x, \lambda)}{\partial \lambda^m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Тогда при  $(x, \lambda) \in Q \times Q_\lambda$  имеют место соотношения

$$Pv^m + \lambda v^m = v^{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Доказательство будем проводить по индукции. При  $m = 1$  получим

$$Pv^1 + \lambda v^1 = -\left( P \frac{\partial v^0}{\partial \lambda} + \lambda \frac{\partial v^0}{\partial \lambda} \right) = -\left( \frac{\partial}{\partial \lambda} (Pv^0 + \lambda v^0) - v^0 \right) = v^0.$$

Пусть лемма справедлива при  $m = i$ . Докажем ее при  $m = i + 1$ . Исходя из равенства (3), будем иметь

$$Pv^{i+1} + \lambda v^{i+1} = P \left( -\frac{1}{i+1} \frac{\partial v^i}{\partial \lambda} \right) - \frac{\lambda}{i+1} \frac{\partial v^i}{\partial \lambda} = \\ = -\frac{1}{i+1} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} (Pv^i + \lambda v^i) - v^i \right) = -\frac{1}{i+1} \left( \frac{\partial v^{i-1}}{\partial \lambda} - v^i \right) = v^i.$$

**Лемма 2.** Обозначим

$$f_0(r, \lambda) = \frac{J_{\nu+n}(r\mu) r^n}{(r\mu)^{\nu+n}}, \quad f_i(r, \lambda) = -\frac{\partial}{i \partial \lambda} f_{i-1}(r, \lambda), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Пусть

$$h_1(r, \lambda) = \int_0^r W_n(r, t, \lambda) f_0(t, \lambda) dt,$$

$$h_i(r, \lambda) = \int_0^r W_n(r, t, \lambda) h_{i-1}(t, \lambda) dt, \quad i = 2, \dots, m.$$

Пусть

$$F_0(r, x, \lambda) = \int_0^r W_n(r, t, \lambda) \varphi(t, x) dt,$$

где

$$(4) \quad |\varphi(x, t)| \leq ct^n.$$

$$\text{Обозначим } F_i(r, x, \lambda) = -\frac{\partial}{i\partial\lambda} F_{i-1}(r, x, \lambda), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$H_1(r, x, \lambda) = \int_0^r W_n(r, t, \lambda) F_0(t, x, \lambda) dt,$$

$$H_i(r, x, \lambda) = \int_0^r W_n(r, t, \lambda) H_{i-1}(t, x, \lambda) dt, \quad i = 2, \dots, m.$$

Тогда справедливы равенства

$$h_i(r, \lambda) = f_i(r, \lambda) = o(r^n), \quad H_i(r, x, \lambda) = F_i(r, x, \lambda) = o(r^n), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Доказательство будет проводиться по индукции. Пусть  $i = 1$ . Введем в рассмотрение оператор  $P$ :

$$Pv = v'' + \frac{N-1}{2} v' - \frac{n(n+N-2)}{r^2} v, \quad r > 0.$$

Так как (см. [1]) функции  $f_0(r, \lambda)$  и  $F_0(r, x, \lambda)$  удовлетворяют соответственно уравнениям  $Pf_0 + \lambda f_0 = 0$  и  $P_r F_0 + \lambda F_0 = \varphi(r, x)$ , то согласно лемме 1 функция  $f_1(r, \lambda)$  есть частное решение уравнения

$$(5) \quad Pv + \lambda v = f_0,$$

а функция  $F_1(r, x, \lambda)$  есть частное решение уравнения

$$(6) \quad Pv + \lambda v = F_0.$$

Из представления для общих решений уравнений (5), (6) следует, что

$$(7) \quad f_1(r, \lambda) = h_1(r, \lambda) + A_1 \frac{J_{\nu+n}(r\mu) r^n}{(r\mu)^{\nu+n}} + B_1 \frac{N_{\nu+n}(r\mu) r^n}{(r\mu)^{\nu+n}};$$

$$(8) \quad F_1(r, x, \lambda) = H_1(r, x, \lambda) + A_2 \frac{J_{\nu+n}(r\mu) r^n}{(r\mu)^{\nu+n}} + B_2 \frac{N_{\nu+n}(r\mu) r^n}{(r\mu)^{\nu+n}},$$

где  $A_1, B_1, A_2, B_2$  — любые постоянные. Заметим, что

$$f_1(r, \lambda) = \frac{J_{\nu+n+1}(r\mu) r^{n+2}}{(r\mu)^{\nu+n+1} \cdot 2},$$

поэтому  $\lim_{r \rightarrow 0} f_1(r, \lambda) r^{-n} = 0$ . Из очевидных свойств функций  $W_n(r, t, \lambda)$ ,  $\frac{\partial}{\partial\lambda} W_n(r, t, \lambda)$

и неравенства (4) следует, что

$$h_1(r, \lambda) = o(r^n), \quad H_1(r, x, \lambda) = o(r^n), \quad F_1(r, x, \lambda) = o(r^n).$$

Деля обе части равенств (7), (8) на  $r^n$  и переходя к пределу при  $r \rightarrow 0$ , получим, что  $A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = 0$ . Отсюда вытекает справедливость равенств

$$f_1(r, \lambda) = h_1(r, \lambda), \quad F_1(r, x, \lambda) = H_1(r, x, \lambda).$$

Предположим, лемма 2 справедлива при  $i = k$ . Докажем ее при  $i = k + 1$ . Сог-

ласно лемме 1 функции  $f_{k+1}(r, \lambda)$  и  $F_{k+1}(r, \lambda)$  являются соответственно частными решениями уравнений

$$(9) \quad P\nu + \lambda\nu = f_k;$$

$$(10) \quad P\nu + \lambda\nu = F_k.$$

Из представления для общих решений уравнений (9), (10) и предположения индукции следует, что

$$(11) \quad f_{k+1}(r, \lambda) = h_{k+1}(r, \lambda) + A_1 \frac{J_{\nu+n}(r\mu) r^n}{(r\mu)^{\nu+n}} + B_1 \frac{N_{\nu+n}(r\mu) r^n}{(r\mu)^{\nu+n}},$$

$$(12) \quad F_{k+1}(r, x, \lambda) = H_{k+1}(r, x, \lambda) + A_2 \frac{J_{\nu+n}(r\mu) r^n}{(r\mu)^{\nu+n}} + B_2 \frac{N_{\nu+n}(r\mu) r^n}{(r\mu)^{\nu+n}},$$

где  $A_1, B_1, A_2, B_2$  — любые постоянные. Из работы [2] вытекает, что

$$f_{k+1}(r, \lambda) = \frac{J_{\nu+n+k+1}(r\mu) r^{n+2(k+1)}}{(r\mu)^{\nu+n+k+1} (k+1)! 2^{k+1}},$$

поэтому  $\lim_{r \rightarrow 0} f_{k+1}(r, \lambda) r^{-n} = 0$ . Из предположения индукции, неравенства (4) и очевидных свойств функций

$$W_n(r, t, \lambda), \quad \frac{\partial^{k+1}}{\partial \lambda^{k+1}} W_n(r, t, \lambda)$$

следует, что

$$h_{k+1}(r, \lambda) = o(r^n), \quad H_{k+1}(r, \lambda) = o(r^n), \quad F_{k+1}(r, \lambda) = o(r^n).$$

Деля обе части равенств (11), (12) на  $r^n$  и переходя к пределу при  $r \rightarrow 0$ , получим, что  $A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = 0$ . Отсюда вытекает справедливость равенств

$$f_{k+1}(r, \lambda) = h_{k+1}(r, \lambda), \quad F_{k+1}(r, x, \lambda) = H_{k+1}(r, x, \lambda).$$

Лемма 2 доказана.

При  $m = 0$  формула (2) была установлена в [1]. Если  $m \geq 1$ , то из [1] следует, что

$$(13) \quad \frac{1}{\alpha_n} \int_{\theta}^r u(x + \theta r) Y_n(\theta) d\theta = \frac{J_{\nu+n}(r\mu) r^n}{(r\mu)^{\nu+n}} \int_{\theta}^r \frac{\partial^n u(x, \theta)}{\partial r^n} Y_n(\theta) d\theta + \\ + \int_0^r W_n(r, t, \lambda) dt \left[ \frac{1}{\alpha_n} \int_{\theta}^r q(x + \theta t) u(x + \theta t) Y_n(\theta) d\theta \right] + \\ + \int_0^r W_n(r, t, \lambda) dt \left[ \frac{1}{\alpha_n} \int_{\theta}^{m-1} u(x + \theta t) Y_n(\theta) d\theta \right].$$

Преобразуя последнее слагаемое в правой части равенства (13) по формуле среднего значения и повторяя данную операцию  $m$  раз, получим

$$(14) \quad \frac{1}{\alpha_n} \int_{\theta}^r u(x + \theta r) Y_n(\theta) d\theta = \sum_{k=0}^m h_k(r, \lambda) \int_{\theta}^r \frac{\partial^n u^{m-k}(x, \theta)}{\partial r^n} Y_n(\theta) d\theta + \\ + \sum_{k=0}^m \int_0^r W_n(r, t_0, \lambda) dt_0 \int_0^{t_0} W_n(t_0, t_1, \lambda) \dots \\ \dots \int_0^{t_{k-1}} W_n(t_{k-1}, t_k, \lambda) dt_k \left[ \frac{1}{\alpha_n} \int_{\theta}^r q(x + \theta t_k) u^{m-k}(x + \theta t_k) Y_n(\theta) d\theta \right].$$

Из леммы 2 следует, что

$$(15) \quad h_k(r, \lambda) = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \frac{J_{\nu+n}(r\mu) r^n}{(r\mu)^{\nu+n}}, \quad k=0, 1, \dots, m.$$

Из результатов работы [1] вытекает, что имеют место неравенства

$$\left| \int_{\theta}^r q(x+\theta t) u^{m-k}(x+\theta t) Y_n(\theta) d\theta \right| \leq ct^n, \quad k=0, 1, \dots, m.$$

Поэтому согласно лемме 2 получим

$$(16) \quad \int_0^r W_n(r, t_0, \lambda) dt_0 \dots \\ \dots \int_0^{t_{k-1}} W_n(t_{k-1}, t_k, \lambda) dt_k \left[ \frac{1}{\alpha_n} \int_{\theta} q(x+\theta t_k) u^{m-k}(x+\theta t_k) Y_n(\theta) d\theta \right] = \\ = \int_0^r \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} W_n(r, t, \lambda) dt \left[ \frac{1}{\alpha_n} \int_{\theta} q(x+\theta t) u^{m-k}(x+\theta t) Y_n(\theta) d\theta \right].$$

Из (14)–(16) непосредственно следует формула (2).

З а м е ч а н и е 1. При  $n=0$ ,  $q(x) \equiv 0$  формула (2) установлена в [2].

З а м е ч а н и е 2. Если  $N=1$ , то аналогичным способом легко вывести следующие формулы среднего значения:

$$\frac{u^m(x+r) + u^m(x-r)}{2} = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \cos \mu r u^{m-k}(x) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m \int_0^r \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \frac{\sin \mu(r-t)}{\mu} [q(x+t) u^{m-k}(x+t) + q(x-t) u^{m-k}(x-t)] dt, \\ \frac{u^m(x+r) - u^m(x-r)}{2} = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \frac{\sin \mu r}{\mu} u^{m-k}(x) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m \int_0^r \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \frac{\sin \mu(r-t)}{\mu} [q(x+t) u^{m-k}(x+t) - q(x-t) u^{m-k}(x-t)] dt.$$

Автор выражает глубокую благодарность чл.жорр. АН СССР В.А. Ильину за внимание к настоящей работе.

Всесоюзный заочный машиностроительный институт  
Москва

Поступило  
6 VII 1987

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Моисеев Е.И. В кн.: Проблемы матем. физики и вычисл. математики. М.: Наука, 1977, с. 157–166.
2. Ильин В.А., Моисеев Е.И. – Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 10, с. 1908–1910.
3. Ильин В.А. – Там же, 1982, т. 18, № 1, с. 30–37.