Л. В. Левантовский, Особенности границы области устойчивости, *Функц. анализ и его прил.*, 1982, том 16, выпуск 1, 44–48

Функциональный анализ и его приложения,
1982, т. 16, вып. 1, 44—48.

УДК 517.9

ОСОБЕННОСТИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ

Л. В. Левантовский

Ниже классифицируются особенности границы области устойчивости в общем конечнопараметрическом семействе матриц или многочленов с точностью до диффеоморфизма. Формулируется и доказывается теорема конечности, утверждающая, что число классов особенностей конечно при любом числе параметров (т. е. что особенности границы устойчивости общих семейств не имеют модулей ни при каком числе параметров).

1. Матрица (многочлен) называется *устойчивой*, если все ее собственные числа (корни) имеют отрицательные вещественные части. Диаграммой устойчивости семейства матриц (многочленов) называется разбиение пространства параметров на область устойчивости и ее дополнение.

Теорема. *Для любого натурального s существует такой конечный список нормальных форм ростков диаграмм устойчивости, что для s-параметрического семейства матриц (многочленов) общего положения росток диаграммы устойчивости в любой точке пространства параметров приводится локальным диффеоморфизмом пространства параметров к одной из нормальных форм.*

Здесь s-параметрическим семейством называется гладкое отображение фиксированного s-мерного многообразия (называемого базой семейства или пространством параметров) в пространство матриц данного порядка (многочленов данной степени со старшим коэффициентом 1), комплексных или вещественных. Под семейством общего положения здесь понимается любое семейство из некоторого открытого всюду плотного множества в пространстве семейств, снабженном тонкой C^k-топологией Уитни, $k \geqslant 1$, либо обычной C^k-топологией, если база компактна.

2. Множество всех устойчивых матриц (многочленов) называется *областью устойчивости* в пространстве всех вещественных (комплексных) $n \times n$ матриц (приведенных многочленов степени n). Граница области устойчивости может быть стратифицирована (представлена в виде конечного объединения непересекающихся гладких многообразий, называемых стратами, таким образом, что если U и V — страты, а $\bar{U} \cap V \neq \varnothing$, то $V \subset \partial U$). Комплексные многочлены, принадлежащие границе, относятся к одному страту, если у них одинаковы числа чисто мнимых корней и их кратности. Комплексные матрицы относятся к одному страту, если между их чисто мнимыми собственными числами можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором совпадают количества и порядки жордановых клеток, относящихся к этим собственным числам. В вещественном случае число 0 следует отделять от остальных чисто мнимых. Как легко видеть, эти страты связны.

Во всех четырех случаях (многочлены или матрицы, комплексные или вещественные) справедливо

Предложение. *Для любой точки страта T границы области устойчивости существует окрестность, в которой действует без неподвижных точек локальная коммутативная группа G*, $\dim G = \dim T$, *со-*

храняющая область устойчивости и страты ее границы. Страт T локально является ее орбитой.

Группа G для каждого случая строится в пп. 6, 7.

3. Предложение. *Семейства матриц (многочленов), трансверсальные ко всем стратам границы области устойчивости, образуют открытое всюду плотное множество в C^k-топологии, $k \geqslant 1$, если база компактна, и в тонкой C^k-топологии Уитни в противном случае.*

Доказательство. Пусть G — действующая в окрестности U точки a страта T границы области устойчивости локальная группа предложения из п. 2. Из трансверсальности отображения к страту T в точке a следует локальная трансверсальность всех близких отображений к полю касательных плоскостей орбит группы G, а следовательно, и ко всем примыкающим в U к T стратам границы.

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству слабой теоремы трансверсальности стратифицированному множеству (см. [1], [4]).

4. Докажем утверждения теоремы для семейств, трансверсальных ко всем стратам границы области устойчивости (см. предложение в п. 3).

Пусть T — страт границы области устойчивости; $a, b \in T$ — точки из окрестности U, в которой действует описанная в п. 2 группа G, $\dim G = \dim T$. Пусть $A(\varepsilon)$, $B(\mu)$ — деформации точек a и b, трансверсальные к T, причем $A(\varepsilon)$ — минитрансверсальна. Тогда, проектируя вдоль орбит группы G, получим, в зависимости от размерности μ, диффеоморфизм либо субмерсию $\mu \mapsto \varepsilon$.

Следовательно, для любых s-параметрических семейств, трансверсальных страту T, ростки диаграмм устойчивости в точках пространств параметров из прообраза $T \cap U$ диффеоморфизмами приводятся друг к другу. Из связности T вытекает, что это утверждение можно распространить на весь T.

Таким образом, каждому страту границы области устойчивости T, $\operatorname{codim} T \leqslant s$, соответствует одна нормальная форма s-мерной диаграммы устойчивости.

5. Обозначим через $\mathbf{C}L_k$ ($\mathbf{R}L_k$) пространство комплексных (вещественных) многочленов степени k со старшим коэффициентом 1.

Лемма. *Пусть $p \in \mathbf{C}L_a$ и $q \in \mathbf{C}L_b$ взаимно просты. Тогда умножение многочленов задает локальный диффеоморфизм $\mathbf{C}L_a \times \mathbf{C}L_b \to \mathbf{C}L_{a+b}$ окрестности точки (p, q) на окрестность точки pq.*

То же справедливо и в вещественном случае.

Доказательство. Дифференциал этого отображения пространств одинаковой размерности имеет вид $p\,dq + q\,dp$. Из взаимной простоты p и q следует, что ядро дифференциала нулевое.

6. Укажем группу G в случае многочленов.

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}L_n$ произвольный страт T границы области устойчивости. Любая его точка имеет вид

$$p_n = (z + i\omega_1)^{n_1} \ldots (z + i\omega_k)^{n_k} q_m,$$

где ω_j попарно различны, q_m — устойчивый многочлен степени $m = n - \sum n_j$.

Согласно лемме из п. 5 умножение многочленов задает локальный диффеоморфизм $\varphi\colon \mathbf{C}L_{n_1} \times \mathbf{C}L_{n_2} \times \ldots \times \mathbf{C}L_{n_k} \times \mathbf{C}L_m \to \mathbf{C}L_n$ на окрестность точки p_n. В качестве группы G мы возьмем прямое произведение описанных ниже групп, действующих в $\mathbf{C}L_{n_1}, \ldots, \mathbf{C}L_{n_k}, \mathbf{C}L_m$. В $\mathbf{C}L_{n_j}$ действует группа $\mathbf{R}$ сдвигов аргумента вдоль мнимой оси: $(h^t r)(z) = r(z + it)$. В $\mathbf{C}L_m$ действует группа $\mathbf{C}^m$ сдвигов m коэффициентов многочлена на вектор из $\mathbf{C}^m$.

Очевидно, G имеет все свойства, указанные в п. 2.

В случае *вещественных* многочленов точка страта T имеет вид

$$p_n = x^l (x^2 + \omega_1^2)^{n_1} \dots (x^2 + \omega_k^2)^{n_k} q_m$$

(множитель x^l может отсутствовать), $\omega_j \neq 0$ и попарно различны, $m = n - 2\sum n_j - l$. В качестве группы G берется прямое произведение групп, действующих в $\mathbf{R}L_l$, $\mathbf{R}L_{2n_1}$, ..., $\mathbf{R}L_{2n_k}$, $\mathbf{R}L_m$. В $\mathbf{R}L_l$ такая группа состоит лишь из тождественного отображения. Любому многочлену из $\mathbf{R}L_{2n_j}$, близкому к многочлену $(x^2 + \omega_j^2)^{n_j}$, соответствует единственный близкий к $(z + i\omega_j)^{n_j}$ комплексный многочлен из $\mathbf{C}L_{n_j}$, являющийся делителем исходного вещественного. Легко видеть (из леммы п. 5), что это отображение $\mathbf{R}L_{2n_j} \to \mathbf{C}L_{n_j}$ является локальным диффеоморфизмом. Поэтому в качестве группы, действующей в $\mathbf{R}L_{2n_j}$ в окрестности точки $(x^2 + \omega_j^2)^{n_j}$, можно опять взять группу чисто мнимых сдвигов аргумента многочленов из $\mathbf{C}L_{n_j}$.

Так построенная группа G также будет удовлетворять условиям из п. 2.

7. Рассмотрим случай матриц. Пусть *комплексная* $n \times n$-матрица a_0 принадлежит границе области устойчивости.

Пусть a_0 приведена к жордановой нормальной форме. На пространстве матриц сопряжениями действует группа GL_n (**C**) невырожденных матриц. Рассмотрим версальную относительно действия этой группы деформацию a (λ) матрицы a_0, ортогональную к орбите a_0 в смысле поэлементного скалярного произведения матриц (см. [1]). Действие группы GL_n (**C**) задает локальный диффеоморфизм окрестности точки a_0 и прямого произведения $\Lambda \times \Gamma$ пространства параметров деформации a (λ) и некоторого подмногообразия $\Gamma \subset GL_n$ (**C**), минитрансверсального к стабилизатору матрицы a_0 в единице $e \in GL_n$ (**C**).

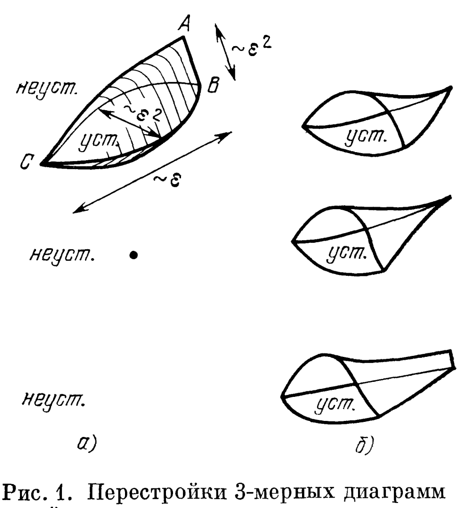

Рис. 1. Перестройки 3-мерных диаграмм устойчивости, соответствующие диаграмме 1), при $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon < 0$.

Рассмотрим в качестве группы G группу преобразований пространства $\Lambda \times \Gamma$, равную прямому произведению группы сдвигов локальных координат многообразия Γ в окрестности точки e и определенной ниже группы G_λ, действующей в Λ. Версальная деформация a (λ) имеет блочно-диагональный вид (см. [1]), где каждому собственному числу матрицы a_0 соответствует по блоку. Определим G_λ как группу сдвигов параметров, относящихся к главным диагоналям блоков, соответствующих чисто мнимым собственным числам матрицы a_0, на чисто мнимые величины и произвольных сдвигов по параметрам, относящимся к блокам, соответствующим остальным собственным числам.

Так определенная группа G удовлетворяет условиям из п. 2.

В *вещественном* случае группа G строится аналогично. Чтобы задать группу G_λ, надо воспользоваться тем, что версальная деформация вещественной матрицы с комплексными собственными числами имеет вид овеществления версальной деформации некоторой комплексной матрицы (см. [1]). В блоке, соответствующем нулевому собственному числу, допускаются лишь тождественные (нулевые) сдвиги по параметрам.

8. Списки нормальных форм ростков диаграмм устойчивости для s-параметрических семейств общего положения при $s \leqslant 3$ были получены В. И. Арнольдом [1]. Легко видеть, что среди s-мерных диаграмм содержатся $(s - 1)$-мерные, домноженные на прямую или полупрямую. Кроме того, появляются и существенно новые диаграммы. При $s = 4$ новые диаграммы появляются только в вещественном случае. Приведем нормальные формы этих диаграмм.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — координаты в пространстве параметров. Росток диаграммы берется в нуле.

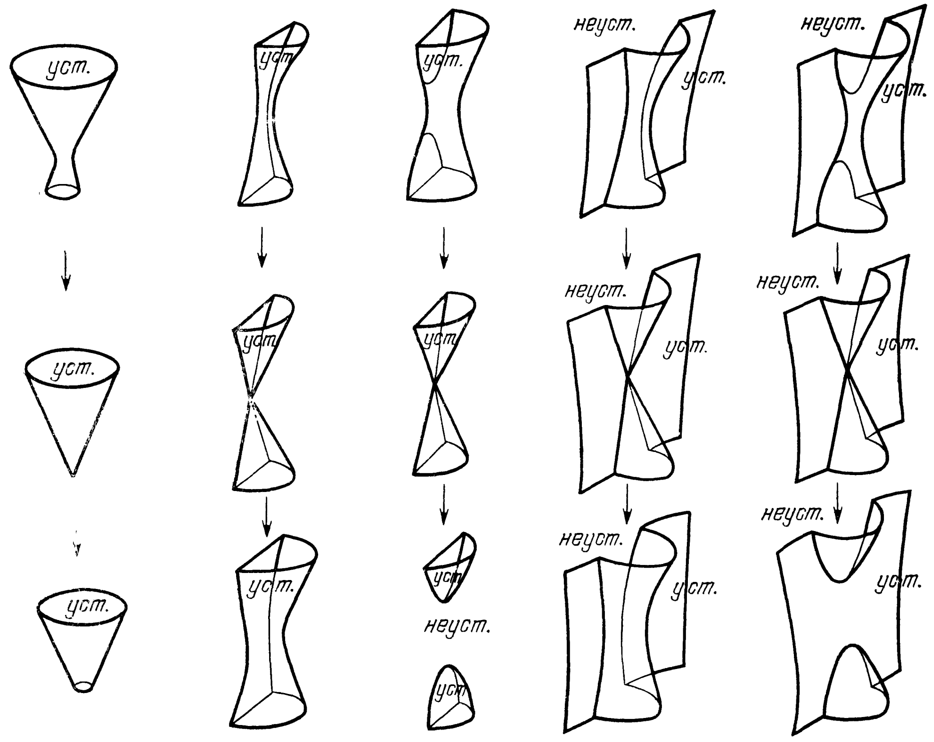

Рис. 2. Перестройки 3-мерных диаграмм устойчивости, соответствующие диаграмме 2), при $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon < 0$.

1) Для многочленов область устойчивости задается неравенствами $\alpha_1^2\alpha_4 < \alpha_3(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3)$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, \ldots, 4$.

2) Для матриц, кроме диаграммы 1), появляется еще диаграмма, на которой область устойчивости задается неравенствами $\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3\alpha_4 > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 < 0$.

Нормальным формам 1) и 2) соответствуют стандартные перестройки в общих однопараметрических семействах 3-мерных диаграмм устойчивости (рис. 1, 2).

Пусть $\varepsilon \in \mathbf{R}$ — параметр. На рис. 1, *а* точки тупика на ребре *A* трехгранного угла *B* и излома ребра *C* (терминология из [1]), сливаясь, «съедают» друг друга и область устойчивости; на рис. 1, *б* точка *C* исчезает с рождением точек *A* и *B*.

Пользуясь неравенствами Рауса — Гурвица, можно выписать ответ для любого s, однако с ростом s сложность выкладок растет факториально. Числа стратов границы устойчивости коразмерности s задаются таблицей

	1	2	3	4	5	6	7	8
C-матрицы	1	1	2	2	3	3	5	7
R-матрицы	2	3	5	8	12	16	23	33
C-многочлены	1	1	2	2	3	3	4	5
R-многочлены	2	3	5	7	10	13	17	22

На границе области устойчивости при $s \geqslant 3$ на диаграммах появляются точки, к которым область устойчивости подходит очень узким языком. Коразмерность касательного конуса к области устойчивости вычислена в [2], [3].

Автор глубоко благодарен В. И. Арнольду за постановку задачи и терпеливое внимание к работе.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Левантовский Л. В.* О границе множества устойчивых матриц.— УМН, 1980, т. 35, вып. 2, с. 213—214.
3. *Левантовский Л. В.* Об особенностях границы области устойчивости.— Вестн. МГУ, Сер. 1, матем., мех., 1980, № 6, с. 20—22.
4. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.

Московский институт
стали и сплавов

Поступила в редакцию
26 ноября 1980 г.