G. E. Mints, Exact estimates for provability of the rule of transfinite induction in initial parts of arithmetic, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1971, Volume 20, 134–144

Г.Е.Минц

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ДОКАЗУЕМОСТИ ТРАНСФИНИТНОЙ ИНДУКЦИИ В НАЧАЛЬНЫХ ОТРЕЗКАХ АРИФМЕТИКИ [ж)]

Вопрос о доказуемости в формальной классической арифметике частных случаев схемы трансфинитной индукции $(ТИ)$ до порядковых чисел, меньших ε_0 , исследовался в известной работе Генцена [I] , где установлено, что выводами степени [жж)] n нельзя доказать схему $ТИ$ до ω_{n+3} , где $\omega_0=0$ и при каждом k $\omega_{k+1}=\omega^{\omega_k}$. Генцен замечает в [I] :

"Этот результат можно существенно усилить: я надеюсь, что смогу когда-нибудь сделать об этом более подробную публикацию".

Обещанная публикация,однако, так и не появилась.

Мы покажем, что не только нельзя доказать схему $ТИ$ до ω_{n+3} выводами сложности [жжж)] n , но можно даже указать такой конкретный бескванторный вывод в примитивно рекурсивной арифметике(ПРА), дополненной правилом $ТИ$ до ω_{n+3} , что последняя формула этого вывода не доказуема выводами сложности n .

Точнее, будет доказано, что если формула вида $\exists y\, f(x,y)=0$ доказуема выводом сложности n , то найдется такая функция φ ,

---

ж) Основные результаты заметки доложены на Ленинградском семинаре по математической логике 22 января 1970 г.

жж) Степень вывода - это максимальная степень выходящих в него формул. Степень формулы - число вхождений в нее логических связок.

жжж) Кванторная сложность формулы - это максимальное число перемен кванторов в цепочках управляющих друг другом вхождений кванторов в эту формулу (этот и другие термины заимствованы из [2]).

определяемая рекурсией по ординалу, меньшему, чем ω_{n+3}, что $f(x,\varphi(x))=0$ выводима в системе, получаемой из ПРА добавлением рекурсий по всем ординалам, меньшим чем ω_{n+3} (и определяющих правил для соответствующих функций). Эту систему обозначим через $\mathcal{R}_n$.

С другой стороны, правило $ТИ$ до ω_{n+2} (даже в виде схемы!) можно доказать выводом сложности n. Таким образом, получается точная оценка доказуемости $ТИ$ в начальных отрезках арифметики (в терминах ω-башен ω_n) и характеристика функций, доказуемо-рекурсивных в этих отрезках. Заметим, что формулы данной сложности могут иметь сколь угодно высокую степень, и что сложность не совпадает со степенью даже для предваренных формул без стоящих рядом одноименных кванторов: все формулы сложности $n+1$ имеют степень, не меньшую, чем $n+2$. По ходу доказательства будет установлен ряд результатов о специализации выводов в арифметике.

Вывод в $KA_{[n]}$ назовем **экзистенциальным**, если он состоит из стандартных предваренных формул и все входящие в него формулы сложности n начинаются с квантора существования.

<u>Теорема I.</u> *Если* $S_1,\ldots,S_n \vdash_{KA_{[\ell]}} S$, *то имеется экзистенциальный вывод секвенции* $S^{\exists}$ *из* $S_1^{\exists},\ldots,S_n^{\exists}$ *в* $KA_{[\ell]}$. *В частности, выводимая в* $KA_{[\ell]}$ *секвенция, состоящая из предваренных формул, имеет вывод в* $KA_{[\ell]}$, *состоящий из предваренных формул.*

<u>Доказательство.</u> Согласно лемме I из [2] можно построить вывод S^* из $S_1^*,\ldots,S_n^*$. Легко видеть, что $T^{*\exists}$ и $T^{\exists}$ взаимовыводимы друг из друга для любой секвенции T без нарушения экзистенциальности, поэтому можно считать, что $S_1,\ldots,S_n,S$ — стандартные секвенции.

Заменим теперь рассматриваемый вывод некоторым выводом в

$KA^{P}_{[0]}$ *), применяя для этого известный прием понижения логической сложности с помощью дополнительных предикатов. Каждой кванторной формуле QyG сложности $< \ell$, входящей в данный вывод, сопоставим предикатную переменную P, размерность которой равна числу параметров формулы QyG. Обозначим через X полный список этих параметров. Если G – бескванторная формула, то определяющими секвенциями переменной P называются секвенции

$$P(X) \to QyG, \quad QyG \to P(X).$$

Если G – кванторная формула, и R – сопоставленная ей предикатная переменная, то определяющими секвенциями предиката P будут

$$P(X) \to QyR(y,X), \quad QyR(y,X) \to P(X).$$

Для каждой секвенции T, входящей в вывод, посредством T^{P} обозначим секвенцию, получающуюся из T заменой вхождений формул $QyG(y,\tau)$ (двигаясь слева направо) на $P(\tau)$, где P – соответствующая предикатная переменная.

Заменив теперь каждую секвенцию T, входящую в данный вывод, на T^{P}, получим фигуру, которую можно достроить до вывода в $KA^{P}_{[0]}$, пользуясь определяющими секвенциями для предикатных переменных. Для обоснования этой перестройки следует лишь доказать (индукцией по сложности), что если P – предикат, сопоставленный формуле $A(y,X)$ и R – предикат, сопоставленный формуле $A(t,x)$, то в $KA^{P}_{[0]}$ выводимо (с точностью до порядка аргументов предиката R)

$$P(t,X) \to R(Z,X) \qquad R(Z,X) \to P(t,X),$$

где Z – список переменных, входящих в t, но не в X.

Пользуясь теоремой 3 из [2], построим экзистенциальный вы-

---

*) Возможность такой замены показывает, что $KA^{P}_{[0]}$ в определенном смысле эквивалентна KA^{P}.

вод в $KA^{P}_{[0^+]}$ секвенции S^{P} из $S_1^{P},\ldots,S_n^{P}$, $S_{n+1},\ldots,S_{n+q}$, где $S_{n+1},\ldots,S_{n+q}$ – определяющие секвенции предикатных переменных. Подставим теперь в этот вывод вместо предикатных переменных соответствующие им формулы. Все эти формулы имеют сложность $<\ell$, так что никакая формула сложности ℓ не отрицается, и пронося отрицание внутрь (что не портит применений правил) мы получим фигуру, (вывод $S^{\exists}$ из $S_1^{\exists},\ldots,S_n^{\exists}$ средствами исчисления $KA_{[\ell]}$ с добавлением ограниченных кванторов), в которой отсутствуют неограниченные кванторы всеобщности, начинающие цепочки кванторов сложности ℓ, но присутствуют ограниченные кванторы. Исключим ограниченные кванторы. Будем приводить все секвенции к стандартной форме, не обращая внимания на ограниченные кванторы: если какой-нибудь из них мешает вынесению вперед, будем объединять одноименные кванторы, а для исключения разноименных использовать эквивалентности:

$$\forall x_{<\tau}\exists y A(x,y)\equiv\exists y\forall x_{<\tau}A(x,(y)_x)$$

$$\exists x_{<\tau}\forall y A(x,y)\equiv\forall y\exists x_{<\tau}A(x,(y)_x).$$

Ограниченные кванторы, управляющие бескванторными формулами, исключаются обычным способом.

Полученную таким образом фигуру (она состоит из предваренных формул) можно достроить до экзистенциального вывода тем же способом, что и в доказательстве леммы 2 из [2]. В проверке нуждаются лишь правила для ограниченных кванторов. Рассмотрим $\forall_<$ -правила. Для обоснования правила $[A]_t^x, t<\tau, \Gamma\to\Delta\vdash\forall x_{<\tau}A,\Gamma\to\Delta$ достаточно доказать секвенцию $\exists y\forall x_{<\tau}A(x,(y)_x), t<\tau\to\exists y A(t,y)$.

Образ правила $b<\tau, \Gamma\to\Delta, [A]_b^x\vdash\Gamma\to\Delta,\forall x_{<\tau}A$ имеет вид:

$$\frac{b<\tau, \Gamma\to\Delta, \exists y A(b,y)}{\Gamma\to\Delta,\exists y\forall x_{<\tau}A(x,(y)_x)} \qquad (3)$$

Для обоснования этого перехода следует доказать индукцией по b секвенцию

$$\Gamma \to \Delta, \exists y (b \geqslant r \vee \forall x_{<b} A(x,(y)_x)),$$

используя посылку фигуры (3) для доказательства индукционного перехода. На этом заканчивается доказательство теоремы.

Мы опишем модификацию генценовского алгорифма [3] устранения сечения из арифметических выводов. В действительности генценовский алгорифм достигает своей цели и применительно к арифметическим выводам постоянных равенств. Модификация, которая будет описана, преследует цель устранить секвенции ненулевой сложности из выводов замкнутой секвенции, имеющей сложность 0. После этого сечение из таких выводов устранится в силу теоремы 2 из [2].

Будем предполагать, что последняя секвенция рассматриваемого вывода в KA замкнута, имеет сложность 0 и не содержит ни функциональных переменных, ни положительных кванторов, а сам этот вывод экзистенциален. Будем также предполагать, что правило подстановки в этом выводе применяется лишь к аксиомам, и что допускается применение еще одного дополнительного правила, разрешающего заменять термы, не содержащие переменных, на натуральные числа, являющиеся значениями этих термов. Оба последние правила будем считать структурными.

Опишем теперь модификацию редукционного шага из § 3 работы [3].

При определении высоты (см. [3]), вхождений секвенций в вывод будем вместо степеней формул учитывать их сложность.

I. Замена свободных предметных и функциональных переменных: предметные переменные заменяются на 0, а n-местные функциональные переменные – на $\mathcal{Z}^n$ (тождественно нулевая функция от n переменных).

2. Упрощение правил с бескванторными формулами (Эти преобразования не применялись в [3]).

2.I. Индукцию

$$R(b), \Gamma \to R(b'), \Delta \vdash R(0), \Gamma \to R(t), \Delta$$

заменяем сечением по формуле $R(\nu)\vee\neg R(\nu)$, где $\nu \leftrightarrow \mu z_{\leq t} \neg R(z)$. Посылка индукции используется (после подстановки ν вместо b) для извлечения противоречия из $R0, \neg R\nu$. При этом индукция применяется лишь к бескванторным секвенциям.

2.2. Устранение истинных формул из антецедента и ложных из сукцедента.

Вычеркнем из антецедентов всех секвенций истинные постоянные бескванторные формулы, а из сукцедентов всех секвенций - ложные.

В результате этого преобразования аксиомы перейдут снова в аксиомы или в секвенции вида $R\rightarrow$ (вида $\rightarrow R$), где R - ложная (соответственно, истинная) постоянная бескванторная формула. Эти секвенции выводятся в ПРА без индукции. Применения правил перейдут в применения тех же правил, или в фигуры, которые можно заменить утончениями.

2.3. Использование истинных сукцедентных (ложных антецедентных) формул.

В каждой ветви найдем самую нижнюю секвенцию вида $\Gamma\rightarrow\Delta_1 R\,\Delta_2$ (вида $\Gamma_1 R\,\Gamma_2\rightarrow\Delta$), где R - постоянная бескванторная истинная (соответственно, ложная) формула. Вычеркнем всю вышестоящую часть вывода и допишем сверху вывод $\rightarrow R$ (соответственно, $R\rightarrow$).

3. $\vee\mathcal{J}$ - редукция (см. [3]), если она применима; в этом случае алгорифм редукции заканчивает работу.

4. Опускание вниз утончений и устранение логических аксиом - как в [3] .

5. Собственно редукция.

5.I. В конечном куске имеется связка формул, которая содержит (в качестве самой нижней формулы) некоторый член конечной секвенции и (в качестве самой верхней формулы) главную формулу логического правила. Этим правилом может быть $\rightarrow\exists$ или $\forall\rightarrow$. Рассмотрим, например, первый случай. Посылка упомянутого логического правила имеет вид $\rightarrow R(t)$ с постоянным t . Поэтому весь данный вывод можно заменить переходом от $\rightarrow R(t)$ к $\rightarrow\exists x R(x)$ и утончениями.

5.2. Случай 5.I не имеет места. Тогда найдется формульная связка, пригодная для редукции связки (см. [3] , пункт 3.5, а также [4]).

5.2.I. Формулы, входящие в связку, имеют сложность 0. В силу пункта 2.2 эти формулы начинаются с кванторов. Рассмотрим $\exists$-связку. Ввиду преобразований пункта 2.3 участок конечного куска, лежащий над рассматриваемым сечением, имеет вид:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots \quad b}{R(b), \Gamma' \to \Delta'} \;\alpha}{\exists x R(x), \Gamma' \to \Delta'} \;\alpha+1$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{\dfrac{1.\ \to R(t)}{2\ \to \exists x R(x)} \qquad \exists x R(x), \Gamma \to \Delta \;\; \beta}{\Gamma \to \Delta} \;\; \beta+2$$

Заменяем его на фигуру:

$$\dfrac{\vdots \quad t}{R(t), \Gamma' \to \Delta'} \;\alpha$$

$$\vdots$$

$$\dfrac{1\ \to R(t) \qquad R(t), \Gamma \to \Delta \quad \beta' < \beta}{\Gamma \to \Delta} \quad \beta'+1 < \beta+2$$

где правая часть нового вывода получена из правой части старого заменой всех формул из правой части $\exists x R(x)$-связки на $R(t)$. Применения $\exists\to$, которые в результате этого "испортились", исправляются так же, как выписанное явно применение.

5.2.2. Формулы, входящие в связку, имеют сложность >0. Так как нижняя секвенция вывода имеет сложность 0 , то происходит падение высоты и применима редукция связки в смысле [3] . Применяем ее.

Результат применения описанных преобразований к выводу $\mathcal{D}$ обозначим через $Red(\mathcal{D})$.

Назначим теперь порядковые числа вхождениям секвенций в вывод. Единственное отличие от генценовских определений (не считая отличий, вызванных новым понятием высоты) состоит в том, что если данное вхождение и все вхождения, находящиеся выше него, состоят из бескванторных формул, то его порядковое число[ж)] равно I.

Лемма I. Если $\mathcal{D}$ – экзистенциальный вывод в KA замкнутой секвенции сложности 0, не содержащей ни функциональных переменных, ни положительных кванторов, и сложность $\mathcal{D}$ больше нуля, то ординал вывода $Red(\mathcal{D})$ меньше ординала вывода $\mathcal{D}$, а сложность $Red(\mathcal{D})$ не превосходит сложности $\mathcal{D}$.

Доказательство. Преобразования, описанные в пунктах I,2.2, 2.3 очевидным образом не увеличивают порядкового числа, так как они не меняют высот. Преобразования из пункта 4 рассмотрены в [3]. Преобразования из пункта I уменьшают порядковое число так же, как $\vee\gamma$-редукция. Уменьшение порядкового числа при преобразованиях из пункта 5.I пояснено на схеме преобразования. Наконец, преобразования из пункта 5.2 рассмотрены в [3].

Теорема 2. Если формула вида $\exists y R(x,y)$ с бескванторной R, не содержащая ни функциональных переменных, ни предметных переменных, отличных от x, y, выводима в $KA_{[n]}$, то найдется функция φ системы $\mathcal{R}_n$, такая что $R(x,\varphi(x))$ выводима в $\mathcal{R}_n$.

Доказательство проводится арифметизацией следующего рассуждения. Подставив конкретное натуральное число $\mathcal{N}$ вместо параметра x, мы получим вывод замкнутой формулы $\exists y R(\mathcal{N},y)$. Применяя алгорифм Red до тех пор, пока не получится (в силу леммы I) вывод сложности 0, а затем применяя теорему 2 из [2], получаем число M, такое что $R(N,M)$. Полагаем $\varphi(N) = M$. Остается заметить, что ординал любого вывода в $KA_{[n]}$ меньше, чем ω_{n+3} и что для случая $n=0$ достаточно сразу воспользоваться теоремой 2 из [2].

ж) Это определение соответствует ограничению генценовского класса исходных секвенций секвенциями, выводимыми в ПРА.

Посредством $Consis(\mathfrak{R}_n)$ обозначим построенную стандартным образом бескванторную формулу, выражающую непротиворечивость системы $\mathfrak{R}_n$.

Следствие I. Формула $Consis(\mathfrak{R}_n)$ недоказуема выводами сложности n.

Действительно, в силу теоремы 2, эта формула была бы тогда выводима в $\mathfrak{R}_n$, что противоречит второй теореме Геделя.

Отметим теперь, что $Consis(\mathfrak{R}_n)$ выводима в система ПРА, дополненной правилом ТИ до ω_{n+3}. Это доказывается модификацией генценовского метода редукции применительно к системам такого типа (см.[5]).

Следствие 2. Имеется применение ТИ до ω_{n+3} к бескванторной секвенции, посылка которого доказуема в ПРА, а заключение недоказуемо в $KA_{[n]}$.

Докажем, что эта оценка неулучшаема в терминах ω-башен ω_n.

Исследуем для этого подробнее приведенное в [1] доказательство *) ТИ до ω_{n+2}, т.е. вывод $\mathcal{E}(0) \to \mathcal{E}(\omega_{n+2})$ из исходных

---

*) Система из [1] содержит средства для изображения порядковых чисел, меньших ε_0 : константы $0, \omega$ и символы функций сложения, умножения и возведения в степень. Имеются также функция ω_α (равная нулю для $\alpha \geqslant \omega$), предикаты $\mathcal{E}$, $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$ (отношение "меньше" между порядковыми числами), $\alpha > \beta$, $\alpha \geqslant \beta$, $\alpha \leqslant \beta$ и вспомогательные функции fu_1, fu_2, такие что для любых α, β, $\gamma < \varepsilon_0$ из $\alpha < \beta + \omega^\alpha$ и $\gamma > 0$ следует, что $fu(\alpha, \beta, \gamma) < \gamma$, $fu_2(\alpha, \beta, \gamma) < \omega$ и $\alpha \leqslant \beta + \omega^{fu_1(\alpha,\beta,\gamma)} \cdot fu_2(\alpha, \beta, \gamma)$. Соответствующим образом изменяется понятие исходной секвенции, причем (ввиду наличия предиката $\mathcal{E}$) исходными считаются также секвенции вида $s = t$, $F(s) \to F(t)$ Генцен объясняет, каким образом можно устранить применения обычного правила трансфинитной индукции, имея доказательство ТИ до соответствующего порядкового числа.

секвенций вида $\tau > 0, \quad \forall x_{<\tau} \mathcal{E}(x) \to \mathcal{E}(\tau)$, где областью допустимых значений переменных является множество ординалов, меньших ε_0; $\mathcal{E}$ – дополнительный одноместный предикат. Обычное правило возвратной индукции является, по существу, выводом в $KA_{[0]}$ правила $ТИ$ до $\omega_2 = \omega$. Если уже построен вывод $ТИ$ до ω_{n+3}, то вывод $ТИ$ до ω_{n+3} строится так: вместо $\mathcal{E}(\nu)$ подставляется $\forall \xi (\mathcal{E}^*(\xi) \supset \mathcal{E}^*(\xi + \omega^{\nu}))$, где

$$\mathcal{E}^*(\xi) \leftrightharpoons \forall_{\eta \leq \xi} \mathcal{E}(\eta).$$

Индукцией по n легко доказывается, что все вхождения в старый вывод, формул, начинающихся с $\mathcal{E}$ и не являющихся членами секвенций, происходят от вхождений в $\mathcal{E}^*$, то есть непосредственно в область действия квантора $\forall$. Поэтому подстановка вместо $\mathcal{E}$ формулы сложности I, начинающейся с этого же квантора, увеличивает сложность формул не более, чем на I. Наше утверждение доказано.

Приведем в заключение результат, показывающий, что сложность арифметического вывода определяется в действительности лишь сложностью входящих в него индукций.

<u>Теорема 3.</u> *Вывод секвенции S в KA, в котором степени индукционных формул не превосходят n, можно перестроить в вывод той же секвенции, в котором степени всех сечений и всех индукционных формул не превосходят n* [ж)].

<u>Доказательство.</u> Назовем сечение терминальным, если его главная формула является потомком главной формулы некоторой индукции, находящейся выше этого сечения. Обычная процедура устра-

---

ж) Если к тому же и сложность S не превосходит n, то новый вывод – это вывод в $KA_{[n]}$. Это замечание полезно при применении теоремы 2.

нения сечения из исчисления предикатов позволяет доказать, что можно устранить нетерминальные сечения, не вводя новых индукций (точнее, вводя лишь такие индукции, главные формулы которых получаются из главных формул уже имеющихся индукций подстановками термов вместо переменных). Терминальные сечения рассматриваются при этом наравне с другими структурными правилами. Вывод, в котором все сечения терминальные, является искомым.

Автор благодарит В.А.Лифшица и Ю.В.Матиясевича, замечания которых способствовали улучшению изложения.

ЛИТЕРАТУРА

I. Gentzen G. Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie, "Math.Ann.", I943, II9,I,I40-I6I.

2. Минц Г.Е. Бескванторные и однокванторные системы. Настоящий сборник, II5-I33.

3. Генцен Г. Новое изложение доказательства непротиворечивости чистой теории чисел. В сб. "Математическая теория логического вывода", М., I967, I54-I90.

4. Scarpellini B. Some applications of Gentzen's second cosistency proof. "Math. Ann.", I969, I8I, 4, 325-344.

5. Tait W.W. Functionals defined by transfinite recursion. "J. Symbolic Logic", I965, 30,2,I55-I74.