



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. P. Mashchenko, F. S. Churikov, Solution of an integral equation encountered in the theory of plasticity,

Mat. Zametki, 1980, Volume 27, Issue 3, 411–423

<https://www.mathnet.ru/eng/mzm6525>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.86

May 21, 2025, 08:56:48



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 3 (1980)

РЕШЕНИЕ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, ВСТРЕЧАЮЩЕГОСЯ В ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

И. П. Мащенко, Ф. С. Чуриков

Многие задачи плоской деформации, а также задачи плоского напряженного состояния с условием пластичности Кулона, сводятся к решению линейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода [1], имеющего вид:

$$\int_a^x \varphi(t) J_0 [\sqrt{4c(x+b)(t-x)}] dt = f(x), \quad (1)$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, $f(x)$ — известная функция, a, b, c — постоянные.

Докажем, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Если функция $f(x)$ дифференцируема на некотором замкнутом интервале D , то на этом интервале справедлива формула обращения уравнения (1)

$$\varphi(t) = \frac{d^2}{dt^2} \int_a^t f(x) J_0 [\sqrt{4c(x+b)(t-x)}] dx - \\ - c \int_a^t f(x) J_0 [\sqrt{4c(x+b)(t-x)}] dx, \quad (2)$$

при условии, что $f(a) = 0$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что линейной заменой переменных t и x уравнение (1) можно привести к виду

$$\int_0^x \varphi(t) J_0 [\sqrt{4c(x+b)(t-x)}] dt = f(x). \quad (3)$$

Это уравнение мы и будем рассматривать при доказательстве теоремы. Умножим его на функцию $J_0 [\sqrt{4c(x+b)(z-x)}]$ и проинтегрируем по переменной x в пределах от 0 до z , где $z \in D$

$$\int_0^z J_0 [\sqrt{4c(x+b)(z-x)}] dx \cdot \\ \cdot \int_0^x \varphi(t) J_0 [\sqrt{4c(x+b)(t-x)}] dt = \\ = \int_0^z J_0 [\sqrt{4c(x+b)(z-x)}] f(x) dx.$$

Меняя в левой части последнего равенства порядок интегрирования, получим

$$\int_0^z \varphi(t) dt \int_t^z J_0 [\sqrt{4c(x+b)(z-x)}] \cdot \\ \cdot J_0 [\sqrt{4c(x+b)(t-x)}] dx = \int_0^z J_0 [\sqrt{4c(x+b)(z-x)}] dx. \quad (4)$$

Для вычисления интеграла

$$J = \int_t^z J_0 [\sqrt{4c(x+b)(z-x)}] J_0 [\sqrt{4c(x+b)(t-x)}] dx, \quad (5)$$

воспользуемся формулами (см. [2, стр. 974])

$$J_0(x) J_0(y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} F\left(-k, -k, 1; \frac{y^2}{x^2}\right)}{(k!)^2}, \\ F\left(-k, -k, 1; \frac{t-x}{z-x}\right) = \sum_{i=0}^k (C_k^i)^2 \left(\frac{t-x}{z-x}\right)^i. \quad (6)$$

После их применения интеграл (5) запишется в следующем виде:

$$J = \int_t^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \sum_{i=0}^k (C_k^i)^2 c^k (x+b)^k (z-x)^{k-i} (t-x)^i dx. \quad (7)$$

Можно показать, что ряд, стоящий под знаком интеграла, равномерно сходится, а поэтому поменяем порядок суммирования и интегрирования. После вычисления по-

лученного гипергеометрического интеграла получим

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k (z-t)^{2k-1}}{(2k+1)!} = \frac{\operatorname{sh} \sqrt{c} (z-t)}{\sqrt{c}}. \quad (8)$$

Используя формулы (5) и (8), уравнение (4) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{c}} \int_0^z \varphi(t) \operatorname{sh} \sqrt{c} (z-t) dt = \\ = \int_0^z f(x) J_0 [\sqrt{4c(x+b)} (z-x)] dx. \end{aligned} \quad (9)$$

После двукратного дифференцирования последнего равенства находим

$$\begin{aligned} \varphi(z) + \sqrt{c} \int_0^z \varphi(t) \operatorname{sh} \sqrt{c} (z-t) dt = \\ = \frac{d^2}{dz^2} \int_0^z f(x) J_0 [\sqrt{4c(x+b)} (z+x)] dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Вычитая из уравнения (10) уравнение (9), умноженное на c , и заменяя переменную z на t , получим

$$\begin{aligned} \varphi(t) = \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t f(x) J_0 [\sqrt{4c(x+b)} (t-x)] dx - \\ - c \int_0^t f(x) J_0 [\sqrt{4c(x+b)} (t-x)] dt. \end{aligned}$$

Это равенство является формулой обращения уравнения (3). Формулу обращения (2) получаем линейной заменой переменных t и x . Теорема доказана.

Краснодарский филиал
ВНИИ Монтажспецстрой

Поступило
25.VII.1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ч у р и к о в Ф. С., М а щ е н к о И. П., Решение задачи о прокатке полосы, Тр. Краснодарского политехнического института, № 42, Краснодар, 1972, 43—62.
- [2] Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1973.