Том XVII ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 3
1972

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ (МОНТЕ-КАРЛО), ВЫЗВАННОЙ НЕИДЕАЛЬНОСТЬЮ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Г. А. КОЗЛОВ

Введение

При использовании на ЭВМ методов статистических испытаний в качестве источника случайных чисел применяют иногда физические датчики, [1]. По нашему мнению, одной из причин, тормозящих внедрение в вычислительную практику этих датчиков, является отсутствие сведений о погрешности результата, связанной со статистическим несовершенством последовательности вырабатываемых датчиками случайных чисел.

Мы хотим предложить один подход к оценке этой погрешности, продемонстрировав его на примере вычисления однократного интеграла

$$\overline{\varphi}=\int_0^1 \varphi(x)\,dx \tag{0.1}$$

методом независимых испытаний. Случайная величина

$$\xi=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varphi(\xi_i) \tag{0.2}$$

является результатом вычисления этого интеграла при N независимых испытаниях. Мы предположим, что независимые случайные числа $\xi_i \in \in [0, 1]$ имеют функцию распределения (ф.р.) $F(x) \not\equiv x$ вместо идеальной $F(x) \equiv x$. Оценкой связанной с этим погрешности результата (0.2) для некоторого класса G функций φ мы предлагаем считать величину

$$S=\sup U(\varphi),\ \varphi \in G, \tag{0.3}$$

где

$$U(\varphi)=\left(\int_0^1 \varphi(x)\,dF(x)-\overline{\varphi}\right)\Big/\sqrt{\int_0^1 (\varphi(x)-\overline{\varphi})^2\,dx}\,. \tag{0.4}$$

Произведение $S\sqrt{N}$ является оценкой сверху отношения интересующей нас погрешности к среднеквадратичной ошибке метода статистических испытаний. Знание величины S дает возможность разумного выбора N. Обратно, задавшись числом N, можно забраковать или одобрить ф.р. F, и, что с нашей точки зрения важнее всего, можно разумно выставлять требования на ф.р. случайных чисел, источником которых мы предполагаем физический датчик.

В качестве G хотелось бы взять класс функций, суммируемых с квадратом. Однако, в важном с нашей точки зрения случае последовательных датчиков [2], [3], [4], если отвлечься от конечности длины машинного слова ЭВМ, ф.р. F оказывается непрерывной сингулярной функцией, [5]. Можно показать, что в этом случае величина S не ограничена даже при $G = c\,(0, 1)$.

Мы считаем разумным в качестве G принять класс функций с ограниченной «нормированной вариацией», т. е.

$$G = \left\{ \varphi\colon \bigvee_0^1 \varphi \Bigg/ \sqrt{\int_0^1 (\varphi(x) - \bar{\varphi})^2\, dx} \leqslant v \right\}, \tag{0.5}$$

где $v \geqslant 2$ — заданное число (при $v < 2$ класс (0.5) пуст*).

Функционал (0.4) и принадлежность функции φ классу (0.5) не зависят от умножения функции φ на число и прибавления к ней постоянной. Поэтому при разыскании S в классе (0.5) можно полагать

$$\bar{\varphi} = \int_0^1 \varphi(x)\, dx = 0 \tag{0.6}$$

и

$$\|\varphi\|^2 = \int_0^1 (\varphi(x))^2\, dx = 1. \tag{0.7}$$

Условие $\varphi \in G$ сводится тогда к ограничению

$$\bigvee_0^1 \varphi \leqslant v. \tag{0.8}$$

Задачу разыскания величины (0.3) в классе (0.5) можно переформулировать теперь так: найти

$$S = \sup U(\varphi),\ \varphi \in H, \tag{0.9}$$

где

$$U(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)\, dF(x), \tag{0.10}$$

---

* Это можно показать, исходя из равенства

$$\varphi(x) = \bar{\varphi} + \int_0^x t\, d\varphi(t) + \int_x^1 (t-1)\, d\varphi(t)$$

во всех точках непрерывности φ на [0,1], откуда следует:

$$\int_0^1 (\varphi(x) - \bar{\varphi})^2\, dx = \int_0^1 \int_0^1 R(t_1, t_2)\, d\varphi(t_1)\, d\varphi(t_2),$$

где $R(t_1, t_2) = (1 - t_1 \vee t_2)(t_1 \wedge t_2) \leqslant 1/4$. Тогда

$$\int_0^1 (\varphi(x) - \bar{\varphi})^2\, dx \leqslant \frac{1}{4} (\bigvee_0^1 \varphi)^2.$$

Отсюда и получается, что $v \geqslant 2$.

а класс H определяется ограничениями (0.6), (0.7) и (0.8). Число $v \geqslant 2$ и функция $F \in c\,(0,1)$ заданы.

Докажем конечность S. Пусть

$$f(x) = F(x) - [F(0)\cdot(1-x) + F(1)\cdot x]. \tag{0.11}$$

Для функций φ, удовлетворяющих ограничению (0.6), функционал (0.10) может быть выражен так:

$$U(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)\,df(x) = -\int_0^1 f(x)\,d\varphi(x), \tag{0.12}$$

откуда, учитывая ограничение (0.8), получим:

$$|U(\varphi)| \leqslant vM, \tag{0.13}$$

где $M = \max |f(x)|$.

В настоящей работе мы рассматриваем решение задачи (0.6) — (0.10) в общем виде. Отдельную работу мы предполагаем посвятить приложению полученных здесь результатов к ф.р. случайных чисел, вырабатываемых последовательными физическими датчиками, [5].

§ 1. Об одном разложении непрерывных функций

В этом параграфе излагаются вспомогательные результаты, необходимые для решения задачи (0.6) — (0.10).

Согласно [6] кривая

$$y = s(x),\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1.1}$$

является спрямляемой в том и только в том случае, если $s \in v\,(0,1)$. Для всех $s \in v\,(0,1)$ определим функционал $\mathfrak{L}$, положив $\mathfrak{L}(s)$ равным длине кривой (1.1). Этот функционал является вогнутым, т. е. для любых $s_1, s_2 \in v\,(0,1)$

$$\mathfrak{L}(\alpha s_1 + (1-\alpha)s_2) \leqslant \alpha\mathfrak{L}(s_1) + (1-\alpha)\,\mathfrak{L}(s_2),\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{1.2}$$

а в случае абсолютной непрерывности функций s_1 и s_2 — строго вогнутым:

$$\mathfrak{L}(\alpha s_1 + (1-\alpha)s_2) < \alpha\mathfrak{L}(s_1) + (1-\alpha)\,\mathfrak{L}(s_2),\ 0 < \alpha < 1. \tag{1.3}$$

Пусть даны число $t > 0$ и функция $f \in c\,(0, 1)$, удовлетворяющая граничным условиям

$$f(0) = f(1) = 0. \tag{1.4}$$

Рассмотрим следующую задачу: среди функций $s \in v\,(0, 1)$, удовлетворяющих ограничениям

$$|s(x) - f(x)| \leqslant t \tag{1.5}$$

и

$$s(0) = s(1) = 0, \tag{1.6}$$

найти функцию, минимизирующую функционал $\mathfrak{L}$.

Существование решения следует из теоремы Гильберта [7] о компактности в пространстве Q спрямляемых кривых множества кривых в совокупности ограниченной длины, расположенных в конечной части пространства. Мы будем обозначать это решение $l(x, t)$, подчеркивая его зависимость от параметра задачи t.

Непрерывность по x решения $l(x, t)$ устанавливается так. Предположив противное и считая x_0 точкой разрыва, легко показать, что в этом случае функция $l(x, t)$ может быть «улучшена». А именно, если на сегменте $[x_0, x_0 + h]$, где $h > 0$ — достаточно малое число, функцию l заменить линейной функцией, принимающей значения $\frac{1}{2}[l(x_0 - 0, t) + l(x_0 + 0, t)]$ и $l(x_0 + h - 0, t)$ соответственно в точках x_0 и $x_0 + h$, полученная функция будет удовлетворять ограничениям и доставлять функционалу $\mathfrak{L}$ значение, меньшее, чем l.

Перечислим определяющие свойства решения $l(x, t)$.

Определим следующим образом выпуклость на несвязных множествах. Будем называть функцию s выпуклой (вогнутой) на множестве A, если для любых x_1, x_2, удовлетворяющих условию $(x_1, x_2) \subset A$, справедливо неравенство

$$s(x) \geqslant (\leqslant) s(x_1) \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + s(x_2) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \text{ для всех } x \in (x_1, x_2). \tag{1.7}$$

Функция, выпуклая и вогнутая на множестве A одновременно, является линейной на нем. Неравенство (1.7) обращается при этом в равенство.

Пусть

$$\begin{aligned} P(t) &= \{x \in [0, 1] : l(x, t) = f(x) - t\}, \\ N(t) &= \{x \in [0, 1] : l(x, t) = f(x) + t\}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Множества $P(t)$ и $N(t)$ замкнуты (следствие непрерывности l и f), не пересекаются, не содержат точек 0 и 1. Введем открытые множества

$$\hat{P}(t) = (0, 1) \setminus P(t), \quad \hat{N}(t) = (0, 1) \setminus N(t). \tag{1.9}$$

Из вогнутости функционала $\mathfrak{L}$ (см. (1.2)), выпуклости и замкнутости множества функций φ, определяемого ограничениями (1.5) и (1.6), следует, что необходимым и достаточным признаком решения является его локальная оптимальность в пространстве $v(0,1)$. Легко показать, что это условие сводится к следующему: на множестве $\hat{N}(t)$ функция $l(x, t)$ выпукла по x, а на $\hat{P}(t)$ — вогнута.

Введем еще одно открытое множество $D(t)$:

$$D(t) = (0,1) \setminus P(t) \cup N(t) = \hat{P}(t) \cap \hat{N}(t). \tag{1.10}$$

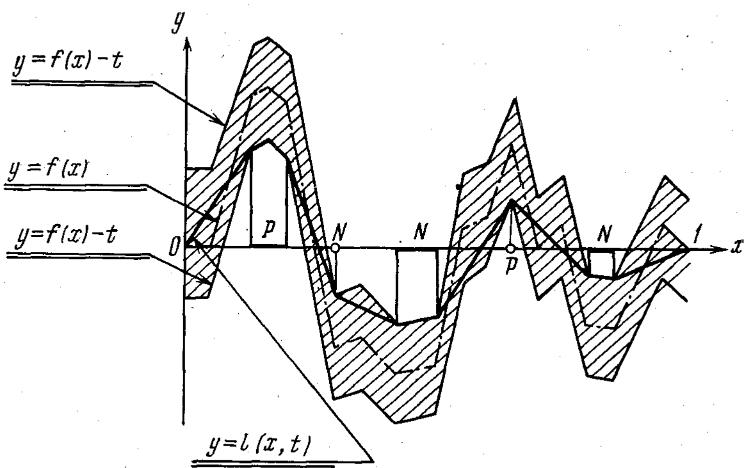
На множестве $D(t)$ функция $l(x, t)$ выпукла и вогнута по x, т. е. линейна.

Отмеченные свойства показывают, что решение $l(x, t)$ моделируется гибкой нитью, туго натянутой на плоскости (x, y) в области, ограниченной линиями $y = f(x) \pm t$, между точками (0, 0) и (1, 0) (см. рисунок).

Установим некоторые свойства решения $l(x, t)$ и докажем его единственность. Те составляющие интервалы множества $D(t)$, одним из концов которых являются точки 0 и 1, назовем крайними, а те, концы которых принадлежат разным множествам $P(t)$ и $N(t)$,— главными. Из замкнутости и непересекаемости последних следует конечность числа главных интервалов при фиксированном t. Перенумеруем их слева направо и середины их обозначим $m_1, m_2, \ldots, m_n$. В силу определяющего свойства функции $l(x, t)$ интервалы

$$(0, m_1), (m_1, m_2), \ldots, (m_n, 1) \tag{1.11}$$

являются областями выпуклости и вогнутости по x этой функции (выпуклость и вогнутость чередуются). Из этого следует абсолютная непрерывность по x функции l.



Далее, предположив существование двух решений $l_1(x, t)$ и $l_2(x, t)$ рассматриваемой задачи, приходим к противоречию, так как из их абсолютной непрерывности и строгой вогнутости (1.3) функционала $\mathfrak{L}$ следует, что на функции $l = \frac{1}{2}(l_1+l_2)$ этот функционал принимает меньшее значение, чем на каждой из функций l_1 и l_2. Этим доказывается единственность l.

Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_n$ — значения производной $\partial l/\partial x$ на главных, а K_0 и K_{n+1} — на крайних интервалах множества $D(t)$. На каждом из интервалов (1.11) производная изменяется монотонно в промежутках

$$[K_0, K_1], [K_1, K_2], \ldots, [K_{n-1}, K_n], [K_n, K_{n+1}]$$

соответственно. Поэтому при фиксированном t функция l удовлетворяет условию Липшица по x с оценкой $K = \max\limits_{(i)} |K_i|$, и

$$\bigvee_{x=0}^{1} \partial l(x, t)/\partial x = \sum_{i=0}^{n} |K_i - K_{i+1}|. \tag{1.12}$$

Отклонения решения $l(x, t)$ от границ области (1.5) суть функции

$$\delta_1(x, t) = f(x) + t - l(x, t), \quad \delta_2(x, t) = l(x, t) - [f(x) - t]. \tag{1.13}$$

Они непрерывны по x, неотрицательны, и

$$\delta_1(x, t) = 0 \text{ для } x \in N(t), \ \delta_1(x, t) > 0 \text{ для } x \in \hat{N}(t), \tag{1.14}$$
$$\delta_2(x, t) = 0 \text{ для } x \in P(t), \ \delta_2(x, t) > 0 \text{ для } x \in \hat{P}(t).$$

Лемма 1. *Функции δ_1 и δ_2 являются неубывающими функциями t.*

Доказательство. Предположим существование таких $t_1 < t_2$ и x_0, что $\delta_1(x_0, t_1) > \delta_2(x_0, t_2)$. Можно показать, что найдется такой интервал $(\alpha, \beta) \subset \hat{N}(t_1)$, содержащий точку x_0, что

$$\delta_1(\alpha, t_1) = \delta(\alpha, t_2) \quad \text{или} \quad l(\alpha, t_2) = l(\alpha, t_1) + (t_2 - t_1), \tag{1.15}$$

$$\delta_1(\beta, t_1) = \delta(\beta, t_2) \text{ или } l(\beta, t_2) = l(\beta, t_1) + (t_2 - t_1),$$

$$\delta_1(x, t_1) > \delta_1(x, t_2) \text{ или } l(x, t_2) > l(x, t_1) + (t_2 - t_1) \text{ для } x \in (\alpha, \beta). \tag{1.16}$$

Из неравенств $l(x, t_1) \geqslant f(x) - t_1$ и $t_1 < t_2$ следует: $l(x, t_1) + (t_2 - t_1) > f(x) - t_2$, откуда, учитывая (1.16), получим: $l(x, t_2) > f(x) - t_2$ для всех $x \in (\alpha, \beta)$, т. е. $(\alpha, \beta) \subset \hat{P}(t_2)$. Поэтому функция $l(x, t_2)$ вогнута по x на (α, β), и из равенств (1.15) и выпуклости по x на (α, β) функции $l(x, t_1) + (t_2 - t_1)$ следует: $l(x, t_2) \leqslant l(x, t_1) + (t_2 - t_1)$ для всех $x \in (\alpha, \beta)$, что противоречит (1.16).

Аналогично доказывается неубывание функции δ_2. Доказательство леммы 1 закончено.

Из этой леммы вытекает справедливость для функции l условия Липшица:

$$| l(x, t_1) - l(x, t_2) | \leqslant | t_1 - t_2 | \tag{1.17}$$

и ее абсолютная непрерывность по t.

Отметим теперь следующие два свойства множеств $P(t)$ и $N(t)$: (a) пусть $t_1 \leqslant t_2$; тогда $P(t_1) \supseteq P(t_2)$, $N(t_1) \supseteq N(t_2)$; (b) пусть $t_1, t_2, \ldots \uparrow t$ и $x \in P(t_1), P(t_2), \ldots$; тогда $x \in P(t)$; аналогичным свойством обладают множества $N(t)$.

Свойство (a) следует из неубывания по t функций δ_1 и δ_2, (b) — из непрерывности по t функции l.

Замечания. 1. Пусть $M = \max | f(x) |$. Тогда $l(x, t) = 0$ при $t \geqslant M$. 2. При $t > M$ множества $P(t)$ и $N(t)$ пусты. При $t \leqslant M$ непусто хотя бы одно из этих множеств.

Пусть $p(x, t)$ и $n(x, t)$ — расстояния точки x до множеств $P(t)$ и $N(t)$ соответственно, при условии, что эти множества не пусты. Пусть $h > 0$ и $\pi(t, h) = \sup p(x, t)$ по всем $x \in P(t - h)$, $\nu(t, h) = \sup n(x, t)$ по всем $x \in N(t - h)$.

Лемма 2. *Если при некотором t множество $P(t)$ пусто, то при всех достаточно малых $h > 0$ пусто и множество $P(t - h)$. Если множество $P(t)$ не пусто, то $\lim\limits_{h \downarrow 0} \pi(t, h) = 0$. Если множество $N(t)$ пусто, при всех достаточно малых $h > 0$ пусто и множество $N(t - h)$. Если множество $N(t)$ не пусто, то $\lim\limits_{h \downarrow 0} \nu(t, h) = 0$.*

Доказательство строится с использованием замкнутости и свойств (a) и (b) множеств $P(t)$ и $N(t)$.

Введем функцию двух переменных $L(x,t)$, $x \in [0, 1]$, $t \in (0, M]$, следующим образом определенную с помощью множеств $P(t)$ и $N(t)$: $L(0, t) = L(1, t) = 0$, $L(x, t) = 1$ для $x \in P(t)$, $L(x, t) = -1$ для

$x \in N(t)$. На каждом из составляющих интервалов множества (1.10) функцию $L(x, t)$ определим линейной интерполяцией по x ее значений на концах интервала.

Будем обозначать символами $\partial l(x \pm 0,t) / \partial x$ и $\partial l(x, t \pm 0) / \partial t$ право- и левосторонние производные $\partial l/\partial x$ и $\partial l/\partial t$ соответственно.

Лемма 3. *Имеет место равенство*

$$\partial l(x, t - 0) / \partial t = -L(x, t). \tag{1.18}$$

Доказательство. Имеем: $\partial l(x, t - 0) / \partial t = - \lim_{h_k \downarrow 0} \Delta_k(x, t)$, где

$$\Delta_k(x, t) = [l(x, t - h_k) - l(x,t)]/h_k, \ 0 < h_k < t. \tag{1.19}$$

Отметим следующие свойства функций Δ_k.

1°. Непрерывность по x. Это следует из непрерывности по x функции l.

2°. $|\Delta_k(x,t)| \leqslant 1$. Это следует из (1.17).

3°. $\Delta_k(0, t) = \Delta_k(1, t) = 0$. Это следует из ограничений (1.6).

4°. $\Delta_k(x, t) = 1$ для всех $x \in P(t)$, $\Delta_k(x, t) = -1$ для всех $x \in N(t)$. Это следует из свойства (а).

5°. Функции $\Delta_k(x,t)$ выпуклы по x на множествах $\hat{N}(t - h_k)$ и вогнуты на множествах $\hat{P}(t - h_k)$. Докажем выпуклость Δ_k на $\hat{N}(t - h_k)$. Функция $l(x, t)$ линейна по x на множестве $D(t)$, а $l(x, t - h_k)$ выпукла на $\hat{N}(t - h_k)$. Поэтому функция Δ_k выпукла на множестве $\hat{N}(t - h_k) \cap D(t)$. Из этого факта и свойств 1°, 2° и 4° следует выпуклость Δ_k по x на объединении $\hat{N}(t - h_k) \cap D(t) \cup P(t)$. Используя свойство (а), легко показать, что $\hat{N}(t - h_k) \cap D(t) \cup P(t) = \hat{N}(t - h_k)$.

6°. Функции $\Delta_k(x,t)$ линейны по x на множествах $D(t - h_k)$ (следствие 5°).

Пусть $\lambda(\xi)$ — самый короткий из главных и удвоенных крайних интервалов множества $D(\xi)$. Используя соображения, аналогичные использовавшимся выше для функции l, с помощью свойств 1° — 6° легко показать, что функции Δ_k абсолютно-непрерывны по x, производные $\partial\Delta_k(x, t) / \partial x$ ограничены числами $2/\lambda(t - h_k)$, и поэтому

$$|\Delta_k(x_1, t) - \Delta_k(x_2, t)| \leqslant 2 |x_1 - x_2| / \lambda(t - h_k). \tag{1.20}$$

Так как $h_k \downarrow 0$, существует $\max_{(k)} h_k = h < t$. Из свойства (а) следует, что λ — неубывающая функция, и из (1.20) следует, что

$$|\Delta_k(x_1, t) - \Delta_k(x_2, t)| \leqslant 2 |x_1 - x_2| /\lambda(t - h) \tag{1.21}$$

для всех k. Поэтому последовательность (1.19) равностепенно-непрерывна по x и, следовательно, компактна в пространстве $c(0, 1)$ (признак Арцела, [7]). Переходя, если нужно, к подпоследовательности, получаем:

$$\Delta_k(x,(t) \to \Delta x, t) \text{ равномерно по } x \in [0, 1].$$

Остается показать, что $\Delta(x, t) = L(x,t)$. Для этого достаточно заметить, что функция Δ непрерывна по x, $\Delta(0, t) = \Delta(1, t) = 0$, $\Delta(x, t) =$

$= 1$ для $x \in P\,(t)$ и $\Delta\,(x,\,t) = -1$ для $x \in N\,(t)$ (это следует из свойств 3° и 4°) и что функция $\Delta\,(x,\,t)$ линейна по x на множестве $D\,(t)$. Последнее следует из того, что согласно лемме 2, любой сегмент $[\alpha,\,\beta] \subset D\,(t)$, начиная с некоторого k, принадлежит множествам $D\,(t - h_k)$, на каждом из которых линейна по x функция $\Delta_k\,(x,\,t)$. Доказательство закончено.

Так как l абсолютно непрерывна по t, из леммы 3 и замечания 1 следует, что

$$l\,(x,t) = \int\limits_t^M L\,(x,\xi)\,d\xi \tag{1.22}$$

хотя бы в смысле интеграла Лебега. Можно показать, однако, что функция $L\,(x,\,\xi)$ в области $[t,\,M]$ имеет ограниченную вариацию по ξ, и (1.22) верно и в смысле интеграла Римана.

Ограничение (1.5) дает $\lim\limits_{t \downarrow 0} l\,(x,\,t) = f\,(x)$ равномерно по x. Переходя в выражении (1.22) к пределу по $t \downarrow 0$, получим:

$$f\,(x) = \int\limits_0^M L\,(x,\xi)\,d\xi. \tag{1.23}$$

Теорема 1. *Пусть функция* $f \in c(0,1)$ *и удовлетворяет граничным условиям* (1.4), *и* $M = \max\,|\,f\,(x)\,|$. *Тогда при каждом* $t \in (0,\,M]$ *существуют два замкнутых непересекающихся множества* $P(t)$ *и* $N\,(t)$, *обладающие свойствами* (a) *и* (b), *таких, что функция двух переменных* $L\,(x,\,t)$, *определенная с помощью этих множеств описанным выше способом, обеспечивает представление функции* f *в виде* (1.23). *Такая функция* L *единственна.*

Существование представления (1.23) нами доказано. Докажем единственность. Пусть нашлись две системы множеств $P_1\,(t)$, $N_1\,(t)$ и $P_2\,(t)$, $N_2\,(t)$, каждая из которых обладает требуемыми свойствами, таких, что построенные по ним функции $L_1(x,\,t)$ и $L_2\,(x,\,t)$ различны. С помощью (1.22) образуем две функции $l_1((x,\,t)$ и $l_2\,(x,\,t)$. Нетрудно показать, что при всяком $t \in (0,\,M]$ каждая из функций l связана со своими множествами соотношениями (1.8) и обладает определяющим свойством решения задачи минимизации функционала $\mathfrak{L}$. Найдется такое $t = t_0$, что функции $l_1\,(x,\,t_0)$ и $l_2\,(x,\,t_0)$ не совпадают как функции x (в противном случае было бы $L_1 = L_2$). Отсюда и следует единственность функции L, так как двух решений задачи минимизации функционала $\mathfrak{L}$ существовать не может.

Мы будем смотреть на выражение (1.23) как на некоторое каноническое разложение непрерывных функций, удовлетворяющих граничным условиям (1.4). Тогда выражение (1.22) можно рассматривать как аналитическое выражение решения задачи минимизации функционала $\mathfrak{L}$. Для задания функции f достаточно задать число M и определить для всех $t \in (0,\,M]$ множества $P\,(t)$ и $N\,(t)$, обладающие требуемыми свойствами.

Теорема 2. *Во всех точках существования производной* $\partial l\,(x,\,t)/\partial x$ *справедливо равенство*

$$\partial l\,(x,t)/\,\partial x = \int\limits_t^M \frac{\partial L\,(x,\xi)}{\partial x}\,d\xi. \tag{1.24}$$

Доказательство. Обозначим $\Omega(x,t)$ множество таких точек $\xi \in [t, M]$, что точка x является концом одного из главных или крайних интервалов множества $D(\xi)$. Пусть $m(x, t)$ — мера множества $\Omega(x, t)$. Везде в $[0,1; t, M]$ производная $\partial L/\partial x$ существует, за исключением таких точек (x, ξ), что $\xi \in \Omega(x, t)$. В этих последних

$$|\partial L(x+0, \xi)/\partial x - \partial L(x-0, \xi)/\partial x| > 1. \tag{1.25}$$

Во всей области $[0,1; t, M]$ справедлива оценка

$$|\partial L(x \pm 0, \xi)/\partial x| \leqslant 2/\lambda(t), \tag{1.26}$$

где $\lambda(t)$ — самый короткий из главных и удвоенных крайних интервалов множества $D(t)$.

Из (1.12) следует существование односторонних производных $\partial l(x \pm \pm 0, t)/\partial x$ везде на $[0, 1]$. Используя теорему о предельном переходе под знаком интеграла в форме n° 488 [8], легко показать, что для всех $x \in [0, 1]$

$$\partial l(x \pm 0, t)/\partial x = \int\limits_t^M \frac{\partial L(x \pm 0, \xi)}{\partial x} d\xi. \tag{1.27}$$

Способ построения функции L и свойство (а) показывают, что величина под знаком модуля в выражении (1.25) при фиксированном x при изменении ξ не может принимать разных знаков. Поэтому из (1.25), (1.26) и (1.27) следует:

$$m(x, t) \leqslant |\partial l(x+0, t)/\partial x - \partial l(x-0,t)/\partial x| \leqslant 4\, m(x, t)/\lambda(t). \tag{1.28}$$

Из этой оценки видно, что производная $\partial l/\partial x$ существует в тех и только тех точках x, где $m(x,t) = 0$. Но в этих же и только в этих точках существует и правая часть (1.24). Равенство правой и левой частей (1.24) в этих точках следует из (1.27). Доказательство закончено.

Теорема 3. *Пусть функция f абсолютно-непрерывна и $f' \in v(0, 1)$. Тогда во всех точках существования производной f'*

$$f'(x) = \int\limits_0^M \frac{\partial L(x, \xi)}{\partial x} d\xi. \tag{1.29}$$

В последнем выражении интеграл может быть несобственным.

Доказательство. Определяющее свойство функции l показывает, что для любых $\alpha, \beta \in [0, 1]$

$$\bigvee_{x=\alpha}^{\beta} \partial l(x, t)/\partial x \leqslant \bigvee_{\alpha}^{\beta} f'. \tag{1.30}$$

Согласно (1.5) при $t_k \downarrow 0$

$$\omega(x, t_k) = l(x, t_k) - f(x) \to 0 \tag{1.31}$$

равномерно по x. Из (1.30) следует, что $\bigvee\limits_{x=0}^{1} \partial\omega/\partial x \leqslant 2 \bigvee\limits_{0}^{1} f'$, и из (1.31) вытекает, что почти всюду $\partial\omega(x, t_k)/\partial x \to 0$, т. е. почти всюду

$$\partial l(x, t_k)/\partial x \to f'(x). \tag{1.32}$$

Покажем, что (1.32) верно во всех точках существования (и непрерывности) производной f'. Этим и будет доказана теорема.

Пусть x_0 — одна из таких точек. Оценка (1.28) показывает, что в этой точке непрерывна и существует каждая из производных $\partial l(x, t_k)/\partial x$. Предположим теперь, что $\partial l(x_0, t_k)/\partial x \to a \neq f'(x_0)$. Окружая точку x_0 достаточно малым сегментом $[\alpha, \beta]$ и используя справедливость (1.32) почти всюду, легко получить противоречие условию (1.30). Доказательство закончено.

Пусть

$$\nu(t) = \bigvee_{x=0}^{1} \partial L(x, t)/\partial x = \frac{1}{\lambda_0} + 4\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_{n+1}}, \tag{1.33}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — длины главных, а λ_0 и λ_{n+1} — длины крайних интервалов множества $D(t)$. Во всей области $(0, M]$ функция ν является невозрастающей, строго положительной, полунепрерывной слева. Это следует из свойств (a), (b) и леммы 2.

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$\int_0^1 \frac{\partial L(x, t_1)}{\partial x} \cdot \frac{\partial L(x, t_2)}{\partial x}\, dx = \nu(\max(t_1, t_2)). \tag{1.34}$$

Доказательство. Предположим, что $t_1 \leqslant t_2$. Пусть $(0, \beta_0)$, $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_n, \beta_n)$, $(\alpha_{n+1}, 1)$ — крайние и главные интервалы множества $D(t_2)$. Будем считать для определенности, что $\beta_0, \alpha_1, \beta_2, \alpha_3, \ldots$ $\ldots \in P(t_2)$, $\beta_1, \alpha_2, \beta_3, \alpha_4, \ldots \in N(t_2)$. Имеем:

$$\int_0^1 \frac{\partial L(x, t_1)}{\partial x} \cdot \frac{\partial L(x, t_2)}{\partial x}\, dx = \int_0^1 \frac{\partial L(x, t_2)}{\partial x}\, d_x L(x, t_1) =$$

$$= \int_0^{\beta_0} + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_i}^{\beta_i} + \int_{\alpha_{n+1}}^{1} + \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\beta_{i-1}}^{\alpha_i}.$$

Каждый из интегралов $\int_{\beta_{i-1}}^{\alpha_i}$ равен 0, так как на $[\beta_{i-1}, \alpha_i]$ функция $L(x, t_1)$ как функция x постоянна. В каждом из трех первых интегралов значение производной $\partial L(x, t_2)/\partial x$ постоянно и равно соответственно $1/\beta_0$, $(-1)^i \cdot 2/(\beta_i - \alpha_i)$, $(-1)^{n+1}/(1 - \alpha_{n+1})$. Поэтому

$$\int_0^1 \frac{\partial L(x, t_1)}{\partial x} \cdot \frac{\partial L(x, t_2)}{\partial x}\, dx = L(\beta_0, t_1)/\beta_0 +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot [L(\beta_i, t_1) - L(\alpha_i, t_1)]/(\beta_i - \alpha_i) + (-1)^n \cdot L(\alpha_{n+1}, t_1)/(1 - \alpha_{n+1}).$$

Но из свойства (a) следует: $\beta_0, \alpha_1, \beta_2, \alpha_3, \ldots \in P(t_1)$, $\beta_1, \alpha_2, \beta_3, \alpha_4, \ldots$ $\ldots \in N(t_1)$ и $L(\beta_0, t_1) = 1$, $L(\beta_i, t_1) - L(\alpha_i, t_1) = (-1)^i \cdot 2$,

$L(\alpha_{n+1}, t_1) = (-1)^n$. Отсюда, учитывая (1.33), получаем (1.34). Доказательство закончено.

Заметим теперь, что справедливы равенства

$$\bigvee_{x=0}^{1} \frac{\partial l(x,t)}{\partial x} = \int_t^M \nu(\xi)\, d\xi \tag{1.35}$$

и

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial l(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx = 2\int_t^M (\xi - t)\cdot \nu(\xi)\, d\xi. \tag{1.36}$$

Равенство (1.35) следует из (1.24), если учесть, что правая часть (1.24) представляет собой суперпозицию функций, у которых множества точек роста $N(t)$ и убывания $P(t)$ не пересекаются. Вариация такой суперпозиции точно равна сумме (интегралу) вариаций составляющих функций.

Равенство (1.36) также следует из (1.24). Необходимо поменять порядок интегрирования и воспользоваться (1.34).

Теорема 4. *В условиях теоремы* 3

$$\bigvee_0^1 f' = \int_0^M \nu(\xi)\, d\xi \tag{1.37}$$

и

$$\|f'\|^2 = \int_0^1 (f'(x))^2\, dx = 2\int_0^M \xi\cdot\nu(\xi)\, d\xi. \tag{1.38}$$

Доказательство. Используя (1.30) и (1.32), можно показать, что $\lim\limits_{t_k \downarrow 0} \bigvee_{x=0}^{1} \partial l(x,t_k)/\partial x = \bigvee_0^1 f'$. Тогда (1.37) следует из (1.35). Равенство (1.38) следует из (1.36) и (1.32).

Теорема 5. *Пусть*

$$\int_0^M \nu(\xi)\, d\xi < \infty. \tag{1.39}$$

Тогда f — абсолютно-непрерывная функция и $f' \in v(0,1)$.

Доказательство. Пусть $t_k \downarrow 0$. Согласно (1.35) функции $\partial l(x, t_k)/\partial x$ имеют в совокупности ограниченные вариации. Поэтому у последовательности $\partial l(x, t_k)/\partial x$ существует частичный предел $g \in v(0,1)$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, имеем: $\partial l(x, t_k)/\partial x \to g(x)$, и равномерно по $x \in [0, 1]$

$$l(x, t_k) = \int_0^x \frac{\partial l(u, t_k)}{\partial u}\, du \to \int_0^x g(u)\, du,$$

откуда, вследствие сходимости (1.31), получаем: $f(x) = \int_0^x g(u)\, du$, что и требовалось. Доказательство закончено.

В заключение параграфа докажем справедливость равенства

$$U(\varphi) = \int_0^M \int_0^1 \varphi(x) \frac{\partial L(x, \xi)}{\partial x} \, dx \, d\xi \tag{1.40}$$

для функционала (0.10) в случае, когда функция f, определяемая (0.11), представлена в виде (1.23). Согласно (0.12) и (1.24)

$$U(\varphi) = \lim_{t \downarrow 0} \int_0^1 \varphi(x) \, d_x l(x, t) = \lim_{t \downarrow 0} \int_0^1 \varphi(x) \cdot \frac{\partial l(x, t)}{\partial x} \, dx =$$
$$= \lim_{t \downarrow 0} \int_0^1 \varphi(x) \int_t^M \frac{\partial L(x, \xi)}{\partial x} \, d\xi \, dx = \lim_{t \downarrow 0} \int_t^M \int_0^1 \varphi(x) \frac{\partial L(x, \xi)}{\partial x} \, dx \, d\xi,$$

откуда и следует (1.40).

§ 2. Решение задачи оценки погрешности

Теперь мы укажем некоторые случаи решения задачи (0.6) — (0.10). Решением этой задачи будем называть функцию, значение функционала (0.10) на которой равно S. Существование решения следует из компактности в себе множества H в пространстве $v\,(0, 1)$.

Пусть по заданной функции F вычислена функция (0.11) и представлена в виде (1.23).

Теорема 6. *При любом* $t \in (0, M)$ *функция*

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{\mu} \partial l(x, t)/\partial x = \frac{1}{\mu} \int_t^M \frac{\partial L(x, \xi)}{\partial x} \, d\xi, \tag{2.1}$$

где

$$\mu = \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\partial l(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx} = \sqrt{2 \int_t^M (\xi - t) \, \nu(\xi) \, d\xi}, \tag{2.2}$$

является решением задачи (0.6) — (0.10) *для*

$$v = \frac{1}{\mu} \bigvee_{x=0}^{1} \partial l(x, t)/\partial x = \frac{1}{\mu} \int_t^M \nu(\xi) \, d\xi. \tag{2.3}$$

При этом

$$S = \frac{1}{\mu} \int_t^M (2\xi - t) \, \nu(\xi) \, d\xi = \mu + tv. \tag{2.4}$$

Выражения (2.1) — (2.4) *дают параметрическое решение задачи и выражение* S *для значений* v, *определяемых неравенством*

$$\sqrt{\nu(M)} < v < \bigvee_0^1 f' / \|f'\|, \tag{2.5}$$

в случае, если F — абсолютно-непрерывная функция с производной ограниченной вариации, и для значений

$$\sqrt{\nu(M)} < v \leqslant \infty \tag{2.6}$$

— в противном случае.

При монотонном непрерывном изменении параметра t в области $(0, M)$ величина (2.3) меняется монотонно и непрерывно в областях (2.5) или (2.6). При $t \uparrow M$

$$v \to \sqrt{\nu(M)}, \quad \varphi^*(x) \to \frac{1}{\sqrt{\nu(M)}}\, \partial L(x, M)/\partial x, \quad S \to M\sqrt{\nu(M)}. \tag{2.7}$$

В случае, если F — абсолютно-непрерывная функция с производной ограниченной вариации, при $t \downarrow 0$

$$v \to \bigvee_0^1 f'/\|f'\|, \ \varphi^*(x) \to f'(x)/\|f'\|, \ S \to \|f'\|. \tag{2.8}$$

В противном случае при $t \downarrow 0$

$$v \to \infty. \tag{2.9}$$

Замечания. 1. В случае абсолютной непрерывности F и $F' \in v(0,1)$ при $v \geqslant \bigvee_0^1 f'/\|f'\|$

$$\varphi^*(x) = f'(x)/\|f'\|, \quad S = \|f'\|.$$

2. При $v = \sqrt{\nu(M)}$

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu(M)}}\, \partial L(x, M)/\partial x, \quad S = M\sqrt{\nu(M)}.$$

3. При $v < \sqrt{\nu(M)}$ для оценки S сверху можно пользоваться выражением (0.13).

Доказательство. Пусть $t \in (0, M)$ фиксировано, и величина v определяется выражением (2.3). Легко проверить, что $\varphi^* \in H$ и удовлетворяет ограничению (0.8) (и выполняется равенство).

Введем множество H_1, определяемое ограничениями (0.6), (0.8) и

$$\|\varphi\|^2 = \int_0^1 (\varphi(x))^2\, dx \leqslant 1. \tag{2.10}$$

Так как $H \subset H_1$, то $\varphi^* \in H_1$. Мы покажем, что

$$U(\varphi^*) = \sup U(\varphi), \quad \varphi \in H_1, \tag{2.11}$$

где функционал U равен (0.10). Из включения $H \subset H_1$ при этом следует:

$$S = U(\varphi^*) = \sup U(\varphi), \quad \varphi \in H.$$

Функцию r будем называть допустимым направлением в точке φ^*, если $\varphi^* + \varepsilon r \in H_1$ при некотором $\varepsilon > 0$. Множество K всех допустимых направлений образует конус в пространстве $v\,(0, 1)$. Так как множество H_1 выпукло, а функционал U линеен, для доказательства (2.11) необходимо и достаточно показать, что

$$U\,(r) \leqslant 0 \text{ для всех } r \in K. \tag{2.12}$$

Пусть подпространство $v_0\,(0,1) \subset v\,(0, 1)$ таково, что ограничение (0.6) удовлетворяется для всех $\varphi \in v_0\,(0,1)$. Очевидно, $K \subset v_0\,(0, 1)$.

Пусть $\mathfrak{I}$ — множество всевозможных B-измеримых на $[0,1]$ функций, принимающих значение -1 на множестве $P\,(t)$ и значение $+1$ на множестве $N\,(t)$, а вне этих множеств — значение $+1$ либо -1. В подпространстве $v_0\,(0,1)$ определим конус $\overline{K}$ следующими ограничениями:

$$\int_0^1 I\,(x)\,dr\,(x) \leqslant 0 \text{ для всех } r \in \overline{K} \text{ и всех } I \in \mathfrak{I} \tag{2.13}$$

и

$$\int_0^1 l\,(x, t)\,dr\,(x) \geqslant 0 \text{ для всех } r \in \overline{K}. \tag{2.14}$$

Мы хотим теперь показать, что $\overline{K} \supseteq K$. Для этого нужно показать, что из того, что $r \notin \overline{K}$, следует: $r \notin K$. Пусть $r \notin \overline{K}$. Тогда либо существует такая функция $I_1 \in \mathfrak{I}$, что

$$\int_0^1 I_1\,(x)\,dr\,(x) > 0, \tag{2.15}$$

либо нарушено ограничение (2.14).

Предположим первое. Заметим, что $\int_0^1 I\,(x)\,d\varphi^*\,(x) = v$ для всех $I \in \mathfrak{I}$.

Заметим также, что для любой B-измеримой функции I, принимающей значения ± 1, и любой функции $\varphi \in v\,(0,1)$ верно неравенство $\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}\varphi \geqslant \int_0^1 I\,(x)d\varphi\,(x)$. Поэтому при любом $\varepsilon > 0$ согласно (2.15)

$$\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}\,(\varphi^* + \varepsilon r) \geqslant \int_0^1 I_1\,(x)\,d\,(\varphi^*\,(x) + \varepsilon r\,(x)) = v + \varepsilon \int_0^1 I_1\,(x)\,dr\,(x) > v,$$

т. е. нарушено ограничение (0.8). Следовательно, $r \notin K$.

Предположим теперь, что нарушено ограничение (2.14). Тогда

$$\int_0^1 r\,(x)\cdot\varphi^*\,(x)\,dx = \frac{1}{\mu}\int_0^1 r\,(x)\,\frac{\partial l\,(x, t)}{\partial x}\,dx = -\frac{1}{\mu}\int_0^1 l\,(x, t)\,dr\,(x) > 0,$$

и при любом $\varepsilon > 0$

$$\|\varphi^* + \varepsilon r\|^2 = 1 + 2\varepsilon \int_0^1 r\,(x)\cdot\varphi^*\,(x)\,dx + \varepsilon^2 \|r\|^2 > 1,$$

т. е. нарушено ограничение (2.10). Следовательно и в этом случае $r \notin K$.

Итак, доказано, что $\bar{K} \supseteq K$, и для доказательства (2.12) достаточно показать, что

$$U(r) \leqslant 0 \text{ для всех } r \in \bar{K}. \tag{2.16}$$

Докажем справедливость (2.16). Пусть $\omega(x, t) = l(x, t) - f(x)$. Введём функцию $I_\xi(x)$, положив $I_\xi(x) = 1$, если $\omega(x, t) > \xi$, и $I_\xi(x) = -1$, если $\omega(x, t) \leqslant \xi$. Так как $|\omega(x, t)| \leqslant t$, то

$$\omega(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-t}^{t} I_\xi(x)\, d\xi. \tag{2.17}$$

Легко видеть, что $I_\xi(x) \in \mathfrak{J}$ для всех $\xi \in [-t, t)$. Поэтому из (2.13) и (2.17) вытекает:

$$\int_0^1 \omega(x, t)\, dr(x) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad r \in \bar{K}. \tag{2.18}$$

Тогда согласно (0.12), (2.14) и (2.18) для всех $r \in \bar{K}$ получим:

$$U(r) = -\int_0^1 f(x)\, dr(x) = -\int_0^1 l(x, t)\, dr(x) + \int_0^1 \omega(x, t)\, dr(x) \leqslant 0,$$

что и требовалось. Итак, доказано, что функция φ^*, определяемая (2.1), является решением задачи (0.6) — (0.10) при значении v, равном (2.3).

Докажем справедливость (2.4). Согласно (1.40) и (1.34)

$$S = U(\varphi^*) = \frac{1}{\mu} \int_0^M \int_t^M \nu(\max(\xi_1, \xi_2))\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

откуда и следует (2.4).

Непрерывность v по t очевидна. Для доказательства монотонности продифференцируем равенство (2.3) по t:

$$dv/dt = \frac{1}{\mu} \int_t^M \nu(\xi)\, d\xi \cdot \left(\int_t^M \nu(\xi)\, d\xi \Big/ 2\int_t^M (\xi - t)\, \nu(\xi)\, d\xi - \nu(t) \Big/ \int_t^M \nu(\xi)\, d\xi \right). \tag{2.19}$$

Для всякой невозрастающей неотрицательной функции g справедливо неравенство:

$$\omega_1 = \int_0^1 xg(x)\, dx \Big/ \int_0^1 g(x)\, dx \geqslant \omega_2 = \int_0^1 g(x)\, dx / 2g(0). \tag{2.20}$$

Действительно, ω_1 — абсцисса центра тяжести криволинейной трапеции под кривой $y = g(x)$. Так как g — невозрастающая функция, часть площади этой трапеции слева от абсциссы ω_1 не менее $\frac{1}{2} \int_0^1 g(x)\, dx$, а ω_2 — длина прямоугольника площадью ровно $\frac{1}{2}\int\limits_0^1 g(x)\,dx$ с высотой $g(0)$. Из сопоставления этих фактов с учетом невозрастания g легко усмотреть справедливость неравенства (2.20).

Из равенства (2.19) с учётом (2.20) и невозрастания ν следует, что $dv/dt \leqslant 0$, и требуемая монотонность.

Все пределы (2.7) легко получаются, если заметить, что

$$\lim_{t\uparrow M}\mu = 0, \quad \lim_{t\uparrow M}\mu/(M-t) = \sqrt{\nu(M)}.$$

Пределы (2.8) получаются с учётом теорем 3 и 4.

Для доказательства (2.9) положим

$$w(t) = \int\limits_t^M \nu(\xi)\,d\xi.$$

Функция w строго убывающая. Поэтому для всех $t \in (0, M)$

$$\int\limits_t^M (\xi - t)\,\nu(\xi)\,d\xi = \int\limits_t^M w(\xi)\,d\xi < M\cdot w(t)$$

и, согласно (2.2) и (2.3), $v > \sqrt{w(t)/2M}$ и $w(t) < 2Mv^2$. Отсюда на основании предположения $v < \infty$ следует (1.39), и согласно теореме 5 функции f и F оказываются абсолютно-непрерывными с производными ограниченной вариации. Полученное противоречие доказывает справедливость (2.9).

Теорема полностью доказана.

Поступила в редакцию
24.3.70

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. П. Бусленко, Ю. А. Шрейдер, Метод статистических испытаний (Монте-Карло) и его реализация на ЦВМ, М., Физматгиз, 1961.

[2] И. М. Крихели, А. М. Морозов, Разработка электронных устройств для моделирования статистических задач автоматического управления, Труды Головного НИИ автоматизации производственных процессов в промышленности, вып. 2, г. Гори, 1963, 51—74.

[3] Г. А. Козлов, Е. Е. Кузнецова, Датчик случайных кодов для ЭВМ, Известия ВУЗ, Приборостроение, X, 9 (1967), 55—60.

[4] В. И. Нейман, К теории генератора случайных знаков, Проблемы передачи информации, вып. 12, М., изд-во АН СССР, 1963, 105—108.

[5] Г. А. Козлов, О распределении случайных чисел, вырабатываемых последовательными физическими датчиками, Теория вероят. и её примен., XVI, 2, 1971, 370—378.

[6] Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3, М.—Л., Гостехиздат, 1949.

[7] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, М.—Л., Гостехиздат, 1951.

[8] Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

ON ESTIMATION OF THE ERROR OF MONTE-CARLO TECHNIQUE CAUSED BY IMPERFECTIONS OF THE DISTRIBUTION OF RANDOM NUMBERS

G. A. KOZLOV (MOSCOW)

(Summary)

An approach to estimation of the Monte-Carlo technique error caused by imperfections of the distribution of random numbers is proposed. The approach is illustrated by an example of the simple integral $\bar{\varphi} = \int_0^1 \varphi(x)\,dx$ calculation by the method of independent tests. The error is estimated by

$$S = \sup U(\varphi),\ \ \varphi \in G,\ \ U(\varphi) = \left(\int_0^1 \varphi(x)\,dF(x) - \bar{\varphi}\right) \Big/ \sqrt{\int_0^1 (\varphi(x) - \bar{\varphi})^2\,dx},$$

where F is the distribution function of random numbers in the interval [0, 1], G is the class of functions with finite «standartized variation»:

$$G = \left\{\varphi : \bigvee_0^1 \varphi \Big/ \sqrt{\int_0^1 (\varphi(x) - \bar{\varphi})^2\,dx} \leqslant v\right\}.$$

It is shown that the problem of determining the value S can be reduced to a variational problem of finding the function that minimizes the functional $U(\varphi) = \int_0^1 \varphi\,dF$ under the following restrictions:

$$\int_0^1 \varphi\,dx = 0,\ \ \int_0^1 \varphi^2 dx = 1 \ \text{and}\ \bigvee_0^1 \varphi \leqslant v.$$

A solution of this variational problem is given.