Дискретная математика

том 17 выпуск 2 * 2005

УДК 510.5

Об обобщениях понятия полурекурсивности

© 2005 г. А. Н. Дегтев

Наравне с классами полурекурсивных, слабо полурекурсивных, полурекурсивно-перечислимых и wsr* множеств, введенных К. Джокушем, М. Куммером и Ф. Стефаном, определяются классы почти и частично полурекурсивных множеств. Полностью выясняются соотношения между этими классами множеств относительно включения.

Пусть $A \subseteq \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ и существует двуместная общерекурсивная функция f такая, что для всех $x, y \in \mathbf{N}$ выполнено одно из условий

$$\begin{aligned} x \in A \vee y \in A &\iff f(x,y) \in \{x,y\} \cap A, \\ x \in A \wedge y \in A &\iff f(x,y) \in \{x,y\} \cap A, \\ (x \in A \wedge y \notin A) \vee (x \notin A \wedge y \in A) &\implies f(x,y) \in \{x,y\} \cap A. \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда множество A называется полурекурсивным. Несложно показать [7, 9], что эти три условия равносильны. Понятие полурекурсивности неоднократно обобщалось [1–6, 8].

Множество $A \subseteq \mathbf{N}$ называется

- слабо полурекурсивным (wsr множеством) [7], если найдется двуместная частично рекурсивная функция f такая, что для всех $x, y \in \mathbf{N}$ выполнено условие (1),
- полурекурсивно-перечислимым (sre множеством), если

$$x \in A \vee y \in A \implies f(x,y) \in \{x,y\} \cap A,$$

- wsr* множеством [9], если выполнены условия

  (a) $f(x,y)\downarrow \implies f(x,y) \in \{x,y\}$,

  (b) $x \in A \wedge y \in A \implies f(x,y)\downarrow$,

  (c) $f(x,y)\downarrow \wedge f(x,y) \in A \implies x \in A \wedge y \in A$,

  где $f(x,y)\downarrow$ означает, что значение $f(x,y)$ определено.

С точки зрения определений слабо β-комбинаторно селекторных [3] и слабо β-импликативно селекторных множеств [4], wsr* и sre множества будут соответственно слабо xy-комбинаторно селекторным и $x \vee y$-комбинаторно селекторным множествами, а wsr множество — слабо $(\bar{y}x \vee \bar{x}y)$-импликативно селекторным множеством. Понятия слабо $x \wedge y$-импликативно селекторных и $x \vee y$-комбинаторно селекторных множеств совпадают. Но можно ввести в рассмотрение класс слабо xy-импликативно селекторных множеств A,

определяемых следующим образом (см. [4]): существует двуместная частично рекурсивная функция f такая, что для всех $x, y \in \mathbf{N}$

$$x \in A \wedge y \in A \Longrightarrow f(x, y) \in \{x, y\} \cap A.$$

Однако нетрудно понять, что класс таких множеств совпадает с F^{∞} в обозначениях статьи [4], то есть с классом всех подмножеств $\mathbf{N}$.

Пусть $A \subseteq \mathbf{N}\bar{a} \in \bar{A} = \mathbf{N} \setminus A$ и β — n-местная булева функция. Тогда A было названо в [6] почти β-комбинаторно селекторным множеством, если существует n-местная общерекурсивная функция f такая, что для всех $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{N}$

$$\beta(\chi(x_1), \ldots, \chi(x_n)) = 1 \iff f(x_1, \ldots, x_n) \in \{x_1, \ldots, x_n, \bar{a}\} \cap A,$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) \in \{x_1, \ldots, x_n, \bar{a}\}, \quad (2)$$

где χ — характеристическая функция A. При $\beta = xy$ назовем A почти полурекурсивным (asr) множеством. Если в (2) $\bar{a}$ заменено на $a \in A$, то A называется частично β-комбинаторно селекторным множеством, а при $\beta = x \vee y$ — частично полурекурсивным (psr) множеством. Если же в (2) выбросить $\bar{a}$, то придем к понятию β-селекторного множества [1]. Для них в [1] получен следующий результат: если булева функция β такова, что $\beta(x, \ldots, x) = x$, то класс всех β-селекторных множеств совпадает с классом $F^{(0)}$ всех рекурсивных множеств, или с классом $F^{(1)}$ всех полурекурсивных множеств, или с классом $F^{(\infty)}$.

Выше в определениях различных понятий множества A участвовала общерекурсивная функция или частично рекурсивная функция f. Будем говорить, что A является одним из вышеназванных множеств посредством f, а f называть функцией, соответствующей A.

Предложение 1. *Каждое множество, являющееся одновременно* asr *и* wsr *множеством, полурекурсивно.*

Доказательство. Каждое asr множество A является wsr* множеством, поэтому, будучи и wsr множеством, A является sre множеством [10]. Поэтому пусть A — asr и sre множество посредством общерекурсивной функции f и частично рекурсивной функции g соответственно и

$$B_0 = \{x \colon (\exists y)(f(x, y) = \bar{a} \wedge g(x, y) = y)\},$$
$$B_{n+1} = \{x \colon (\exists y)(y \in B_n \wedge f(x, y) = x)\}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Заметим, что $B_0 \neq \varnothing$, так как если $y \in A$, то $g(\bar{a}, y) = y$ и, следовательно, $\bar{a} \in A$. Далее, $B = \bigcup_{n \geqslant 0} B_n$ — рекурсивно перечислимое подмножество $\bar{A}$, и если $\bar{A} = B$, то A — asr множество с рекурсивно перечислимым дополнением, а поэтому полурекурсивно. Действительно, определим общерекурсивную функцию h следующим образом. Если $f(x, y) \in \{x, y\}$, то положим $h(x, y) = f(x, y)$. Если же $f(x, y) = \bar{a}$, то по крайней мере один из элементов x, y принадлежит $\bar{A}$. Перечисляя элементы множества A, обнаружим такое число и положим $h(x, y)$ равным этому числу. Ясно, что A оказалось xy-селекторным множеством посредством общерекурсивной функции h, а поэтому и полурекурсивным.

Пусть теперь $b \in A \setminus B$ и $R = \{y \colon f(b, y) = y\}$. Тогда R — рекурсивное множество, $B \subseteq R \subseteq A$ и

$$x \in \bar{R} \wedge f(x, y) = \bar{a} \Longrightarrow y \in \bar{A}.$$

Действительно, если $y \in A$, то $x \in \bar{A}$ и $g(x, y) = y$. Поэтому $x \in B_0$, что противоречит предположению. Теперь положим по определению

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } f(x, y) \in \{x, y\} \wedge x \in \bar{R}, \\ x, & \text{если } x \in R, \\ y, & \text{если } x \in \bar{R} \wedge f(x, y) = a. \end{cases}$$

Легко проверить, что A является xy-селекторным множеством посредством общерекурсивной функции h и, следовательно, полурекурсивным множеством.

Обозначим через $K(\text{abc})$ класс всех abc множеств.

Теорема 1. *Справедливы следующие соотношения по включению между классами* wsr, wsr*, sre, asr *и* sr *множеств:*

$$\begin{aligned} K(\text{asr}) &\subseteq K(\text{wsr}^*), \\ K(\text{sr}) &= K(\text{sre}) \cap K(\text{asr}), \\ K(\text{sre}) &= K(\text{wsr}) \cap K(\text{wsr}^*), \\ K(\text{wsr}^*) \setminus K(\text{wsr}) &\cup K(\text{asr}) \neq \varnothing, \\ K(\text{asr}) \setminus K(\text{wsr}) &\neq \varnothing, \\ K(\text{wsr}) \setminus K(\text{wsr}^*) &\neq \varnothing, \\ K(\text{sre}) \setminus K(\text{sr}) &\neq \varnothing. \end{aligned}$$

Доказательство. Первое включение очевидно, ясно также, что каждое полурекурсивное sr множество является как и sre, так и asr множеством, а по предложению 1 верно и обратное. В то же время A является sre множеством тогда и только тогда, когда A — одновременно wsr и wsr* множество [10]. С другой стороны, существуют wsr* множества, не являющиеся wsr или asr множествами, так же как и asr, но не wsr множества [5]. Легко показать также, что A полурекурсивно тогда и только тогда, когда A и $\bar{A}$ — sre множества [9]. Значит, если A — частично полурекурсивное, но не полурекурсивное множество, то $\bar{A}$ будет wsr, но не wsr* множеством [9], а само A будет не полурекурсивным sre множеством.

Обратимся теперь к psr множествам. Ясно, что если A — asr множество посредством общерекурсивной функции f, то $\bar{A}$ — psr множество посредством той же общерекурсивной функции f. Поэтому из предложения 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Каждое* psr *множество с* wsr *дополнением является полурекурсивным.*

Предложение 2. *Каждое множество, являющееся одновременно* psr *и* wsr *множеством, полурекурсивно.*

Доказательство. Пусть A — psr и wsr множество посредством общерекурсивной функции f и частично рекурсивной функции g соответственно и

$$\begin{aligned} B_0 &= \{g(x, y) \colon f(x, y) = a\}, \\ B_{n+1} &= \{x \colon (\exists y)(y \in B_n \wedge f(x, y) = x)\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Можно считать, что $B_0 \neq \varnothing$, так как в противном случае $f(x, y) = a \Longrightarrow x, y \in A$, и полурекурсивность A очевидна. Ясно также, что $B = \bigcup_{n \geqslant 0} B_n$ — рекурсивно перечислимое подмножество A, и если $A = B$, то $\bar{A}$ будет asr множеством с рекурсивно

перечислимым дополнением и, как показано в предложении 1, A оказывается полурекурсивным множеством.

Пусть теперь $b \in A \setminus B$ и $R = \{y\colon f(b, y) = y\}$. Значит, R — рекурсивное множество, $B \subseteq R \subseteq A$ и

$$x \in \bar{R} \wedge f(x, y) = a \Longrightarrow y \in A,$$

так как $y \in \bar{A} \Longrightarrow x \in A \Longrightarrow g(x, y) = x \Longrightarrow x \in B_0$, что противоречит выбору x. Положим по определению

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } f(x, y) \in \{x, y\} \wedge x \in \bar{R}, \\ x, & \text{если } x \in R, \\ y, & \text{если } f(x, y) = a \wedge x \in \bar{R}. \end{cases}$$

Понятно, что A является полурекурсивным множеством посредством общерекурсивной функции h.

Предложение 3. *Каждое множество, являющееся одновременно* psr *и* wsr* *множеством, полурекурсивно.*

Доказательство. Пусть A — psr и wsr множество посредством общерекурсивной функции f и частично рекурсивной функции g соответственно и

$$B_0 = \{x\colon (\exists y)(f(x, y) = a \wedge g(x, y) = y)\},$$
$$B_{n+1} = \{x\colon (\exists y)(f(x, y) = x \wedge y \in B_n)\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Можно считать, что $g(a, a) = a$ и так как $f(a, a) = a$, то $a \in B_0$, то есть $B_0 \neq \varnothing$. Ясно, что $B = \bigcup_{\geqslant 0} B_n$ — рекурсивно перечислимое подмножество A, и если $B = A$, то A, как и в предложении 1, оказывается полурекурсивным множеством.

Пусть теперь $b \in A \setminus B$ и $R = \{y\colon f(b, y) = y\}$. Понятно также, что $R \subseteq A$ и $y \in B \Rightarrow f(b, y) = y$, так как в противном случае $b \in B$, что противоречит выбору элемента b. Значит, R — рекурсивное множество и $B \subseteq R \subseteq A$.

Предположим, что для всех $x, y \in \mathbf{N}$, если $f(x, y) = a$, то $\{x, y\} \cap A \neq \varnothing$. Тогда A — полурекурсивное множество посредством общерекурсивной функции h, где

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } f(x, y) \in \{x, y\}, \\ x, & \text{если } f(x, y) = a \wedge x \in R, \\ y, & \text{если } f(x, y) = a \wedge y \in R. \end{cases}$$

Если же $f(x, y) = a$ и $\{x, y\} \cap R = \varnothing$, то $g(x, y)\uparrow$, так как в противном случае либо x, либо y принадлежал бы B_0 и поэтому принадлежал бы и R, что противоречит предположению. Следовательно, в этом случае один элемент из x, y принадлежит $\bar{A}$. Пусть $\bar{a}$ — фиксированный элемент из $\bar{A}$. Тогда A будет asr множеством посредством общерекурсивной функции h, где

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } f(x, y) = y \vee (f(x, y) = a \wedge y \in R), \\ x, & \text{если } f(x, y) = x \vee (f(x, y) = a \wedge x \in R), \\ a, & \text{если } f(x, y) = a \vee \{x, y\} \cap R = \varnothing. \end{cases}$$

Но $\bar{A}$ — также asr множество, поэтому A — полурекурсивное множество (см. [5]).

Теорема 2. *Каждое* psr *множество, которое является* wsr *или* wsr* *множеством, полурекурсивно, но существует* psr *множество, которое не является ни* wsr, *ни* wsr* *множеством.*

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы следует из предложений 2 и 3. Докажем вторую часть.

В [5] автором было построено asr множество, не являющееся wsr множеством и тем более полурекурсивным. Тогда дополнение этого множества будет psr, но по предложениям 2 и 3 ни wsr, ни wsr* множеством.

Предложение 4. *Каждое почти β-комбинаторно селекторное множество является частично γ-комбинаторно селекторным множеством для подходящей булевой функции γ.*

Доказательство. Пусть $\bar{A}$ — почти β-комбинаторно селекторное множество посредством общерекурсивной функции f, $\bar{a} \in \bar{A}$ и булева функция γ определена следующим образом: $\gamma(\theta_1, \dots, \theta_n) = \bar{\beta}(\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_n)$.

Справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
\beta(\chi(x_1), \dots, (x_n)) = 1 &\Longrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \in \{x_1, \dots, x_n\} \cap A \\
&\Longrightarrow \gamma(\overline{\chi(\overline{x_1})}, \dots, \overline{\chi(\overline{x_n})}) = 1, \\
\beta(\chi(x_1), \dots, \chi(x_n)) = 0 &\Longrightarrow (f(x_1, \dots, x_n) \in \cap A) \vee (f(x_1, \dots, x_n) = a) \\
&\Longrightarrow \gamma(\overline{\chi(\overline{x_1})}, \dots, \overline{\chi(\overline{x_n})}) = 1.
\end{aligned}$$

Поэтому A будет psr множеством посредством общерекурсивной функции f.

Пусть $P(\beta)$ — класс всех частично β-комбинаторно селекторных множеств.

Теорема 3. *Если булева функция β такова, что $\beta(x, \dots, x) = x$, то $P(\beta)$ совпадает с одним из классов $F^{(0)} \subset F^{(1)} \subset P(x \vee y) \subset F^{\infty}$, причем все включения строгие.*

Доказательство. В [6] автором было доказано, что если булева функция β такова, что $\beta(x, \dots, x) = x$, то класс $A(\beta)$ всех почти β-комбинаторно селекторных множеств совпадает с одним из классов $F^{(0)} \subset F^{(1)} \subset A(xy) \subset F^{\infty}$, причем все включения строгие. Используя предложение 4, получаем утверждение теоремы. Напомним, что классы $A(xy)$ и $P(x \vee y)$ являются классами почти и частично полурекурсивных множеств соответственно.

В заключение дадим ответ на вопрос из работы [3]. Пусть $\beta = x \vee y$ и $\gamma = xy \vee xz \vee yz$, а $K(\beta)$ и $K(\gamma)$ — соответственно классы слабо β-комбинаторно селекторных и γ-комбинаторно селекторных множеств. В [3] показано, что $K(\beta) \subseteq K(\gamma)$, но оставалось не ясным, является ли это включение строгим. Оказывается, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Справедливо равенство $K(\beta) = K(\gamma)$.*

Доказательство. Пусть $A \in K(\gamma)$, трехместная частично рекурсивная функция f соответствует A и a, $\bar{a}$ — фиксированные элементы из A и $\bar{A}$. Будем определять двуместную частично рекурсивную функцию g, посредством которой A окажется слабо β-комбинаторно селекторным множеством. Ясно, что если $x \in A$ или $y \in A$, то $f(x, y, a)\downarrow$. Поэтому начинаем вычислять значение $f(x, y, a)$, и если $f(x, y, a)\uparrow$, то и $g(x, y)\uparrow$. Пусть $f(x, y, a)\downarrow$.

Рассмотрим два случая.

В первом случае $f(x,y,a) \in \{x,y\}$.
Полагаем $g(x,y) = f(x,y,a)$.

Во втором случае $f(x,y,a) = a$. Рассматриваем тот подслучай второго случая, выполнение условий которого выяснится раньше.

Подслучай A: справедливо равенство $f(x,y,\bar{a}) = x$ ($f(x,y,\bar{a}) = y$). Полагаем $g(x,y) = y$ ($g(x,y) = x$), замечая, что $x, y \in A \Longrightarrow f(x,y,\bar{a})\downarrow$.

Подслучай B: найдется число u такое, что $f(y,u,a) = u = f(x,u,\bar{a})$. Так как $u \in A \Longrightarrow x \in A$ и $u \in \bar{A} \Longrightarrow y \in \bar{A}$, полагаем $g(x,y) = x$.

Покажем, что если A — не рекурсивно перечислимое множество (все рекурсивно перечислимые множества являются слабо β-комбинаторно селекторными множествами), $x \in A$ и $y \in \bar{A}$, то такое число u существует. Рассмотрим рекурсивно перечислимые множества $B = \{u\colon f(x,u,a) \in \{a,u\}\}$, $C = \{u\colon f(x,u,\bar{a}) \in \{x,u\}\}$. Ясно, что $A \subseteq B \cap C$ и в качестве u можно взять любое число из $(B \cap C) \setminus A$.

Подслучай C: найдется число u такое, что $f(x,u,a) = u = f(y,u,\bar{a})$. Полагаем $g(x,y) = y$.

Если же выполнение условий одного из подслучаев обнаружить не удается, то $g(x,y)$ неопределено.

Список литературы

1. Дегтев А. Н., Рекурсивно-комбинаторные свойства подмножеств натуральных чисел. *Алгебра и логика* (1990) **29**, №3, 303–314.
2. Дегтев А. Н., Импликативно селекторные множества. *Алгебра и логика* (1996) **35**, №2, 145–153.
3. Дегтев А. Н., Иванов Д. И., Слабо комбинаторно селекторные множества. *Алгебра и логика* (1998) **37**, №6, 627–636.
4. Дегтев А. Н., Иванов Д. И., Слабо импликативно селекторные множества размерности 3. *Дискретная математика* (1999) **11**, №3, 126–132.
5. Дегтев А. Н., Почти полурекурсивные множества. *Матем. заметки* (1999) **66**, №2, 188–193.
6. Дегтев А. Н., Почти комбинаторно селекторные множества. *Матем. заметки* (2000) **68**, №6, 851–853.
7. Jockusch C. G., Semirecursive sets and positive reducibility. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1968) **131**, 420–436.
8. Jockusch C. G., Owings J. C., Weakly semirecursive sets. *J. Symb. Logic* (1990) **55**, 627–644.
9. Kummer M., Stephan F., Weakly semirecursive sets and r. e. orderings. *Ann. Pure Appl. Logic* (1993) **60**, 133–150.

Статья поступила 18.07.2002.
Переработанный вариант поступил 16.09.2003.