ДЕКАБРЬ 1993 г., ТОМ 29, № 12

УДК 517.95

В. И. ПРОХОРЕНКО

ОБ АНАЛИТИЧНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ. I

Проблема аналитической зависимости решений регулярно возмущенных задач от параметра возникла достаточно давно и в настоящее время хорошо изучена (см., например, [1—4]). В указанном случае от данных задачи требуется только определенная гладкость, и решение соответствующим образом наследует эту гладкость. Для сингулярно возмущенных задач (т. е. задач с возмущениями главных частей оператора) проблема исследования гладкости решений находит свое решение в связи с развитием метода регуляризации Ломова (см. [5]), который позволяет для таких задач строить не только асимптотические (как с помощью других методов), но и точные решения в виде рядов Тейлора по малому параметру. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и для операторных уравнений в банаховых пространствах такие вопросы изучены в [5—9], где показано, что вследствие наличия особой точки по параметру в сингулярно возмущенных задачах гладкость данных задачи не гарантирует гладкости ее решения. Кроме гладкости от данных задачи требуется принадлежность их к специальным образом построенным функциональным пространствам.

В настоящей работе указываются необходимые и достаточные условия на правую часть и коэффициенты дифференциального уравнения

$$\varepsilon T(-iD)u+a(x_1, x_2)u=h(x_1, x_2, \varepsilon), \qquad (1)$$

$$T(-iD)=\sum_{|\alpha|\leqslant 2} a_\alpha(-iD)^\alpha,$$

при которых оно имеет единственное аналитическое по ε, периодическое по x_1, x_2 решение $u=u(x_1, x_2, \varepsilon)$. Здесь $\varepsilon=0$— особая точка, $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)$— целочисленный мультииндекс, a_α — действительные числа,

$$(-iD)^\alpha=(-iD_1)^{\alpha_1}(-iD_2)^{\alpha_2},\ D_k=\frac{\partial}{\partial x_k},\ |\alpha|=\alpha_1+\alpha_2.$$

Отметим, что, хотя рассматриваемые нами области определения предельного и возмущенного операторов в (1) одинаковы (что характерно для регулярных возмущений), в полученных ниже для уравнения (1) результатах на его данные накладываются требования такого же типа, как и в сингулярно возмущенных задачах. Устанавливается, например, в простейшем случае, что уравнение

$$\varepsilon\frac{d^2u}{dx_1^2}+au=h_0(x_1),\ a=\mathrm{const}\neq 0, \qquad (2)$$

имеет единственное аналитическое по ε в некоторой окрестности точки $\varepsilon=0$, периодическое по x_1 (с периодом 2π) решение $u=u(x_1, \varepsilon)$ тогда и только тогда, когда его правая часть $h_0(x_1)$ является тригонометрическим многочленом. Основные результаты работы анонсированы в [10].

Определим класс функций, в котором мы будем искать решения уравнения (1).

Определение. Будем говорить, что функция $u=u(x_1, x_2, \varepsilon)$ принадлежит классу $AC^2_{\tau_1,\tau_2}$, если функции $D^\alpha u(x_1, x_2, \varepsilon)$, $|\alpha|\leqslant 2$, аналитичны по ε в некотором круге $|\varepsilon|<\varepsilon^*$, периодичны по x_1, x_2 с периодами

τ_1, τ_2 (не зависящими от ε) соответственно и непрерывны по совокупности переменных x_1, x_2, ε в области $S_{\varepsilon^*}=\{(x_1, x_2, \varepsilon)\mid (x_1, x_2)\in\Pi=[0, \tau_1]\times\times[0, \tau_2], |\varepsilon|<\varepsilon^*, \varepsilon\in\mathbf{C}\}$.

Будем исследовать уравнение (1) в предположении, что функция $a(x_1, x_2)$ удовлетворяет условию

1° $a(x_1, x_2)\in C^\infty_{\tau_1,\tau_2}(R^2; R)$, $a(x_1, x_2)\neq 0$ $\forall (x_1, x_2)$.

Введем в рассмотрение оператор $F\equiv a^{-1}(x_1, x_2)T(-iD)$ с областью определения

$$G=\{u(x_1, x_2)\mid u\in C^2_{\tau_1,\tau_2}(R^2; \mathbf{C})\}. \qquad (3)$$

Для каждого $\nu>0$ рассмотрим множество функций

$$Y^\nu_{Fp}=\{g(x_1, x_2)\in C^\infty_{\tau_1,\tau_2}(R^2; \mathbf{C})\mid \exists M=M(g, \nu): \|F^k g\|_C\leqslant M\nu^k,\ k=0, 1, \dots\},$$

где $\|\varphi\|_C=\max\limits_{x_1,x_2}|\varphi(x_1, x_2)|$ $\forall \varphi(x_1, x_2)\in C(\Pi; \mathbf{C})$.

Отметим, что если оператор F замкнут, то при любом $\nu>0$ пространство Y^ν_{Fp} с нормой $\|g\|_Y=\sup\limits_k(\nu^{-k}\|F^k g\|_C)$ является банаховым (см. [11]).

Любую функцию $g(x_1, x_2)$, принадлежащую множеству Y^ν_{Fp}, будем называть периодической функцией экспоненциального типа, не превосходящего ν. В работах [7, 11] строились пространства векторных функций экспоненциального типа со степенными операторными базисами (см. также [12]). Для наших же целей потребовались пространства периодических функций экспоненциального типа, базисы в которых должны состоять, естественно, из периодических функций.

Структуру пространств Y^ν_{Fp} опишем с помощью собственных значений λ и собственных подпространств $Z(F-\lambda I)$ оператора F

$$(F-\lambda I)v\equiv\left(\frac{1}{a}T(-iD)-\lambda I\right)v=0,\ v(x_1, x_2)\in C^\infty_{\tau_1,\tau_2}(R^2; \mathbf{C}). \qquad (4)$$

Пусть $L^2_{|a|}(\Pi)$ — пространство измеримых по Лебегу комплекснозначных функций $g(x_1, x_2)$, удовлетворяющих соотношению

$$\int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_0^{\tau_2}|g(x_1, x_2)|^2|a(x_1, x_2)|dx_1dx_2<\infty,$$

со скалярным произведением

$$(g_1, g_2)=\int\limits_0^{\tau_1}\int\limits_0^{\tau_2}g_1(x_1, x_2)\bar{g}_2(x_1, x_2)|a(x_1, x_2)|dx_1dx_2$$

$$\forall g_1, g_2\in L^2_{|a|}(\Pi). \qquad (5)$$

Так как оператор $F=a^{-1}(x_1, x_2)T(-iD)$ с областью определения (3) является симметрическим в пространстве $L^2_{|a|}(\Pi)$, то все его собственные значения — действительные числа, а собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны относительно скалярного произведения (5).

Предположим, что для собственных значений и собственных функций задачи (4) выполняются следующие условия:

2° задача (4) имеет счетное множество различных собственных значений $|\lambda_0|\leqslant|\lambda_1|\leqslant\dots\leqslant|\lambda_l|\leqslant\dots$ с предельной точкой только в бесконечности;

3° собственные пространства $Z_l \equiv Z(F-\lambda_l I)$ удовлетворяют одному из следующих условий:

а) каждое собственное подпространство Z_l, $l=0, 1, \ldots$, конечномерно;

б) одно из собственных подпространств Z_l бесконечномерно;

в) более чем одно из собственных подпространств Z_l бесконечномерно.

Можно считать, что базис $v_{lj}(x_1, x_2)$, $j=\overline{1, s_l}$ (s_l — натуральное число или $+\infty$) каждого из подпространств Z_l ортогонален относительно скалярного произведения (5) (в противном случае следует воспользоваться процессом ортогонализации);

4°а) при выполнении условия 3°а) система собственных функций задачи (4)

$$\{v_{lj}(x_1, x_2),\ j=\overline{1, s_l},\ l=0, 1, \ldots\} \tag{6}$$

образует ортогональный базис в пространстве $L^2_{|a|}(\Pi)$;

б) при выполнении условия 3°б) система (6) образует ортогональный базис в $L^2_{|a|}(\Pi)$, причем ряд Фурье по системе (6) любой функции $f(x_1, x_2) \in C^{\infty}_{\tau_1,\tau_2}(R^2; \mathbf{C})$ сходится по норме пространства $C^2_{\tau_1,\tau_2}(R^2; \mathbf{C})$;

в) при выполнении условия 3°в) система (6) также образует ортогональный базис в $L^2_{|a|}(\Pi)$, причем ряд Фурье по системе (6) любой функции $f(x_1, x_2) \in C^{\infty}_{\tau_1,\tau_2}(R^2; \mathbf{C})$ обладает следующим свойством: если

$$f(x_1, x_2) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{s_l} f_{lj} v_{lj}(x_1, x_2),$$

то любой ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{s_l} |f_{lj} D^{\alpha} v_{lj}(x_1, x_2)|,\ \alpha=(\alpha_1, \alpha_2),\ \alpha_1, \alpha_2=0, 1, \ldots,$$

сходится равномерно в прямоугольнике Π.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть функция $a(x_1, x_2)$ и оператор F удовлетворяют условиям 1°—4°. Тогда для того, чтобы функция $g(x_1, x_2)$ принадлежала пространству Y^{ν}_{Fp} (при некотором $\nu > 0$), необходимо и достаточно, чтобы $g(x_1, x_2)$ представлялась в виде суммы собственных функций задачи (4), принадлежащих конечному числу собственных подпространств оператора F, т. е. чтобы выполнялось равенство*

$$g(x_1, x_2) = \sum_{l=0}^{l_0} v_l(x_1, x_2) \equiv \sum_{l=0}^{l_0} \sum_{j=1}^{s_l} g_{lj} v_{lj}(x_1, x_2). \tag{7}$$

Здесь $v_l(x_1, x_2)$ — собственная функция задачи (4), соответствующая собственному значению λ_l, l_0 — наибольшее из натуральных чисел l, для которых выполняется неравенство $|\lambda_l| \leqslant \nu$, g_{lj} — произвольные комплексные числа, s_l — натуральное число или $+\infty$.

Доказательство. Достаточность. Пусть функция $g(x_1, x_2)$ представляется в виде (7) и пусть $k \geqslant 0$ — произвольное целое число. Тогда

$$F^k g(x_1, x_2) = \sum_{l=0}^{l_0} F^k v_l(x_1, x_2) = \sum_{l=0}^{l_0} \lambda_l^k v_l(x_1, x_2).$$

Следовательно, полагая $\nu = \max_{0 \leqslant l \leqslant l_0} |\lambda_l|$, $M = \sum_{l=0}^{l_0} \|v_l\|_C$, получаем $\|F^k g\|_C \leqslant$ $\leqslant \nu^k \sum_{l=0}^{l_0} \|v_l\|_C = M\nu^k$, поэтому $g(x_1, x_2) \in Y^{\nu}_{Fp}$.

Необходимость. Пусть $g(x_1, x_2) \in Y^{\nu}_{Fp}$ при некотором $\nu > 0$. Так как при этом $g(x_1, x_2) \in L^2_{|a|}(\Pi)$, то, согласно условию 4°, функция $g(x_1, x_2)$ представляется рядом по ортогональной системе собственных функций (6)

$$g(x_1, x_2)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{s_l} g_{lj}v_{lj}(x_1, x_2). \tag{8}$$

Коэффициенты g_{lj} ряда (8) являются коэффициентами Фурье функции $g(x_1, x_2)$ по системе (6)

$$g_{lj}=\frac{(g, v_{lj})}{(v_{lj}, v_{lj})}, \quad j=\overline{1, s_l}, \quad l=0, 1, \ldots$$

Пусть $\lambda_l \neq 0$. Поскольку при любом целом $k \geqslant 0$ справедливо соотношение $F^k v_{lj}(x_1, x_2)=\lambda_l^k v_{lj}(x_1, x_2)$, то $g_{lj}=(g, \lambda_l v_{lj})/\lambda_l^k(v_{lj}, v_{lj})=(g, F^k v_{lj})/\lambda_l^k(v_{lj}, v_{lj})$.

Используя симметричность оператора F, получаем из последнего соотношения следующее равенство: $g_{lj}=(F^k g, v_{lj})/\lambda_l^k(v_{lj}, v_{lj})$. Применяя неравенство Коши — Буняковского и используя принадлежность функции $g(x_1, x_2)$ пространству Y_{Fp}^{ν}, приходим к таким неравенствам

$$|g_{lj}| \leqslant \frac{[(F^k g, F^k g)(v_{lj}, v_{lj})]^{1/2}}{|\lambda_l^k|(v_{lj}, v_{lj})} \leqslant \left(\frac{\nu}{|\lambda_l|}\right)^k \frac{\left(M^2 \int_0^{\tau_1}\int_0^{\tau_2} |a(x_1, x_2)|\,dx_1 dx_2\right)^{1/2}}{\sqrt{(v_{lj}, v_{lj})}},$$

$$k=0, 1, \ldots$$

Последние неравенства показывают, что $g_{lj}=0$ при $|\lambda_l|>\nu$, поэтому из (8) следует, что

$$g(x_1, x_2)=\sum_{l=0}^{l_0}\sum_{j=1}^{s_l} g_{lj}v_{lj}(x_1, x_2), \tag{9}$$

где l_0 — наибольшее из натуральных чисел l, для которых выполняется неравенство $|\lambda_l| \leqslant \nu$.

Из соотношения (9) следует, что при выполнении условия 3°а) функция $g(x_1, x_2)$ представляется в требуемом виде

$$g(x_1, x_2)=\sum_{l=0}^{l_0} v_l(x_1, x_2), \tag{10}$$

где

$$v_l(x_1, x_2)=\sum_{j=1}^{s_l} g_{lj}v_{lj}(x_1, x_2) \tag{11}$$

— собственная функция задачи (4), соответствующая собственному значению λ_l, $l=\overline{0, l_0}$.

Пусть выполняется условие 3°б) и пусть λ_{l^*} — собственное значение задачи (4), для которого собственное подпространство $Z(F-\lambda_{l^*}I)$ бесконечномерно. Если $|\lambda_{l^*}|>\nu$, то формулы (10), (11) дают искомое представление функции $g(x_1, x_2)$; если же $|\lambda_{l^*}| \leqslant \nu$, то из (9) следует, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} g_{l^*j}v_{l^*j}(x_1, x_2)=g(x_1, x_2)-\sum_{l=0, l\neq l^*}^{l_0}\sum_{j=1}^{s_l} g_{lj}v_{lj} \equiv v_{l^*}(x_1, x_2). \tag{12}$$

Из (12) вытекает, что $v_{l^*}(x_1, x_2) \in C^{\infty}_{\tau_1,\tau_2}(R^2; \mathbf{C})$, поэтому (в силу условия 4°б)) разложение (12) функции $v_{l^*}(x_1, x_2)$ сходится по норме пространства $C^2_{\tau_1,\tau_2}(R^2; \mathbf{C})$. Из сказанного следует, что

$$D^{\alpha}v_{l^*}(x_1, x_2)=\sum_{j=1}^{\infty} g_{l^*j}D^{\alpha}v_{l^*j}(x_1, x_2), \quad |\alpha| \leqslant 2,$$

поэтому

$$Fv_{l^*}(x_1, x_2)=\sum_{j=1}^{\infty} g_{l^*j}Fv_{l^*j}(x_1, x_2)=\lambda_{l^*}\sum_{j=1}^{\infty} g_{l^*j}v_{l^*j}(x_1, x_2)=\lambda_l^* v_{l^*}(x_1, x_2).$$

Итак, функция $v_{l^*}(x_1, x_2)$ является собственной функцией задачи (4), соответствующей собственному значению λ_{l^*}, поэтому из (12) получаем, что функция $g(x_1, x_2)$ допускает требуемое представление вида (7).

Пусть, наконец, выполняется условие 3°в). Тогда каждая из функций, определяемая равенством (11), является либо многочленом (и тогда s_l — натуральное число), либо рядом (и тогда $s_l = +\infty$) по собственным функциям $v_{lj}(x_1, x_2)$, отвечающим собственному значению λ_l. Так как $g(x_1, x_2) \in C^{\infty}_{\tau_1\tau_2}(R^2; \mathbf{C})$, то из условия 4°в) следует, что каждый из рядов (11), а также ряды

$$\sum_{j=1}^{s_l} g_{lj} D^{\alpha} v_{lj}(x_1, x_2), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \ldots,$$

сходятся равномерно в прямоугольнике П. Следовательно, $v_l(x_1, x_2) \in \in C^{\infty}_{\tau_1,\tau_2}(R^2; \mathbf{C})$ и, кроме того,

$$Fv_l(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{s_l} g_{lj} F v_{lj}(x_1, x_2) = \lambda_l \sum_{j=1}^{s_l} g_{lj} v_{lj}(x_1, x_2) = \lambda_l v_l(x_1, x_2).$$

Таким образом, функция $v_l(x_1, x_2)$ принадлежит собственному подпространству $Z(F - \lambda_l I)$ и поэтому из (10), (11) следует, что формула (7) справедлива. Теорема 1 доказана.

Отметим, что для оператора $F = d/dx_1$ структура пространств Y^{ν}_{Fp} изучена в [11, 13]; в этом случае пространства Y^{ν}_{Fp} состоят из тригонометрических многочленов

$$g(x_1) = \sum_{k=-k_1}^{k_1} g_k \exp\left(2\pi i \frac{kx_1}{\tau_1}\right).$$

Докажем теперь результаты, касающиеся существования и единственности аналитических по ε периодических решений уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть функция $a(x_1, x_2)$ и оператор F удовлетворяют условиям* 1°—4° *и пусть $h_0(x_1, x_2) \in C^{\infty}_{\tau_1,\tau_2}(R^2; \mathbf{C})$. Тогда для того, чтобы уравнение*

$$\varepsilon T(-iD)u + a(x_1, x_2)u = h_0(x_1, x_2) \tag{13}$$

имело решение $u = u(x_1, x_2, \varepsilon)$, принадлежащее классу $AC^2_{\tau_1,\tau_2}$, необходимо и достаточно, чтобы функция $h_0(x_1, x_2)/a(x_1, x_2)$ принадлежала пространству Y^{ν}_{Fp} (при некотором $\nu > 0$), т. е. чтобы она представлялась в виде суммы собственных функций задачи (4), принадлежащих конечному числу собственных подпространств оператора F:

$$\frac{h_0(x_1, x_2)}{a(x_1, x_2)} = \sum_{l=0}^{l_0} v_l(x_1, x_2) \equiv \sum_{l=0}^{l_0} \sum_{j=1}^{s_l} g_{lj} v_{lj}(x_1, x_2). \tag{14}$$

Указанное решение определяется однозначно и представляется следующей формулой:

$$u(x_1, x_2, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k F^k (h_0(x_1, x_2)/a(x_1, x_2)) =$$

$$= \sum_{l=0}^{l_0} \frac{v_l(x_1, x_2)}{1 + \lambda_l \varepsilon} \equiv \sum_{l=0}^{l_0} \frac{1}{1 + \lambda_l \varepsilon} \sum_{j=1}^{s_l} g_{lj} v_{lj}(x_1, x_2), \tag{15}$$

$$|\varepsilon| < \varepsilon^* = |\lambda_{l_0}|^{-1}.$$

Доказательство. Достаточность. Будем искать решение уравнения (13) в виде ряда по степеням ε

$$u(x_1, x_2, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x_1, x_2). \tag{16}$$

Подставляя ряд (16) в уравнение (13) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$u_0(x_1, x_2) = h_0(x_1, x_2)/a(x_1, x_2),$$
$$u_k(x_1, x_2) = (-1)^k F^k [h_0(x_1, x_2)/a(x_1, x_2)], \quad k = 1, 2, \ldots \tag{17}$$

Отсюда следует, что если ряд (16) является решением уравнения (13), то это решение представляется в виде

$$u(x_1, x_2, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k F^k [h_0(x_1, x_2)/a(x_1, x_2)]. \tag{18}$$

Покажем теперь, что если частное $h_0(x_1, x_2)/a(x_1, x_2)$ принадлежит пространству Y^{ν}_{Fp} при некотором $\nu > 0$, то функция (18) действительно является решением уравнения (13), принадлежащим классу $AC^2_{\tau_1, \tau_2}$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k D^{\alpha} F^k [h_0(x_1, x_2)/a(x_1, x_2)], \quad [\alpha] \leqslant 2. \tag{19}$$

Так как функция $h_0(x_1, x_2)/a(x_1, x_2)$ представляется в виде (14), причем $\max\limits_{0 \leqslant l \leqslant l_0} |\lambda_l| \leqslant \nu$, то при любом $k \geqslant 0$

$$\left\| D^{\alpha} F^k \frac{h_0(x_1, x_2)}{a(x_1, x_2)} \right\|_C = \left\| \sum_{l=0}^{l_0} \lambda_l^k D^{\alpha} v_l(x_1, x_2) \right\|_C \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{l=0}^{l_0} |\lambda_l|^k \| D^{\alpha} v_l \|_C \leqslant \nu^k \sum_{l=0}^{l_0} \| v_l \|_{C^2} \equiv M \nu^k, \tag{20}$$

где $\| v_l \|_{C^2}$ — норма собственной функции $v_l(x_1, x_2)$ в пространстве $C^2_{\tau_1, \tau_2}(R^2; \mathbf{C})$.

Пусть ε_0 — произвольная точка интервала $(0, \nu^-)$. Тогда из (20) следует, что сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (M \nu^k \varepsilon_0^k)$ является мажорирующим для функциональных рядов (19) в области S_{ε_0}, поэтому ряды (19) сходятся равномерно в области S_{ε_0}. Следовательно, ряд (18) можно почленно дифференцировать по x_1, x_2, причем

$$D^{\alpha} u(x_1, x_2, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k D^{\alpha} F^k (h_0/a) \varepsilon^k$$
$$\forall (x_1, x_2, \varepsilon) \in S_{\varepsilon_0}, \quad |\alpha| \leqslant 2. \tag{21}$$

При этом сумма ряда (21) является непрерывной в области S_{ε_0} $\forall \varepsilon_0 \in (0, \nu^{-1})$ и, значит, непрерывной в области S_{ε^*} при $\varepsilon^* = \nu^{-1}$; поэтому функция (18) принадлежит классу $AC^2_{\tau_1, \tau_2}$.

Из (21) вытекает, что ряд (18) допускает почленное применение оператора F:

$$F u(x_1, x_2, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k F^{k+1} (h_0/a) \varepsilon^k. \tag{22}$$

Подставляя (18), (22) в уравнение (13), получаем, что функция (18) обращает его в тождество. Таким образом, функция $u(x_1, x_2, \varepsilon)$, определяемая равенством (18), является искомым решением уравнения (13), причем это решение определяется однозначно. Запишем его в другой форме. Используя (18) и (14), получаем

$$u(x_1, x_2, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k \sum_{l=0}^{l_0} \lambda_l^k v_l(x_1, x_2) =$$

$$= \sum_{l=0}^{l_0} v_l(x_1, x_2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k \lambda_l^k = \sum_{l=0}^{l_0} \frac{v_l(x_1, x_2)}{1+\varepsilon\lambda_l},$$

откуда и следует формула (15).

Необходимость. Пусть уравнение (13) имеет решение $u = u(x_1, x_2, \varepsilon)$, принадлежащее классу $AC^2_{\tau_1,\tau_2}$. Тогда при $|\varepsilon| < \varepsilon^*$ функция $u(x_1, x_2, \varepsilon)$ представляется рядом (16), а функции $D^\alpha u$, $0 < |\alpha| \leqslant 2$,— рядами

$$D^\alpha u(x_1, x_2, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} v_{\alpha k}(x_1, x_2) \varepsilon^k. \tag{23}$$

Используя формулы для коэффициентов ряда Тейлора аналитической функции, получаем при любых $k = 0, 1, \dots$, $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon^*)$, $(x_1, x_2) \in \Pi$:

$$u_k(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta| = \varepsilon_0} u(x_1, x_2, \zeta) \zeta^{-k-1} d\zeta, \tag{24}$$

$$v_{\alpha k}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta| = \varepsilon_0} D^\alpha u(x_1, x_2, \zeta) \zeta^{-k-1} d\zeta.$$

Так как $u(x_1, x_2, \varepsilon) \in AC^2_{\tau_1,\tau_2}$, то суммы рядов (16), (23) непрерывны по x_1, x_2, ε в области S_{ε^*}. Следовательно, используя теорему о дифференцировании интеграла по параметру, получаем

$$D^\alpha \Big(\oint_{|\zeta| = \varepsilon_0} u(x_1, x_2, \zeta) \zeta^{-k-1} d\zeta \Big) = \oint_{|\zeta| = \varepsilon_0} D^\alpha u(x_1, x_2, \zeta) \zeta^{-k-1} d\zeta. \tag{25}$$

Из (24), (25) вытекает, что $v_{\alpha k}(x_1, x_2) = D^\alpha u_k(x_1, x_2)$, следовательно, в силу (23)

$$D^\alpha u(x_1, x_2, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} D^\alpha u_k(x_1, x_2) \varepsilon^k, \quad |\varepsilon| < \varepsilon^*, \quad |\alpha| \leqslant 2.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$Fu(x_1, x_2, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} Fu_k(x_1, x_2) \varepsilon^k, \quad |\varepsilon| < \varepsilon^*,$$

которое позволяет сделать вывод, что коэффициенты ряда (16), являющегося решением уравнения (13), вычисляются по формулам (17).

Используя неравенства Коши для коэффициентов аналитической функции, получаем для коэффициентов ряда (16) следующие оценки:

$$|u_k(x_1, x_2)| \leqslant \varepsilon_0^{-k} \max_{|\varepsilon| = \varepsilon_0} |u(x_1, x_2, \varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon_0) \varepsilon_0^{-k}, \tag{26}$$

справедливые при любом $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon^*)$. Здесь

$$M(\varepsilon_0) = \max_{(x,y) \in \Pi} \max_{|\varepsilon| = \varepsilon_0} |u(x_1, x_2, \varepsilon)| < \infty.$$

Принимая во внимание соотношения (17), (26), приходим к следующим неравенствам:

$$\left\| F^k \frac{h_0(x_1, x_2)}{a(x_1, x_2)} \right\|_C \leqslant M(\varepsilon_0) \varepsilon_0^{-k}, \quad \forall \varepsilon_0 \in (0, \varepsilon^*), \quad k = 0, 1, \dots$$

Отсюда вытекает, что $h_0(x_1, x_2)/a(x_1, x_2) \in Y^\nu_{Fp}$ при $\nu = \varepsilon_0^{-1}$ $\forall \varepsilon_0 \in (0, \varepsilon^*)$. Теорема 2 доказана.

Если в уравнении (1) правая часть является многочленом по ε, то имеет место

Теорема 3. *Пусть функция $a(x_1, x_2)$ и оператор F удовлетворяют условиям $1°$—$4°$, m — некоторое натуральное число, и пусть $h(x_1, x_2, \varepsilon) =$*

$= \sum_{p=0}^{m} h_p(x_1, x_2)\varepsilon^p$, *причем* $h_p(x_1, x_2) \in C^{\infty}_{\tau_1,\tau_2}(R^2; \mathbf{C})$, $p=\overline{0, m}$. *Тогда для того, чтобы уравнение (1) имело решение* $u=u(x_1, x_2, \dot{\varepsilon}) \in AC^2_{\tau_1,\tau_2}$, *необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$w_m(x_1, x_2) = \sum_{j=0}^{m} (-F)^j \left(\frac{h_{m-j}(x_1, x_2)}{a(x_1, x_2)}\right) \tag{27}$$

принадлежала пространству Y^{ν}_{Fp} *(при некотором* $\nu > 0$*), т. е. чтобы она представлялась в виде суммы собственных функций задачи (4), принадлежащих* **конечному** *числу собственных подпространств оператори* F:

$$w_m(x_1, x_2) = \sum_{l=0}^{l_m} v_l(x_1, x_2) \equiv \sum_{l=0}^{l_m}\sum_{j=1}^{s_l} g^m_{lj} v_{lj}(x_1, x_2). \tag{28}$$

Указанное решение определяется однозначно и представляется в следующем виде:

$$u(x_1, x_2, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m-1}\left\{\sum_{j=0}^{k} (-F)^j \frac{h_{k-j}(x_1, x_2)}{a(x_1, x_2)}\right\}\varepsilon^k + \sum_{k=m}^{\infty} (-F)^{k-m} w_m(x_1, x_2)\varepsilon^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}\left\{\sum_{j=0}^{k} (-F)^j \frac{h_{k-j}}{a}\right\}\varepsilon^k + \varepsilon^m \sum_{l=0}^{l_m} \frac{v_l(x_1, x_2)}{1+\varepsilon\lambda_l},$$

$$|\varepsilon| < \varepsilon^* = (\max_{0 \leqslant l \leqslant l_m} |\lambda_l|)^{-1}. \tag{29}$$

Доказательство. Достаточность. Будем искать решение уравнения (1) в виде ряда (16). Подставляя ряд (16) в уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$u_k(x_1, x_2) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{k} (-F)^j (h_{k-j}(x_1, x_2)/a(x_1, x_2)), & \text{если } k=\overline{0, m}, \\ (-F)^{k-m} u_m \equiv (-F)^{k-m} w_m, & \text{если } k=m+1, \dots \end{cases}$$

Отсюда следует, что если ряд (16) является решением уравнения (1), то это решение представляется в виде следующей суммы:

$$u(x_1, x_2, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m-1}\left\{\sum_{j=0}^{k} (-F)^j \frac{h_{k-j}}{a}\right\}\varepsilon^k + \sum_{k=m}^{\infty} (-F)^{k-m} w_m \varepsilon^k. \tag{30}$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 2, устанавливается, что если функция $w_m(x_1, x_2)$, определяемая равенством (28), принадлежит пространству Y^{ν}_{Fp} (при некотором $\nu > 0$), то функция (30) является решением уравнения (1), принадлежащим классу $AC^2_{\tau_1,\tau_2}$. Из (28), (30) следует, что искомое решение представляется в виде (29).

Доказательство необходимости проводится так же, как и при доказательстве теоремы 2.

В более общей ситуации, когда правой частью уравнения (1) является не многочлен, а аналитическая по ε функция, нами получены достаточные условия существования решения класса $AC^2_{\tau_1,\tau_2}$, которые содержатся в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть функция* $a(x_1, x_2)$ *и оператор* F *удовлетворяют условиям* 1°—4° *и пусть для функций* $h_k \in C^{\infty}_{\tau_1,\tau_2}(R^2; \mathbf{C})$, $k=0, 1, \dots$, *выполняются следующие условия:*

а) *существует натуральное число* m *такое, что функция* $w_m(x_1, x_2)$, *определяемая формулой (27), принадлежит пространству* Y^{ν}_{Fp} *(при некотором* $\nu > 0$*), т. е. допускает представление вида (28);*

б) *функции* $h_k(x_1, x_2)/a(x_1, x_2)$, $k=m+1, m+2, \dots$, *также принадлежат пространству* Y^{ν}_{Fp}, *т. е. представляются в виде*

$$h_k(x_1, x_2)/a(x_1, x_2) = \sum_{l=0}^{l_{1k}} v_l^k(x_1, x_2), \tag{31}$$

причем

$$\sum_{l=0}^{l_{1k}} \|v_l^k\|_{C^2} \leqslant AB^k, \quad k=\overline{m+1, m+2, \ldots} \tag{32}$$

(здесь A, B — некоторые положительные постоянные, не зависящие от k, $v_l^k(x_1, x_2)$ — собственные функции задачи (4), соответствующие собственному значению λ_l, $l=\overline{0, l_{1k}}$, $k=m+1, m+2, \ldots$).

Тогда если

$$h(x_1, x_2, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x_1, x_2)\varepsilon^k, \quad |\varepsilon| < B^{-1}$$

(и, следовательно, $h(x_1, x_2, \varepsilon)$ аналитична по ε), то уравнение (1) имеет решение $u=u(x_1, x_2, \varepsilon)$, принадлежащее классу $AC^2_{\tau_1,\tau_2}$. Указанное решение определяется однозначно и представляется в следующем виде:

$$u(x_1, x_2, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m-1}\left\{\sum_{j=0}^{k}(-F)^j \frac{h_{k-j}}{a}\right\}\varepsilon^k +$$

$$+\sum_{k=m}^{\infty}(-F)^{k-m}w_m\varepsilon^k + \sum_{k=m+1}^{\infty}\left\{\sum_{\mu=0}^{k-m-1}(-F)^{\mu}\frac{h_{k-\mu}}{a}\right\}\varepsilon^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}\left\{\sum_{j=0}^{k}(-F)^j \frac{h_{k-j}}{a}\right\}\varepsilon^k + \varepsilon^m \sum_{l=0}^{l_m}\frac{v_l(x_1, x_2)}{1+\varepsilon\lambda_l} +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty}\left\{\sum_{\mu=0}^{k-m-1}\sum_{l=0}^{l_{1,k-\mu}}(-\lambda_l)^{\mu} v_l^{k-\mu}(x_1, x_2)\right\}\varepsilon^k,$$

$$|\varepsilon| < \varepsilon^* = \{\max(2B, \nu)\}^{-1}.$$

Доказательство. Будем искать решение уравнения (1) в виде ряда (16). Подставляя ряд (16) в уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$u_k(x_1, x_2) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{k}(-F)^j \dfrac{h_{k-j}(x_1, x_2)}{a(x_1, x_2)}, & \text{если } k=\overline{0, m}, \\ \sum_{\mu=0}^{k-m-1}(-F)^{\mu}\dfrac{h_{k-\mu}(x_1, x_2)}{a(x_1, x_2)} + (-F)^{k-m}w_m(x_1, x_2), \\ \text{если } k=m+1, m+2, \ldots \end{cases}$$

Отсюда следует, что если ряд (15) является решением уравнения (1), то это решение представляется в виде следующей суммы:

$$u(x_1, x_2, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m-1}\left\{\sum_{j=0}^{k}(-F)^j \frac{h_{k-j}}{a}\right\}\varepsilon^k +$$

$$+\sum_{k=m}^{\infty}(-F)^{k-m}w_m\varepsilon^k + \sum_{k=m+1}^{\infty}\left\{\sum_{\mu=0}^{k-m-1}(-F)^{\mu}\frac{h_{k-\mu}}{a}\right\}\varepsilon^k. \tag{33}$$

Покажем, что при выполнении условий теоремы 4 функция (33) действительно является решением уравнения (1), принадлежащим классу $AC^2_{\tau_1,\tau_2}$. Рассмотрим ряды

$$\sum_{k=m}^{\infty} D^{\alpha}(-F)^{k-m}w_m\varepsilon^k + \sum_{k=m+1}^{\infty}\left\{\sum_{\mu=0}^{k-m-1}D^{\alpha}(-F)^{\mu}\frac{h_{k-\mu}}{a}\right\}\varepsilon^k, \quad |\alpha| \leqslant 2. \tag{34}$$

Учитывая соотношения (27), (28), (31), (32) и тот факт, что функции (28), (31) принадлежат пространству Y_{Fp}^{ν}, получаем

$$\|D^{\alpha}F^{k-m}w_m\|_C=\|\sum_{l=0}^{l_m}\lambda_l^{k-m}D^{\alpha}v_l\|_C\leqslant\nu^{k-m}\sum_{l=0}^{l_m}\|v_l\|_{C^2}, \tag{35}$$

$$\left\|\sum_{\mu=0}^{k-m-1}D^{\alpha}(-F)^{\mu}\frac{h_{k-\mu}}{a}\right\|_C=\|\sum_{\mu=0}^{k-m-1}\sum_{l=0}^{l_{1,k-\mu}}(-\lambda_l)^{\mu}D^{\alpha}v_l^{k-\mu}\|_C\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\mu=0}^{k-m-1}\nu^{\mu}\sum_{l=0}^{l_{1,k-\mu}}\|v_l^{k-\mu}\|_{C^2}\leqslant A\sum_{\mu=0}^{k-m-1}\nu^{\mu}B^{k-\mu}\leqslant A_0B_0^k, \tag{36}$$

где $B_0=\max(2B,\nu)$, а A_0 — некоторая положительная постоянная, зависящая от ν, A, B, m. Полагая $M=\max\{A_0, \nu^{-m}\sum_{l=0}^{l_m}\|v_l\|_{C^2}\}$ и выбирая в качестве ε_0 произвольную точку интервала $(0, \varepsilon^*)$, $\varepsilon^*=B_0^{-1}$, получаем из (35), (36), что сходящийся числовой ряд $\sum_{k=m}^{\infty}(2MB_0^k\varepsilon_0^k)$ является мажорирующим для функциональных рядов (34) в области S_{ε_0}, поэтому ряды (34) сходятся равномерно в области S_{ε_0}. Далее доказательство завершается так же, как доказательство достаточности теоремы 2.

Отметим, что полученные нами теоремы о гладкости решений по сингулярно входящему параметру без труда переносятся на операторы произвольного порядка с соответствующими свойствами собственных значений и собственных функций.

Литература

1. Пуанкаре А. // Собр. соч. М., 1971. Т. 1.
2. Фридрихс К. О. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М., 1969.
3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М., 1982. Т. 4.
5. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
6. Ломов С. А. // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265, № 3. С. 529—534.
7. Качалов В. И., Ломов С. А. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299, № 4. С. 805—808.
8. Качалов В. И., Ломов С. А. // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 1. С. 22—24.
9. Ломов И. С. // Сб. научн. трудов МЭИ. № 149. М., 1987. С. 61—67.
10. Прохоренко В. И. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320, № 2. С. 280—283.
11. Радыно Я. В. // Докл. АН БССР. 1983. Т. 27, № 10. С. 875—878.
12. Дубинский Ю. А. // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. 1986. Т. 29. С. 109—150.
13. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М., 1947.

Московский энергетический институт

Поступила в редакцию 12 июля 1993 г.