



## СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ

© 2018 г. М. В. ШАМОЛИН

**Аннотация.** В работе показана интегрируемость классов динамических систем на касательных расслоениях к четырехмерным многообразиям (систем с четырьмя степенями свободы). При этом силовые поля обладают переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные. Работа продолжает аналогичные исследования, проведенные ранее, для систем на касательных расслоениях многообразий размерности 2 и 3.

**Ключевые слова:** многомерная динамическая система, неконсервативное поле сил, интегрируемость, трансцендентный первый интеграл.

**AMS Subject Classification:** 70G60

Во многих задачах динамики возникают системы с пространством положений, являющимся четырехмерным гладким многообразием. Их фазовыми пространствами естественным образом становятся касательные расслоения к данным многообразиям. Например, изучение пятимерного обобщенного сферического маятника в неконсервативном поле сил приводит к динамической системе на касательном расслоении к четырехмерной сфере, при этом метрика специального вида на ней индуцирована дополнительной группой симметрий (см. [11, 14, 15]). В данном случае динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают диссипацией переменного знака, и полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Выделим также класс задач о движении точки по гладкой четырехмерной поверхности, при этом метрика на ней индуцирована евклидовой метрикой объемлющего пространства. В ряде случаев в системах с силовым полем с диссипацией также удастся найти полный список первых интегралов, состоящий из трансцендентных функций. Необходимо отметить, что полученные результаты особенно важны в смысле присутствия в системе именно неконсервативного поля сил (ср. с [1–3, 6]).

В предлагаемой работе показана интегрируемость некоторых классов динамических систем на касательном расслоении к гладкому четырехмерному многообразию (об аналогичных исследованиях на касательных расслоениях к многообразиям размерностей 2 и 3 см. [12, 13, 19]). При этом силовые поля обладают так называемой переменной диссипацией и обобщают ранее рассмотренные.

**1. Уравнения геодезических при замене координат и их первые интегралы.** Как известно, в случае четырехмерного гладкого риманова многообразия  $M^4$  с координатами  $(\alpha, \beta)$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , и аффинной связностью  $\Gamma_{jk}^i(x)$  уравнения геодезических линий на касательном расслоении  $T_*M^4\{\dot{\alpha}, \dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  имеют следующий вид (дифференцирование берется по натуральному параметру):

$$\ddot{x}^i + \sum_{j,k=1}^4 \Gamma_{jk}^i(x) \dot{x}^j \dot{x}^k = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (1)$$

где  $\alpha = x^1$ ,  $\beta_1 = x^2$ ,  $\beta_2 = x^3$ ,  $\beta_3 = x^4$ ,  $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ .

Изучим структуру уравнений (1) при изменении координат на касательном расслоении  $T_*M^4$ . Рассмотрим замену координат касательного пространства, зависящую от точки  $x$  многообразия:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^4 R^{ij}(x)z_j, \quad (2)$$

которую почти всюду можно обратить:

$$z_j = \sum_{i=1}^4 T_{ji}(x)\dot{x}^i;$$

при этом  $R^{ij}$ ,  $T_{ji}$ ,  $i, j = 1, \dots, 4$ , — функции от  $x^1, x^2, x^3, x^4$ , а также  $RT = E$ , где  $R = (R^{ij})$ ,  $T = (T_{ji})$ . Назовем также уравнения (2) *новыми кинематическими соотношениями*, т.е. соотношениями на касательном расслоении  $T_*M^4$ .

Справедливы следующие тождества:

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^4 \dot{T}_{ji}\dot{x}^i + \sum_{i=1}^4 T_{ji}\ddot{x}^i, \quad \dot{T}_{ji} = \sum_{k=1}^4 T_{ji,k}\dot{x}^k, \quad (3)$$

где

$$T_{ji,k} = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x^k}, \quad i, j, k = 1, \dots, 4.$$

Подставляя в (3) уравнения (1), имеем

$$\dot{z}_i = \sum_{j,k=1}^4 T_{ij,k}\dot{x}^j\dot{x}^k - \sum_{j,p,q=1}^4 T_{ij}\Gamma_{pq}^j\dot{x}^p\dot{x}^q; \quad (4)$$

при этом в последней системе вместо  $\dot{x}^i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , надо подставить формулы (2).

Другими словами, равенство (4) можно переписать в виде

$$\dot{z}_i + \sum_{j,k=1}^4 Q_{ijk}\dot{x}^j\dot{x}^k|_{(2)} = 0, \quad (5)$$

где

$$Q_{ijk}(x) = \sum_{s=1}^4 T_{is}(x)\Gamma_{jk}^s(x) - T_{ij,k}(x). \quad (6)$$

**Предложение 1.** Система (1) в области, где  $\det R(x) \neq 0$ , эквивалентна составной системе (2), (4).

Таким образом, результат перехода от уравнений геодезических (1) к эквивалентной системе уравнений (2), (4) зависит как от замены переменных (2) касательного пространства (т.е. вводимых новых кинематических соотношений), так и от аффинной связности  $\Gamma_{jk}^i(x)$ .

**2. Достаточно общий случай.** Рассмотрим далее достаточно общий случай задания кинематических соотношений в следующем виде:

$$\dot{\alpha} = -z_4, \quad \dot{\beta}_1 = z_3 f_1(\alpha), \quad \dot{\beta}_2 = z_2 f_2(\alpha) g_1(\beta_1), \quad \dot{\beta}_3 = z_1 f_3(\alpha) g_2(\beta_1) h(\beta_2), \quad (7)$$

где  $f_k(\alpha)$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $g_l(\beta_1)$ ,  $l = 1, 2$ ,  $h(\beta_2)$  — гладкие функции на своей области определения. Такие координаты  $z_1, z_2, z_3, z_4$  в касательном пространстве вводятся тогда, когда рассматриваются

следующие классы уравнений геодезических (в частности, на сфере, более общих поверхностях вращения):

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 = 0, \end{cases} \quad (8)$$

(см. [3, 4, 7]); остальные коэффициенты связности равны нулю. В случае (7) уравнения (4) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \left[ 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_4 - \left[ 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_1 z_3 - \\ &\quad - \left[ 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_2, \\ \dot{z}_2 &= \left[ 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_4 - \left[ 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_2 z_3 - \\ &\quad - \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) z_1^2, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= \left[ 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_4 - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_2^2 - \\ &\quad - \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \end{aligned}$$

$$\dot{z}_4 = \Gamma_{11}^{\alpha} f_1^2(\alpha) z_3^2 + \Gamma_{22}^{\alpha} f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \Gamma_{33}^{\alpha} f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2,$$

и уравнения (8) почти всюду эквивалентны составной системе (7), (9) на касательном расслоении  $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ .

Для полного интегрирования системы (7), (9) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. В нашем случае их нужно будет меньше, что будет показано во второй половине статьи при изучении систем с диссипацией.

**Предложение 2.** *Если всюду на своей области определения справедлива система равенств*

$$\begin{cases} 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_{11}^{\alpha}(\alpha, \beta) f_1^2(\alpha) \equiv 0, \\ 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_{22}^{\alpha}(\alpha, \beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\ \left[ 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1^2(\alpha) + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\ 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_{33}^{\alpha}(\alpha, \beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \equiv 0, \\ \left[ 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1^2(\alpha) + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \equiv 0, \\ \left[ 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) \equiv 0, \end{cases} \quad (10)$$

то система (7), (9) имеет аналитический первый интеграл вида

$$\Phi_1(z_4, \dots, z_1) = z_1^2 + \dots + z_4^2 = C_1^2 = \text{const}. \quad (11)$$

На первый взгляд вопрос наличия первого интеграла достаточно простого вида (11) «не заслуживает» решения такой достаточно сложной системы квазилинейных уравнений (10) (которая содержит, вообще говоря, уравнения в частных производных, вырождающиеся в обыкновенные). В работе будет применен подход, позволяющий с помощью решения системы (10) успешно находить полные наборы первых интегралов систем с диссипацией.

Можно доказать отдельную теорему существования решения  $f_k(\alpha)$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $g_l(\beta_1)$ ,  $l = 1, 2$ ,  $h(\beta_2)$  системы (10) квазилинейных уравнений для наличия аналитического первого интеграла (11) для системы (7), (9) уравнений геодезических (8). Но в дальнейшем при изучении динамических систем с диссипацией полная группа условий (10) нам не потребуется. Тем не менее, в дальнейшем будем предполагать в уравнениях (7) выполнение условий

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = f_3(\alpha) = f(\alpha); \quad (12)$$

при этом функции  $g_l(\beta_1)$ ,  $l = 1, 2$ ,  $h(\beta_2)$  должны удовлетворять преобразованным уравнениям из (10):

$$\begin{cases} 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)g_1^2(\beta_1) \equiv 0, \\ 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)g_2^2(\beta_1)h^2(\beta_2) \equiv 0, \\ 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)h^2(\beta_2) \equiv 0. \end{cases} \quad (13)$$

Таким образом, функции  $g_l(\beta_1)$ ,  $l = 1, 2$ ,  $h(\beta_2)$  зависят от коэффициентов связности в силу системы (13), а ограничения на функцию  $f(\alpha)$  будут приведены ниже.

**Предложение 3.** Если выполнены свойства (12), (13) и при этом справедливы равенства

$$\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) = \Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_1(\alpha), \quad (14)$$

то система (7), (9) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned} \Phi_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \Phi_0(\alpha) = C_2 = \text{const}, \\ \Phi_0(\alpha) &= f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

**Предложение 4.** Если выполнены условия предложения 3, условие

$$g_1(\beta_1) = g_2(\beta_1) = g(\beta_1) \quad (16)$$

и при этом справедливы равенства

$$\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) = \Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_2(\beta_1), \quad (17)$$

то система (7), (9) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\begin{aligned} \Phi_3(z_2, z_1; \alpha, \beta_1) &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) = C_3 = \text{const}, \\ \Psi_1(\beta_1) &= g(\beta_1) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{10}}^{\beta_1} \Gamma_2(b) db \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

**Предложение 5.** Если выполнены условия предложений 3, 4 и при этом справедливо равенство

$$\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) = \Gamma_3(\beta_2), \quad (19)$$

то система (7), (9) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_4(z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2) = z_1 \Phi_0(\alpha) \Psi_1(\beta_1) \Psi_2(\beta_2) = C_4 = \text{const},$$

$$\Psi_2(\beta_2) = h(\beta_2) \exp \left\{ 2 \int_{\beta_{20}}^{\beta_2} \Gamma_3(b) db \right\}. \quad (20)$$

**Предложение 6.** Если выполнены условия предложений 3, 4, 5, то система (7), (9) имеет первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_5(z_2, z_1; \alpha, \beta) = \beta_3 \pm \int_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Phi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \text{const}, \quad (21)$$

где после взятия интеграла (21) вместо постоянных  $C_3$  и  $C_4$  нужно подставить левые части равенств (18) и (20) соответственно.

Набор первых интегралов (11), (15), (18), (20), (21) является полным набором независимых первых интегралов системы (7), (9) при вышперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (21) не так прост. В принципе, он может выражаться через конечную комбинацию элементарных функций и даже являться функцией рациональной. Но поскольку в рассматриваемой динамической системе отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (21) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа. Действительно, у нее отсутствуют существенно особые точки. Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также [5, 10]).

**3. Уравнения движения в потенциальном силовом поле и их первые интегралы.** Теперь, несколько модифицировав систему (7), (9) при условиях (12)–(14), (16), (17), (19), получим систему консервативную. А именно, наличие силового поля характеризует достаточно гладкий коэффициент  $F(\alpha)$  во втором уравнении системы (22). Рассматриваемая система на касательном расслоении  $T_*M^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  примет вид

$$\dot{\alpha} = -z_4, \quad (22a)$$

$$\dot{z}_4 = F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha f_1^2(\alpha) z_3^2 + \Gamma_{22}^\alpha f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \quad (22b)$$

$$\dot{z}_3 = \left[ 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_4 - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_2^2 -$$

$$- \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \quad (22c)$$

$$\dot{z}_2 = \left[ 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_4 - \left[ 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_2 z_3 -$$

$$- \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \frac{f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1)}{f_2(\alpha) g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) z_1^2, \quad (22d)$$

$$\dot{z}_1 = \left[ 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_4 - \left[ 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_1 z_3 -$$

$$- \left[ 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_2, \quad (22e)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_3 f(\alpha), \quad (22f)$$

$$\dot{\beta}_2 = z_2 f(\alpha) g(\beta_1), \quad (22g)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \quad (22h)$$

и она почти всюду эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} + F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 + 2\Gamma_1(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_2(\beta_1) \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_3 + 2\Gamma_3(\beta_2) \dot{\beta}_2 \dot{\beta}_3 = 0. \end{cases}$$

**Предложение 7.** Если выполнены условия предложения 2, то система (22) имеет гладкий первый интеграл следующего вида:

$$\Phi_1(z_4, \dots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \dots + z_4^2 + F_1(\alpha) = C_1 = \text{const}, \quad F_1(\alpha) = 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a) da. \quad (23)$$

**Предложение 8.** Если выполнены условия предложений 3, 4, 5, то система (22) имеет три гладких первых интеграла вида (15), (18), (20).

**Предложение 9.** Если выполнены условия предложения 6, то система (22) имеет первый интеграл вида (21).

Набор первых интегралов (23), (15), (18), (20), (21) является полным набором независимых первых интегралов системы (22) при вышеперечисленных условиях (то, что полный набор состоит из пяти, а не из семи, первых интегралов, будет показано ниже).

Вопрос о гладкости первого интеграла (21) по-прежнему не так прост. Поскольку в рассматриваемой динамической системе даже при наличии гладкого консервативного силового поля отсутствуют асимптотические предельные множества, то функция (21) не может быть трансцендентной с точки зрения комплексного анализа (у нее отсутствуют существенно особые точки). Но с точки зрения теории элементарных функций она может быть трансцендентной (см. также [10]).

**4. Уравнения движения в силовом поле с диссипацией и их первые интегралы.** Теперь, усложнив систему (22), получим систему с диссипацией. А именно, наличие диссипации (вообще говоря, знакопеременной) характеризует достаточно гладкий коэффициент  $b\delta(\alpha)$  в первом уравнении следующей системы:

$$\dot{\alpha} = -z_4 + b\delta(\alpha), \quad (24a)$$

$$\dot{z}_4 = F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha f_1^2(\alpha) z_3^2 + \Gamma_{22}^\alpha f_2^2(\alpha) g_1^2(\beta_1) z_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha f_3^2(\alpha) g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \quad (24b)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 = & \left[ 2\Gamma_{\alpha 1}^1(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_1(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_3 z_4 - \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta) \frac{f_2^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_1^2(\beta_1) z_2^2 - \\ & - \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta) \frac{f_3^2(\alpha)}{f_1(\alpha)} g_2^2(\beta_1) h^2(\beta_2) z_1^2, \end{aligned} \quad (24c)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & \left[ 2\Gamma_{\alpha 2}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_2(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_2 z_4 - \left[ 2\Gamma_{12}^2(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_1(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_2 z_3 - \\ & - \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta) \frac{f_3^2(\alpha)}{f_2(\alpha)} \frac{g_2^2(\beta_1)}{g_1(\beta_1)} h^2(\beta_2) z_1^2, \end{aligned} \quad (24d)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = & \left[ 2\Gamma_{\alpha 3}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |f_3(\alpha)|}{d\alpha} \right] z_1 z_4 - \left[ 2\Gamma_{13}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |g_2(\beta_1)|}{d\beta_1} \right] f_1(\alpha) z_1 z_3 - \\ & - \left[ 2\Gamma_{23}^3(\alpha, \beta) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right] f_2(\alpha) g_1(\beta_1) z_1 z_2, \end{aligned} \quad (24e)$$

$$\dot{\beta}_1 = z_3 f(\alpha), \quad (24f)$$

$$\dot{\beta}_2 = z_2 f(\alpha) g(\beta_1), \quad (24g)$$

$$\dot{\beta}_3 = z_1 f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2), \quad (24h)$$

которая почти всюду эквивалентна системе

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} - b\dot{\alpha}\delta'(\alpha) + F(\alpha) + \Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_1^2 + \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_1 - b\dot{\beta}_1\delta(\alpha)f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_1 + \Gamma_{22}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_2^2 + \Gamma_{33}^1(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_2 - b\dot{\beta}_2\delta(\alpha)f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_2 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2 + \Gamma_{33}^2(\alpha, \beta)\dot{\beta}_3^2 = 0, \\ \ddot{\beta}_3 - b\dot{\beta}_3\delta(\alpha)f(\alpha) + 2\Gamma_1(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_2(\beta_1)\dot{\beta}_1\dot{\beta}_3 + 2\Gamma_3(\beta_2)\dot{\beta}_2\dot{\beta}_3 = 0. \end{cases}$$

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (24) при условиях (12), (13), (16), а также при выполнении равенств

$$\Gamma_{11}^\alpha(\alpha, \beta) = \Gamma_{22}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1) = \Gamma_{33}^\alpha(\alpha, \beta)g^2(\beta_1)h^2(\beta_2) = \Gamma_4(\alpha). \quad (25)$$

Введем по аналогии с (13) ограничение на функцию  $f(\alpha)$ , состоящее в том, что она должна удовлетворять преобразованному первому равенству из (10):

$$2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha) \equiv 0. \quad (26)$$

Для полного интегрирования системы (24) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}},$$

система (24) распадается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -w_4 + b\delta(\alpha), \\ \dot{w}_4 = F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)w_3^2, \\ \dot{w}_3 = \left[ 2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d \ln |f(\alpha)|}{d\alpha} \right] w_3 w_4, \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_2 = \pm w_3 \sqrt{1 + w_2^2} f(\alpha) g(\beta_1) \left[ 2\Gamma_3(\beta_2) + \frac{d \ln |h(\beta_2)|}{d\beta_2} \right], \\ \dot{\beta}_2 = \pm \frac{w_2 w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}} f(\alpha) g(\beta_1), \end{cases} \quad (28)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = \pm w_3 \sqrt{1 + w_1^2} f(\alpha) \left[ 2\Gamma_2(\beta_1) + \frac{d \ln |g(\beta_1)|}{d\beta_1} \right], \\ \dot{\beta}_1 = \pm \frac{w_1 w_3}{\sqrt{1 + w_1^2}} f(\alpha), \end{cases} \quad (29)$$

$$\dot{\beta}_3 = \pm \frac{w_3}{\sqrt{1 + w_2^2}} f(\alpha) g(\beta_1) h(\beta_2). \quad (30)$$

Видно, что для полной интегрируемости системы (27)–(30) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (27), по одному — для систем (28) и (29) (меняя в них независимые переменные), и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (30) (т.е. всего пять).

**Теорема 1.** Пусть для некоторых  $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$  выполняются равенства

$$\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha) = \kappa \frac{d}{d\alpha} \ln |\delta(\alpha)|, \quad F(\alpha) = \lambda \frac{d}{d\alpha} \frac{\delta^2(\alpha)}{2}. \quad (31)$$

Тогда система (24) при выполнении условий (12), (13), (16), (25), (26) обладает полным набором (пятью) независимых, вообще говоря, трансцендентных первых интегралов.

Для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (27) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{cases} \frac{dw_4}{d\alpha} = \frac{F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)w_3^2}{-w_4 + b\delta(\alpha)}, \\ \frac{dw_3}{d\alpha} = \frac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]w_3w_4}{-w_3 + b\delta(\alpha)}. \end{cases} \quad (32)$$

Далее, вводя однородные переменные по формулам

$$w_4 = u_4\delta(\alpha), \quad w_3 = u_3\delta(\alpha), \quad (33)$$

приводим систему (32) к следующему виду:

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\frac{du_4}{d\alpha} + \delta'(\alpha)u_4 = \frac{F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\delta^2(\alpha)u_3^2}{-u_4\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \\ \delta(\alpha)\frac{du_3}{d\alpha} + \delta'(\alpha)u_3 = \frac{\left[2\Gamma_1(\alpha) + \frac{d\ln|f(\alpha)|}{d\alpha}\right]\delta^2(\alpha)u_3u_4}{-u_4\delta(\alpha) + b\delta(\alpha)}, \end{cases} \quad (34)$$

что почти всюду эквивалентно системе

$$\begin{cases} \delta(\alpha)\frac{du_4}{d\alpha} = \frac{F_3(\alpha) + \Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_3^2 + \delta'(\alpha)u_4^2 - b\delta'(\alpha)u_4}{-u_4 + b}, \\ \delta(\alpha)\frac{du_3}{d\alpha} = \frac{-\Gamma_4(\alpha)f^2(\alpha)\delta(\alpha)u_3u_4 + \delta'(\alpha)u_3u_4 - b\delta'(\alpha)u}{-u_4 + b}, \end{cases} \quad (35)$$

где  $F_3(\alpha) = F(\alpha)/\delta(\alpha)$ .

А после выполнения условий (31) система (35) приводится к уравнению первого порядка

$$\frac{du_4}{du_3} = \frac{\lambda + \kappa u_3^2 + u_4^2 - bu_4}{(1 - \kappa)u_3u_4 - bu_3}. \quad (36)$$

Уравнение (36) имеет вид уравнения Абеля (см. [5]). В частности, при  $\kappa = -1$  оно обладает первым интегралом

$$\frac{u_4^2 + u_3^2 - bu_4 + \lambda}{u_3} = C_1 = \text{const}, \quad (37)$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = G_1\left(\frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)}\right) = \frac{w_4^2 + w_3^2 - bw_4\delta(\alpha) + \lambda\delta^2(\alpha)}{w_3\delta(\alpha)} = C_1 = \text{const}. \quad (38)$$

Далее, найдем явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (27) при  $\kappa = -1$ . Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (37) при  $u_3 \neq 0$  следующим образом:

$$\left(u_4 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_3 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \lambda. \quad (39)$$

Ясно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\lambda \geq 0, \quad (40)$$

и фазовое пространство системы (23) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (39).

Таким образом, в силу соотношения (37) первое уравнение системы (35) при  $\kappa = -1$  примет вид

$$\frac{\delta(\alpha)}{\delta'(\alpha)} \frac{du_4}{d\alpha} = \frac{2(\lambda - bu_4 + u_4^2) - C_1U_1(C_1, u_4)}{-u_4 + b}, \quad (41)$$

где

$$U_1(C_1, u_4) = \frac{1}{2} \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_4^2 - bu_4 + \lambda)} \right\}; \quad (42)$$

при этом постоянная интегрирования  $C_1$  выбирается из условия (40).

Тогда дополнительный первый интеграл для системы (27) имеет вид

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = G_2 \left( \delta(\alpha), \frac{w_4}{\delta(\alpha)}, \frac{w_3}{\delta(\alpha)} \right) = C_2 = \text{const}; \quad (43)$$

при  $\kappa = -1$  он находится из квадратуры

$$\ln |g(\alpha)| = \int \frac{(b - u_4) du_4}{2(\lambda - bu_4 + u_4^2) - C_1 \left\{ C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_4^2 - bu_4 + \lambda)} \right\} / 2},$$

где  $u_4 = w_4/\delta(\alpha)$ . При этом после взятия этого интеграла вместо  $C_1$  необходимо подставить левую часть равенства (38). Правая часть данного равенства выражается через конечную комбинацию элементарных функций, а левая — в зависимости от функции  $\delta(\alpha)$ . Поэтому выражение первых интегралов (38), (43) через конечную комбинацию элементарных функций зависит не только от вычисления квадратур, но также и от явного вида функции  $\delta(\alpha)$ .

Первые интегралы для систем (28) и (29) будут иметь вид

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\Psi_s(\beta_s)} = C_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, 2; \quad (44)$$

вид функций  $\Psi_s(\beta_s)$ ,  $s = 1, 2$ , определен в (18), (20). Дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (30), находится по аналогии с (21):

$$\Theta_5(w_2, w_1; \alpha, \beta) = \beta_3 \pm \int_{\beta_{20}}^{\beta_2} \frac{C_4 h(b)}{\sqrt{C_3^2 \Psi_2^2(b) - C_4^2}} db = C_5 = \text{const};$$

при этом после взятия этого интеграла вместо постоянных  $C_3, C_4$  необходимо подставить соответствующие левые части равенства (44).

**5. Замечание о структуре первых интегралов систем с диссипацией.** Если  $\alpha$  —  $2\pi$ -периодическая координата, то система (27) становится динамической системой с переменной диссипацией с нулевым средним (см. [16–18]). Более того, при  $b = 0$  она превращается в систему консервативную, которая обладает двумя гладкими первыми интегралами вида (23), (15). В силу (31)

$$\Phi_1(z_4, \dots, z_1; \alpha) = z_1^2 + \dots + z_4^2 + 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} F(a) da \cong w_4^2 + w_3^2 + \lambda \delta^2(\alpha), \quad (45)$$

где  $\cong$  означает равенство с точностью до аддитивной постоянной. При этом в силу (26) и (31)

$$\Phi_2(z_3, z_2, z_1; \alpha) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} f(\alpha) \exp \left\{ 2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Gamma_1(b) db \right\} \simeq w_3 \delta(\alpha) = C_2 = \text{const}, \quad (46)$$

где  $\simeq$  означает равенство с точностью до мультипликативной постоянной.

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (45), (46) (или (23), (15)) также является первым интегралом системы (27) при  $b = 0$ . Но при  $b \neq 0$  каждая из функций

$$w_4^2 + w_3^2 - bw_4 \delta(\alpha) + \lambda \delta^2(\alpha) \quad (47)$$

и (46) по отдельности первым интегралом системы (27) не является, в то время как отношение функций (47), (46) является первым интегралом системы (27) (при  $\kappa = -1$ ) при любом  $b$ .

Вообще, для систем с диссипацией трансцендентность функций (в смысле наличия существенно особых точек) как первых интегралов наследуется из нахождения в системе притягивающих или отталкивающих предельных множеств (см. [10]).

**6. Заключение.** По аналогии с маломерными случаями выделим два существенных случая для функции  $f(\alpha)$ , определяющей метрику на сфере:

$$(a) \quad f(\alpha) = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (b) \quad f(\alpha) = \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha}. \quad (48)$$

В случае (48)(а) имеем класс систем, соответствующих движению динамически симметричного пятимерного твердого тела на нулевых уровнях циклических интегралов, вообще говоря, в неконсервативном поле сил (см. [16–18]). Случай (??) соответствует классу систем, описывающих движение материальной точки на четырехмерной сфере также, вообще говоря, в неконсервативном поле сил. В частности, при  $\delta(\alpha) \equiv F(\alpha) \equiv 0$  рассматриваемая система описывает геодезический поток на четырехмерной сфере. В случае (48), если  $\delta(\alpha) = F(\alpha)/\cos \alpha$ , то система описывает пространственное движение пятимерного твердого тела в силовом поле  $F(\alpha)$  под действием следящей силы (см. [8, 9, 11]). В частности, если  $F(\alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $\delta(\alpha) = \sin \alpha$ , то система описывает также обобщенный пятимерный сферический маятник в неконсервативном поле сил и обладает полным набором трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций (см. [16–18]).

Если функция  $\delta(\alpha)$  не является периодической, то рассматриваемая диссипативная система является системой с переменной диссипацией с ненулевым средним (т.е. является собственно диссипативной). Тем не менее, и в этом случае можно получить явный вид трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Последнее также является новым *нетривиальным* случаем интегрируемости диссипативных систем в явном виде.

Автор выражает искреннюю благодарность академику В. В. Козлову за поддержку при обсуждении полученных результатов, а также проф. А. В. Михалеву за ценные замечания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богоявленский О. И.* Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // Докл. АН СССР. — 1986. — 287, № 5. — С. 1105–1108.
2. *Веселов А. П.* Об условиях интегрируемости уравнений Эйлера на  $so(4)$  // Докл. АН СССР. — 1983. — 270, № 6. — С. 1298–1300.
3. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* О скобках Пуассона гидродинамического типа // Докл. АН СССР. — 1984. — 219, № 2. — С. 228–237.
4. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1979.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
6. *Манаков С. В.* Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики  $n$ -мерного твердого тела // Функц. анализ. прилож. — 1976. — 10, № 4. — С. 93–94.
7. *Трофимов В. В., Шамолин М. В.* Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундам. прикл. мат. — 2010. — 16, № 4. — С. 3–229.
8. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // в кн.: Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133–135.
9. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды. — М.: Наука, 1976.
10. *Шамолин М. В.* Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Усп. мат. наук. — 1998. — 53, № 3. — С. 209–210.
11. *Шамолин М. В.* Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундам. прикл. мат. — 2008. — 14, № 3. — С. 3–237.
12. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в динамике четырехмерного твердого тела в неконсервативном поле // Докл. РАН. — 2011. — 437, № 2. — С. 190–193.
13. *Шамолин М. В.* Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твердого тела, взаимодействующего со средой, при учете линейного демпфирования // Докл. РАН. — 2012. — 442, № 4. — С. 479–481.
14. *Шамолин М. В.* Многообразии случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техн. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». — М.: ВИНТИ, 2013. — 125. — С. 5–254.

15. *Шамолин М. В.* Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения// *Фундам. прикл. мат.* — 2015. — 20, № 4. — С. 3–231.
16. *Шамолин М. В.* Многомерный маятник в неконсервативном силовом поле// *Докл. РАН.* — 2015. — 460, № 2. — С. 165–169.
17. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов динамических уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле// *Докл. РАН.* — 2015. — 461, № 5. — С. 533–536.
18. *Шамолин М. В.* Полный список первых интегралов уравнений движения многомерного твердого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования// *Докл. РАН.* — 2015. — 464, № 6. — С. 688–692.
19. *Шамолин М. В.* Новые случаи интегрируемости систем с диссипацией на касательных расслоениях к двумерной и трехмерной сферам// *Докл. РАН.* — 2016. — 471, № 5. — С. 547–551.

М. В. Шамолин

Институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: [shamolin@rambler.ru](mailto:shamolin@rambler.ru), [shamolin@imec.msu.ru](mailto:shamolin@imec.msu.ru)