А. М. Цирлин, Задачи оптимизации с усреднением по части переменных и условия их оптимальности в форме принципа максимума, *Модел. и анализ информ. систем*, 2017, том 24, номер 2, 227–238

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-2-227-238

Моделирование и анализ информационных систем. Т. 24, № 2 (2017), с. 227–238
Modeling and Analysis of Information Systems. Vol. 24, No 2 (2017), pp. 227–238

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-2-227-238

УДК 62-50

Задачи оптимизации с усреднением по части переменных и условия их оптимальности в форме принципа максимума

Цирлин А. М.

получена 30 августа 2016

Аннотация. Рассмотрены задачи нелинейного программирования, критерий и ограничения которых усредненно зависят от части переменных. Показано, что если в этих задачах существует решение, то функция Лагранжа на нем достигает максимума по тем переменным, по которым происходит усреднение. При этом функции, определяющие задачу, могут быть не дифференцируемыми, а непрерывными по этим переменным, множество их допустимых значений может содержать и изолированные точки. В вариационных задачах может отсутствовать решение в классе кусочно-непрерывных функций по части переменных, но существовать обобщенное решение, на котором эти переменные изменяются в скользящем режиме, а критерий оптимальности стремится к своей верхней грани. Если же в таких задачах решение в классе кусочно – непрерывных функций существует, то условия оптимальности этого решения имеют форму принципа максимума функции Гамильтона. Рассмотрена связь усреднения по времени и по множеству значений переменных.

Ключевые слова: Усредненная оптимизация, расширение множества допустимых, эквивалентность расширения, вариация вероятностной меры, условия в форме принципа максимума

Для цитирования: Цирлин А. М., "Задачи оптимизации с усреднением по части переменных и условия их оптимальности в форме принципа максимума", *Моделирование и анализ информационных систем*, **24**:2 (2017), 227–238.

Об авторах:
Цирлин Анатолий Михайлович, orcid.org/0000-0002-3637-6160, д-р техн. наук, профессор,
Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН
ул. Петра Первого, 4а, с. Веськово, Переславский р-он, Ярославская обл., 152020 Россия,
e-mail: tsirlin@sarc.botik.ru

Введение

Ниже будут рассмотрены экстремальные задачи, у которых критерий оптимальности I и ограничения усредненно зависят от части переменных. Такие задачи возникают объективно, когда в технологических процессах некоторые подлежащие выбору переменные должны быть неизменны (конструктивные параметры), а другие – могут изменяться во времени, причем наличие емкостей приводит к эффекту усреднения влияния этих изменений [1].

Они возникают также как вспомогательные, оценочные, когда введение усреднения расширяет множество допустимых решений и упрощает решение. Значение такой расширенной задачи заведомо «не хуже», чем значение исходной. А оптимальное ее решение содержит полезную информацию о характере оптимального решения исходной. Для определенности будем рассматривать задачи на максимум критерия оптимальности.

Для некоторых классов задач удается доказать, что точные верхние грани критериев оптимальности исходной и расширенной задач совпадают. Расширение в этом случае называют *эквивалентным*. В частности, усредненное расширение вариационных задач эквивалентно по тем переменным, сколь угодно быстрые изменения которых „сглаживаются“ условиями задачи. Для эквивалентного расширения найдется одна или несколько последовательностей допустимых решений исходной задачи, на которых ее критерий оптимальности стремится к своей верхней грани (такое решение называют обобщенным), равной максимуму критерия расширенной, либо, если решение исходной задачи существует, оно совпадает с решением расширенной.

Первоначально рассмотрена связь между усреднением по времени и по множеству. Затем задача нелинейного программирования (НП) с усреднением по части переменных, наконец, вариационные задачи. Показано, что между условиями оптимальности этих задач есть много общего и возможность применения принципа максимума в вариационных задачах по некоторым переменным связана с эквивалентностью усредненного расширения по этим переменным.

1. Усреднение по времени и по множеству

1.1. Время не входит явно в условия задачи

Среднее значение функции $f(u(t))$ на интервале $(0, \tau)$ может быть вычислено по времени как

$$\overline{f_t(u)} = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^{\tau} f(u(t))dt \tag{1}$$

или по множеству, если для любого t $u \in V \in R^m$

$$\overline{f_p(u)} = \int\limits_V f(u)p(u)du, \tag{2}$$

где $p(u)$ — вероятностная мера

$$p(u) \geq 0, \quad \int\limits_V p(u)du = 1, \tag{3}$$

для любого $V_0 \in V$, величина

$$S_0 = \int\limits_{V_0} p(u)du$$

равна доле интервала $(0, \tau)$, в течение которой значения $u(t)$ принадлежат V_0.

Кусочно-постоянной функции $u(t)$, принимающей дискретные значения $u_i \in V_u$, соответствует вероятностная мера вида

$$p(u) = \sum_i \gamma_i \delta(u - u_i), \quad \gamma_i \geq 0, \quad \sum \gamma_i = 1. \tag{4}$$

Интеграл (2) в этом случае примет вид

$$\overline{f_p(u)} = \sum_i \gamma_i f(u^i). \tag{5}$$

На величину интегралов в (1), (2) не влияет последовательность, в которой $u(t)$ принимает значения u^i. Таким образом, каждой вероятностной мере $p(u)$ может соответствовать много функций $u(t)$, для которых $\overline{f_t(u)} = \overline{f_p(u)}$. Если $p(u) = \delta(u - u^0)$, то $u(t) = u_0 = const$. Если число базовых значений больше единицы, то число функций $u(t)$ сколь угодно велико, т.к. каждое из значений u^i она может принимать неоднократно, лишь бы суммарная доля интервала $[0, \tau]$, в течение которой $u(t) = u^i$, составляла γ_i.

Пусть ставится задача о максимуме среднего значения функции $f_0(u)$ на V. Если эта функция унимодальна и достигает максимума в точке u^0, то решение единственно

$$u^*(t) = u^0, \quad p^*(u) = \delta(u - u^0), \tag{6}$$

но если функция $f_0(u)$ достигает максимума в r точках u^i, то решений $u^*(t)$, доставляющих максимум ее среднего значения, сколь угодно много, они кусочно-постоянные и всем им соответствует одна и та же вероятностная мера

$$p^*(u) = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i \delta(u - u^i), \tag{7}$$

причем для всех γ_i, удовлетворяющих условиям (4), значение $\overline{f^*(u)}$ одинаково. Будем называть значения u^i — базовыми.

Появляется возможность, не „ухудшая“ $\overline{f_0^*(u)}$, наложить дополнительные усредненные ограничения и выполнить их за счет выбора γ_i. Число m таких ограничений не более чем $r-1$, так как переменные γ_i неотрицательны и в сумме равны единице.

Таким образом, чтобы было выполнено m усредненных условий вида

$$\overline{f_\nu(u)} = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i f_\nu(u^i) = 0, \quad \nu = \overline{1, m}, \tag{8}$$

функция $f_0(u)$ должна иметь не менее чем $(m+1)$ максимум.

1.2. Усреднение функций, явно зависящих от времени

Пусть $f = f(t, u(t))$ непрерывна по совокупности переменных. Ее среднее значение по времени

$$\overline{f_t(t, u)} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t, u(t))dt, \quad u \in V(t). \tag{9}$$

Любой кусочно-непрерывной функции $u^0(t)$ соответствует вероятностная мера $p^0(u, t)$

$$p^0(u, t) = \delta(u - u^0(t)), \tag{10}$$

такая, что
$$\overline{f_p(u^0)} = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \int\limits_{V(t)} f(t,u)p^0(u,t)du\,dt. \tag{11}$$

В более общем случае вероятностная мера $p(u,t)$ не сосредоточена при каждом t в единственной точке u^0, как $p^0(u,t)$, а удовлетворяет только требованиям
$$\int\limits_{V(t)} p(u,t)du = 1, \quad p(u,t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,\tau]. \tag{12}$$

Расширенное множество вероятностных мер $p(u,t)$ включает $p^0(u,t)$. Для любой $p(u,t)$ найдется такая последовательность функций $\{u^\nu(t)\}$, на которой
$$\lim_{\nu\to\infty} \overline{f_t(t,u^\nu)} = \frac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau \int\limits_{V(t)} f(t,u)p(u,t)du\,dt. \tag{13}$$

Следуя Л. Янгу [2], будем называть меру $p(u,t)$ *обобщенной переменной.*

2. Задача НП с усреднением по некоторым переменным

Рассмотрим задачу
$$\overline{f_0(x,u)}^u \to \max \Big/ \begin{array}{l} \overline{f_i(x,u)}^u = 0, \quad i = \overline{1,m}, \\ u \in V \subset R^k, \quad x \in R^{n-k}. \end{array} \tag{14}$$

Здесь черта над функциями f_0, f_i соответствует их усреднению по u:
$$\overline{f_i(x,u)}^u = \int\limits_V f_i(x,u)p(u)du, \quad i = \overline{0,m}. \tag{15}$$

В задаче (14) два типа переменных: вектор x и вероятностная мера $p(u)$, удовлетворяющая условиям (3). Функции f_i непрерывны по x, u и непрерывно дифференцируемы по x, множество V – компакт. Для простоты не рассматриваем задачу с неравенствами, т.к. их наличие ничего в существе дела не меняет.

Зафиксируем $x \in R^{n-k}$ и рассмотрим семейство вспомогательных задач
$$f_0(x,u) \to \max_u \Big/ \begin{array}{l} f_i(x,u) = c_i, \quad i = \overline{1,m}, \\ u \in V \subset R^k. \end{array} \tag{16}$$

Обозначим оптимальное решение этой задачи через $u^*(x,c)$, а значение через $f_0^*(x,c) = f_0(x,u^*(x,c))$. Функцию $f_0^*(x,c)$ называют функцией достижимости [5]. Отметим, что для некоторых c задача (16) может не иметь решения (множество ее допустимых решений пусто). Множество тех c, для которых задача имеет решение, обозначим через $V_c \in R^m$. Очевидно, что для любого x оптимальная мера $p(u)$ в задаче (14), (15) сосредоточена только на решениях $u^*(x,c)$ задачи (16).

С использованием введенных обозначений задачу (14) можно переписать в форме

$$\overline{f_0(x,c)}^c \to \max_{p(x,c)} \Big/ \begin{array}{l} \overline{c_i} = 0, \quad i = \overline{1,m}, \\ c \in V_c(x) \in R^m. \end{array} \tag{17}$$

Но это — задача об ординате выпуклой оболочки функции $f_0(x,c)$ в точке $c(x) = 0$.

Согласно теореме Каратеодори [3] оптимальное решение такой задачи имеет вид

$$p^*(x,c) = \sum_{j=0}^{m} \gamma_j(x)\delta(c - c^j(x)), \quad \gamma_j(x) \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{m} \gamma_j(x) = 1,$$

т.е. оно сосредоточено не более чем в $(m+1)$ точке независимо от размерности u, x. При этом каждому из значений $c^j(x)$ соответствует вектор $u^j(x)$.

Этот факт позволяет переписать задачу (14) как задачу нелинейного программирования (НП)

$$\sum_{j=0}^{m} \gamma_j f_0(x,u^j) \to \max \Bigg/ \begin{array}{l} \sum\limits_{j=0}^{m} \gamma_j f_i(x,u^j) = 0, \quad i = \overline{1,m}, \\ u^j \in V \subset R^k, \quad x \in R^{n-k}, \\ \sum\limits_{j=0}^{m} \gamma_j = 1, \quad \gamma_j \geq 0, \end{array} \tag{18}$$

переменными в которой являются вектор x, вектор весовых коэффициентов γ и векторы u^j.

Задаче (18) соответствует функция Лагранжа

$$R = \sum_{j=0}^{m} \gamma_j \left[\sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x,u^j) - \Lambda \right], \tag{19}$$

в которой $\lambda_0 = 1$ или 0.

С использованием функции R могут быть сформулированы условия оптимальности решения $z^* = (x^*, u^{j*}, \gamma_j^*)$ задачи (18).

Достаточное: *Для того чтобы решение z^* было оптимальным, достаточно, чтобы нашелся такой вектор множителей Лагранжа $\lambda^* = (1, \lambda_1^*, ..., \lambda_m^*, \Lambda^*)$, чтобы функция R достигала максимума и были выполнены ограничения задачи* (18). Отметим, что число таких максимумов не превышает $(m+1)$ и равно числу базовых значений u^j.

Доказательство этих условий очевидно, но существование такого вектора не гарантировано.

Необходимое:

Если z^* — оптимальное решение, то найдется такой ненулевой вектор $\lambda^* = (\lambda_0, ..., \Lambda), \quad \lambda_0 = (0;1)$, что

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=0}^{m} \gamma_i L(x, u^j, \lambda^*) = 0, \tag{20}$$

$$u^{j*} = \arg\max_{u\in V} L(x,u,\lambda^*), \quad j=\overline{0,m}, \quad \gamma_j \ge 0, \quad \sum_{j=0}^{m} \gamma_j = 1. \tag{21}$$

Здесь

$$L(x,u,\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x,u)$$

функция Лагранжа неусредненной задачи.

Таким образом, по усредняемым переменным и функция L достигает максимума на оптимальном решении, а ее среднее по и значение стационарно по x.

Доказательство необходимых условий оптимальности следует из теоремы Куна – Таккера [4] применительно к задаче (18). По условию локальной неулучшаемости R по весовым коэффициентам γ_j с учетом их неотрицательности получим выражения

$$\frac{\partial R}{\partial \gamma_j}\delta\gamma_j \le 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial \gamma_j} \le 0 & \text{для} \quad \gamma_j = 0, \\ \frac{\partial R}{\partial \gamma_j} = 0 & \text{для} \quad \gamma_j > 0. \end{cases} \tag{22}$$

А так как $\frac{\partial R}{\partial \gamma_j} = L(x,u^j,\lambda) - \Lambda$, то из (22) вытекает, что с положительными весами в функцию R на оптимальном решении входят только такие значения u^j (базовые), на которых L максимальна по u на V и равна Λ для всех j.

Это обстоятельство позволяет ослабить требования к условиям оптимальности задачи: не требовать гладкости функций f_i по u; множество V может состоять из изолированных значений u и пр.

3. Вариационные задачи

Рассмотрим задачи, в которых искомыми решениями являются функции.

3.1. Задача с интегральными ограничениями

$$I = \int_0^{\tau} f_0(x,u(t),t)dt \to \max, \tag{23}$$

$$J_i = \int_0^{0} f_i(x,u(t),t)dt = 0, \quad i=\overline{1,m}, \quad u(t)\in V(t), \quad x\in R^n.$$

В этой задаче функции $f_i (i=\overline{0,m})$ непрерывны по u и непрерывно-дифференцируемы по $x, t, V(t)$ — компакт, $u(t)$ — кусочно-непрерывная.

Сопоставим задаче (23) усредненную по u задачу (см. [5], [6])

$$\overline{I} = \int_0^{\tau} \int_{V(t)} f_0(x,u,t)p(u,t)du\,dt \to \max, \tag{24}$$

$$\overline{J}_i = \int_0^{\tau} \int_{V(t)} f_i(x,u,t)p(u,t)du\,dt = 0, \quad i=\overline{1,m},$$

$$\int\limits_{V(t)} p(u,t)du = 1, \quad p(u,t) \geq 0, \quad \forall t \in [0,\tau].$$

Каждой функции $u_0(t)$ в задаче (23) можно сопоставить меру

$$p_0(u,t) = \delta(u - u_0(t)). \tag{25}$$

При этом $\overline{I} = I$, а $J_i = \overline{J_j}$. В классе решений, имеющих вид (25), задачи (23) и (24) отличаются только формой записи, а по существу они одинаковы. Между множествами допустимых решений задачи (23) и задачи (24) в форме (25) существует взаимнооднозначное соответствие, такое, что на соответствующих друг другу решениях значения критерия и ограничений одинаковы. Такие задачи называют изоморфными [5], [7].

Множество допустимых решений задачи (24) шире, чем множество решений вида (25). Так что задача (24) является расширением для (23) и

$$\overline{I}^* \geq I^*. \tag{26}$$

Однако каждому решению $p_0(u,t)$ задачи (24) можно сопоставить последовательность решений $\{u_\nu(t)\}$, на которой предел любого из ограничений J_j стремится к нулю, а предел I стремится к $\overline{I}(x^*, p_0(u,t))$. Так что, если под I^* понимать точную верхнюю грань I на множестве допустимых решений, то неравенство (26) можно заменить равенством. Таким образом, расширение (24) задачи (23) эквивалентно.

Справедлива следующая Л е м м а: *Пусть расширение исходной экстремальной задачи эквивалентно. Тогда необходимые условия оптимальности решения расширенной задачи являются необходимыми условиями оптимальности решения исходной, если оно существует.*

Действительно, необходимые условия оптимальности решения задачи (24) совпадают с необходимыми условиями оптимальности задачи (23) в классе обобщенных решений. В том случае, если в задаче (23) существует оптимальное решение ($\mathrm{Sup} I = \max I$), то необходимые условия оптимальности задачи (24) выделяют решение вида (25), а значит, и оптимальное решение задачи (23).

Сформулируем эти условия: *Пусть $x^*, p^*(u,t)$ – оптимальное решение задачи (24), тогда существует такой ненулевой вектор $\lambda = (\lambda_0, ..., \lambda_m), \lambda_0 = (0;1)$, что функционал*

$$S = \lambda_0 \overline{I} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overline{J_i} \tag{27}$$

стационарен по x, а функция

$$L = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x,u,t) \tag{28}$$

достигает максимума по $u \in V(t)$:

$$\int\limits_0^\tau \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=0}^{m} \int\limits_{V(t)} \lambda_i f_i(x,u,t) p^*(u,t) du\, dt = 0, \tag{29}$$

$$u^*(t) = \arg\max_{u \in V(t)} \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x^*, u, t). \tag{30}$$

Справедливость этих условий следует из того, что задача (24) по отношению к вектору x является задачей нелинейного программирования с функцией Лагранжа

$$\begin{aligned}\overline{S} = S - \int_0^\tau \Lambda(t) \int_{V(t)} p(u,t) du\, dt = \int_0^\tau \int_{V(t)} \Bigg[\sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x,u,t) + \\ + \Lambda(t) \Bigg] p(u,t) du\, dt = \int_0^\tau \int_{V(t)} [L - \Lambda(t)] p(u,t) du\, dt,\end{aligned} \tag{31}$$

а для x^* подынтегральное выражение функционала $\overline{S}$ должно быть локально неулучшаемо по $p(u,t)$

$$\frac{\partial}{\partial p}\{[L - \Lambda(t)] p(u,t)\} \delta p \le 0, \tag{32}$$

откуда

$$\left.\begin{array}{lll} L(x^*, u^*, t) = \Lambda(t) & \text{при} & p(u,t) > 0, \\ L(x^*, u, t) \le \Lambda(t) & \text{при} & p(u,t) = 0. \end{array}\right\} \tag{33}$$

Таким образом, с ненулевой мерой в задачу войдут только те значения $u(t)$, на которых L максимальна по $u \in V(t)$.

Если этот максимум единственный, то оптимальная мера имеет вид (25) и соответствующая функция $u^*(t)$ представляет собой решение задачи (23), если на некотором множестве значений t ненулевой меры максимум L по u не единственный, то оптимальному решению задачи (24) соответствует обобщенное решение задачи (23), на котором I достигает своей верхней грани.

Подчеркнем, что эквивалентность расширения связана с тем, что $u(t)$ входит в условия задачи под знаком интеграла, а следовательно, сколь угодно быстрые изменения этой переменной усредняются.

3.2. Задача оптимального управления

В задаче оптимального управления переменные состояния x и управляющие воздействия u зависят от t

$$I = \int_0^\tau f_0(x(t), u(t), t) dt \to \max, \tag{34}$$

$x(t)$ и $u(t)$ связаны дифференциальными уравнениями, которые могут быть переписаны как

$$x_i(t) = x_i(0) + \int_0^t f_i(x(t_1), u(t_1), t_1) dt_1, \quad i = \overline{1,m}, \quad u \in V(t). \tag{35}$$

Функции $f_i (i = 0, m)$ непрерывны по u и непрерывно дифференцируемы по x, t; $V(t)$ — компакт.

Для записи расширенной задачи введем обозначения:

$$\overline{f_i(x,u,t)} = \int\limits_{V(t)} f_i(x,u,t)p(u,t)du, \quad i = \overline{0,m}. \tag{36}$$

Расширенная задача примет форму

$$\overline{I} = \int\limits_0^\tau \overline{f_0(x,u,t)}dt \to \max_{x,p} \tag{37}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} &\overline{J_i}(t) = \int\limits_0^\tau \left\{[x_i(t_1) - x_i(0)]\delta(t_1 - t) - h(t-t_1)\overline{f_i(x,u,t_1)}\right\} dt_1 = 0, \\ &J_{m+1}(t) = \int\limits_{V(t)} p(u,t)du - 1 = 0, \quad \forall t\; p(u,t) \geq 0, \quad i = \overline{1,m}. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Искомыми переменными в этой задаче являются вектор-функция $x(t)$ и вероятностная мера $p(u,t)$.

Необходимые условия оптимальности расширенной задачи: *Пусть* $x^*(t), p^*(u,t)$ *— оптимальное решение задачи* (37), (38), *тогда найдется такая ненулевая вектор-функция*

$$\lambda(t) = (\lambda_0, \lambda_1(t), ..., \lambda_m(t), \Lambda(t)), \tag{39}$$

что на оптимальном решении

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\lambda_0\overline{f_0(x,u,t)} + \sum_{i=1}^m \left[\lambda_i(t)x_i(t) - \int\limits_t^\tau \lambda_i(t_1)dt_1\overline{f_i(x,u,t)}\right]\right\} = 0, i = \overline{1,m}, \tag{40}$$

$p^*(u,t) > 0$, для

$$u^*(t) = \arg\max_{u\in V(t)}\left\{\lambda_0 f_0(x,u,t) + \sum_{i=1}^m \left[f_i(x,u,t)\cdot\int\limits_t^\tau \lambda_i(t)dt - \lambda_i(t)x_i(t)\right]\right\}. \tag{41}$$

Действительно, функционал Лагранжа расширенной задачи имеет вид

$$S = \lambda_0\overline{I} + \sum_{i=1}^m \int\limits_0^\tau \big(\lambda_i(t)\overline{J_i}(t) + \Lambda(t)J_{m+1}(t)\big)\, dt. \tag{42}$$

Во втором слагаемом S

$$-\int\limits_0^\tau \lambda_i(t)h(t-t_1)dt = -\int\limits_{t_1}^\tau \lambda_i(t)dt \quad i = \overline{1,m}. \tag{43}$$

С учетом (43) подынтегральное выражение в S можно записать как

$$\overline{R} = \lambda_0\overline{f_0(x,u,t)} + \sum_{i=1}^m \left[\lambda_i(t)x_i(t) - \int\limits_t^\tau \lambda_i(t_1)dt_1\cdot\overline{f_i(x,u,t)}\right] - \Lambda(t)p(u,t). \tag{44}$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_i(t) = -\int\limits_t^\tau \lambda_i(t_1)dt_1 \to \dot{\psi}_i(t) = \lambda_i(t), \quad i = \overline{1, m}, \\ \overline{H} = \lambda_0 \overline{f_0(x, u, t)} + \sum\limits_{i=1}^m \psi_i(t) \overline{f_i(x, u, t)}. \end{array}\right\} \tag{45}$$

Тогда необходимые условия оптимальности расширенной задачи (37), (38) примут форму

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \overline{R}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\overline{H} + \sum\limits_{i=1}^m \dot{\psi}_i(t)x_i\right] = 0, i = \overline{1, m} \\ u_\nu^*(t) = \arg\max_{u \in V(t)} H(x, \psi, u, t). \end{array}\right\} \tag{46}$$

Если для каждого t максимум H по u единственный, то в силу непрерывности по u функций $f_i(x, u, t), i = 0, m$, решение исходной задачи существует и удовлетворяет условиям (46), совпадающим с принципом максимума Понтрягина. Если максимум не единственный, то исходная задача имеет обобщенное решение (скользящий режим), на котором достигается

$$\operatorname{Sup} I = \max \overline{I}.$$

Таким образом, возможность требования максимума функции Гамильтона по управляющим воздействиям связана с тем, что усредненное расширение задачи по этим переменным эквивалентно.

4. Заключительные замечания

Использованный здесь подход, названный в [8] „вариацией скольжения“, по существу сводится к замене исходной задачи ее усредненным расширением по той части переменных, для которых это расширение эквивалентно, т.е. любому решению усредненной задачи соответствует либо решение исходной, либо последовательность таких решений, на которой условия исходной задачи выполнены с любой наперед заданной точностью, а величина критерия исходной задачи сколь угодно близка к величине критерия усредненной. В этом случае при дополнительном предположении о существовании решения исходной задачи оно удовлетворяет условиям оптимальности расширенной. В противном случае эти условия выделяют оптимальный скользящий режим.

В [8] наличие смешанных ограничений на управляющие и фазовые переменные привело к необходимости разделять управления на два класса u_1 и u_2, по первому из которых допустимы слабые вариации.

Изложенный выше подход [9], в отличие от игольчатой вариации (см. [10]), пригоден для вариационных задач с сочетанием условий разного типа.

В задачах с ограничениями разного типа, а не только в форме дифференциальных уравнений, нет смысла выделять управляющие переменные и переменные состояния или делить управления на классы. Важно выделить те переменные, усредненное расширение задачи по которым эквивалентно. Для этого целесообразно условия задачи переписать в канонической интегральной форме [11], как это сделано выше для дифференциальных уравнений. Расширение задачи по некоторой переменной эквивалентно, если при такой записи она во все условия и в критерий оптимальности входит под знаком интеграла, а значит, ее сколь угодно быстрые изменения влияют на них усредненно.

Список литературы / References

[1] Цирлин А. М., *Оптимальные циклы и циклические режимы*, Энергоатомиздат, М., 1983; [Tsirlin A. M., *Optimalnie zikly i ziklisheskie regimi*, Energoatomizdat, M., 1983, (in Russian).]

[2] Янг Л., *Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления*, Мир, М., 1977; [Jang L., *Lekzii po variazionnomu ishisleniju i teoriin optimalnogo upravlenija*, Mir, M., 1977, (in Russian).]

[3] Fromovitz St., "Non-linear programmingn with randomisation", *Manag. Sci. A.*, **11**:9 (1965).

[4] Himmelblau D. M., *Applied Nonlinear Programming*, N-Y, 1972.

[5] Цирлин А. М., *Методы усредненной оптимизации и их прилоэкения*, Физматлит, М., 1997; [Tsirlin A. M., *Metodi usrednennoy optimizazii i ix prilogenija*, Fizmatkit, M., 1997, (in Russian).]

[6] Цирлин А. М., "Задачи и методы усредненной оптимизации", *Труды Математического института им. Стеклова*, **261** (2008), 1–17; [Tsirlin A. M., "Zadashi i metodi usrednennoy optimizazii", *Trudi instituta im. Steklova*, **261** (2008), 1–17, (in Russian).]

[7] Афанасьев А. П., Дикусар В. В., Милютин А. А., Чуканов С. А., *Необходимое условие в оптимальном управлении*, Наука, М., 1990; [Afanasyev A. P., Dicusar V. V., Milutin A. A., Shukanov C. A., *Neobxodimoe uslovie v optimalnom upravlenii*, Nauka, M., 1990, (in Russian).]

[8] Дубовицкий А. Я., Милютин А. А., "Теория принципа максимума", *Методы теории экстремальных задач в экономике*, Наука, М., 1981, 6–47; [Dubovizky A. J., Milutin A. A., "Teorija prinzipa maksimuma", *Metodi teorii ecstremalnix zadash v ekonomike*, Nauka, M., 1981, 6–47, (in Russian).]

[9] Цирлин А. М., "Оптимизация в среднем и скользящие режимы в задачах оптимального управления", *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*, 1974, № 2, 143–151; [Tsirlin A. M., "Optimizacija v srednem i skolzjashie regimi v zadashax optimalnogo upravlenija", *Izv. AN SSSR. Texn. kibernetika*, 1974, № 2, 143–151, (in Russian).]

[10] Розоноэр Л. И., "Принцип максимума Понтрягина в теории оптимальных систем", *Автомат. и телемех.*, **20**:10 (1959), 1320–1334; [English transl.: [Rozonoer L. I., "The Maximum Principle in the theory of optimal systems", *Autom. Remote Control*, **20**:10 (1959), 1320–1334].

[11] Цирлин А. М., "Условия оптимальности скользящих режимов и прнцип максимума для задачи со скалярным аргументом", *Автоматика и телемеханика*, 2009, № 5, 106–121; [English transl.: Tsirlin A. M., "Optimality conditions of sliding modes and the maximum principle for control problems with the scalar argument", *Autom. Remote Control*, **70**:5 (2009), 839–854].

Tsirlin A. M., "Optimization Problems with Averaging over the Variables", *Modeling and Analysis of Information Systems*, **24**:2 (2017), 227–238.

DOI: 10.18255/1818-1015-2017-2-227-238

Abstract. The problems of nonlinear programming, criteria and limitations depend on the variables averaged. It is shown that if these problems have solutions, the Lagrangian reaches the maximum for the variables, which are averaged. The functions defining the problem can not be differentiable and continuous on these variables, the set of possible values may contain isolated points. In variational problems there can be no solution in the class of piecewise continuous functions of the variables, but there can be a generalized solution in which these variables change in the sliding mode, and the optimality criterion tends to its upper edge. If in such problems the solution in the class of piecewise - continuous functions exists, the conditions of optimality of this solution are in the form of the Hamiltonian function of the maximum principle. The relationship between the average over time and across multiple variables is considered.

Keywords: The average optimization, expansion of the set of admissible equivalence extension, variation of probability measures, the conditions in the form of the maximum principle

About the authors:
Anatoly M. Tsirlin, orcid.org/0000-0002-3637-6160, Prof,
Program Systems Institute of RAS
4a Petra 1 str., Veskovo Jaroslavskoy 152020, Russia, e-mail: tsirlin@sarc.botik.ru