



Общероссийский математический портал

С. Д. Глызин, С. А. Кащенко, Семейство конечномерных отображений, индуцированных логистическим уравнением с запаздыванием, *Матем. моделирование*, 2020, том 32, номер 3, 19–46

DOI: 10.20948/mm-2020-03-02

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.80

15 марта 2025 г., 10:27:47



СЕМЕЙСТВО КОНЕЧНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, ИНДУЦИРОВАННЫХ ЛОГИСТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© 2020 г. *С.Д. Глызин, С.А. Кащенко*

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
glyzin.s@gmail.com

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № 1.12873.2018/12.1).

DOI: 10.20948/mm-2020-03-02

Рассматривается семейство отображений, которые используются при численном моделировании логистического уравнения с запаздыванием. Это уравнение находит широкое применение в задачах математической экологии. Вместе с тем, представленные отображения сами по себе могут служить моделями динамики популяций, поэтому их изучение представляет значительный интерес. В работе сопоставляются свойства траекторий данных отображений и исходного уравнения с запаздыванием. Показано, что поведение решений отображений может быть достаточно сложным, в то время как логистическое уравнение с запаздыванием имеет лишь устойчивое состояние равновесия или цикл.

Ключевые слова: логистическое уравнение с запаздыванием, отображение, бифуркации.

FAMILY OF FINITE-DIMENSIONAL MAPS INDUCED BY A LOGISTIC EQUATION WITH A DELAY

S.D. Glyzin, S.A. Kashchenko

Yaroslavl State University

This article discusses a family of maps that are used in the numerical simulation of a logistic equation with delay. This equation is widely used in problems of mathematical ecology. At the same time, the presented maps themselves can serve as models of the dynamics of populations; therefore, their study is of considerable interest. The paper compares the properties of the trajectories of these mappings and the original equation with delay. It is shown that the behavior of the solutions of maps can be quite complicated, while the logistic equation with delay has only a stable equilibrium state or cycle.

Key words: logistic equation with delay, maps, bifurcations.

1. Постановка задачи

1.1. Простейшие свойства логистического уравнения с запаздыванием

Логистическое уравнение с запаздыванием

$$du / dt = r[1 - u(t - 1)]u \quad (1)$$

принадлежит к числу фундаментальных моделей популяционной динамики. В нем неотрицательная функция $u(t)$ моделирует нормированную плотность численности популяции, а положительный параметр r характеризует скорость ее роста. Исследованию решений этого уравнения посвящена значительная литература [1-8]. Напомним простейшие свойства его решений. Обозначим через $C[-1,0]$ пространство непрерывных на отрезке $[-1,0]$ функций со стандартной нормой. Это пространство примем в качестве фазового, т.е. пространства начальных условий уравнения (1).

Перечислим без доказательства ряд утверждений о решениях уравнения (1).

1. Для уравнения (1) выполняется теорема существования и единственности решений, т.е. для каждого значения t_0 и каждой начальной функции $\varphi(s) \in C[-1,0]$ при всех $t > t_0$ существует и единственно решение $u(t, \varphi)$ уравнения (1), для которого $u(t_0 + s, \varphi) = \varphi(s)$.

2. При условии $\varphi(s) \geq 0$ выполнено неравенство $u(t, \varphi) \geq 0$, $t \geq t_0$, а при условии $\varphi(s) > 0$ имеет место строгое неравенство $u(t, \varphi) > 0$, $t \geq t_0$. В дальнейшем термин «решение» применяется только к неотрицательным решениям (1), и соответственно начальные функции $\varphi(s)$ предполагаются неотрицательными.

3. Линеаризованное в окрестности состояния равновесия $u \equiv 0$ уравнение (1) имеет вид $\dot{v} = rv$, откуда следует, что при всех $r > 0$ это состояние равновесия неустойчиво. Кроме нулевого, уравнение (1) имеет состояние равновесия $u \equiv 1$. Линеаризуем на нем (1), тогда получим уравнение

$$\dot{v} = -rv(t - 1). \quad (2)$$

Его характеристический квазиполином имеет вид

$$\lambda + r \exp(-\lambda) = 0. \quad (3)$$

Из отрицательности вещественных частей всех корней этого уравнения следует асимптотическая устойчивость решений (2), а значит, и асимптотическая устойчивость единичного состояния равновесия уравнения (1). Если же имеется корень (3) с положительной вещественной частью, то решения (2) и решение $u \equiv 1$ в (1) неустойчивы.

4. Для отрицательности вещественных частей всех корней (3) необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$0 < r < \pi / 2 . \quad (4)$$

5. Отметим еще, что в случае, когда функция $v(t) = u(t) - 1$, начиная с некоторого момента t_0 , является знакпостоянной, то из (1) следует её монотонное (при $t \geq t_0 + 1$) стремление к нулю при $t \rightarrow +\infty$. Обратим внимание на то, что для монотонного стремления к нулю некоторого решения $v(t)$ уравнения (2) необходимо и достаточно, чтобы уравнение (3) имело вещественный отрицательный корень. Условием существования отрицательного корня в (3) является неравенство

$$0 < r < e^{-1} .$$

6. Уравнение (1) является диссипативным: при достаточно больших t каждое решение $u(t)$ этого уравнения удовлетворяет неравенству

$$u(t) \leq \exp(r) .$$

7. В [1-3,5] исследовался вопрос об отыскании всех тех значений параметра r , при которых состояние равновесия $u \equiv 1$ глобально устойчиво, т.е. все решения (1) стремятся к 1 при $t \rightarrow +\infty$. В [1] было показано, что область глобальной устойчивости выделяется неравенствами $0 < r < 3/2$ и высказана гипотеза о том, что область глобальной устойчивости может быть расширена до условия

$$0 < r < 37 / 24 . \quad (5)$$

В [3,5] эта гипотеза была обоснована, а также приведен алгоритм, который допускает улучшение этой оценки. Сразу отметим, что с его помощью определяются оценки сверху всех решений (1) даже при отсутствии глобальной устойчивости состояния равновесия.

Отметим, что численный анализ решений (1) проводился ранее многими авторами, в том числе и авторами данной работы. Было показано, что область глобальной устойчивости состояния равновесия $u \equiv 1$ совпадает с областью его локальной устойчивости $0 < r \leq \pi / 2$.

В [4] показано, что при всех $r > \pi/2$ уравнение (1) имеет непостоянное периодическое решение. В том случае, когда r мало отличается от $\pi/2$, применимы стандартные методы теории бифуркаций. В частности, при $r = \pi/2$ характеристическое уравнение (3) имеет пару чисто мнимых корней $\pm i \pi/2$, а все остальные корни (3) имеют отрицательные вещественные части. В задаче об устойчивости состояния равновесия $u \equiv 1$ уравнения (1) при этом

возникает критический случай пары чисто мнимых корней, т.е. реализуются условия так называемой бифуркации Андронова-Хопфа.

8. Бифуркации Андронова-Хопфа. Положим в (1) $r = \pi/2 + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$, тогда в достаточно малой и не зависящей от ε окрестности состояния равновесия $u \equiv 1$ существует двумерное устойчивое локальное интегральное инвариантное многообразие (см., например, [9,10]). На этом многообразии уравнение (1) можно записать в виде скалярного комплексного обыкновенного дифференциального уравнения

$$dg / dt = (\varepsilon \alpha + O(\varepsilon^2))g + (d + O(\varepsilon))g|g|^2 + O(|g|^5), \quad (6)$$

где $g(t)$ – скалярная комплекснозначная функция и

$$\alpha = (1 + \pi^2 / 4)^{-1}(\pi / 2 + i), \quad d = \frac{1}{10}[3\pi - 2 + i(\pi + 6)](1 + 4 / \pi^2)^{-1}. \quad (7)$$

Выполняя в (6) нормировочные замены $g \rightarrow \sqrt{\varepsilon} g$, $\tau = \varepsilon t$, переходим от (6) к укороченному (с точностью до слагаемых порядка $O(\varepsilon)$) уравнению

$$d\xi / dt = \alpha \xi + d\xi|\xi|^2. \quad (8)$$

Поскольку $\operatorname{Re} \alpha > 0$ и $\operatorname{Re} d < 0$, уравнение (8) имеет устойчивый цикл

$$\xi_0(\tau) = \sqrt{20 / (\pi(3\pi - 2))} \exp(-2i\tau / (3\pi - 2)).$$

Сформулируем для данного случая бифуркационную теорему.

Теорема 1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ уравнение (1) имеет орбитально асимптотически устойчивый цикл $u_0(t, \varepsilon)$, для которого выполнено асимптотическое представление*

$$u_0(t, \varepsilon) = 1 + \sqrt{\varepsilon} (\xi_0(\tau) \exp(i\pi t / 2) + \overline{\xi_0(\tau)} \exp(-i\pi t / 2)) + O(\varepsilon). \quad (9)$$

1.2. Вывод дискретного аналога логистического уравнения с запаздыванием. Перейдем теперь к выводу конечномерного отображения, моделирующего уравнение (1). Для этого фиксируем произвольно натуральное k и будем считать, что шаг по времени равен $1/k$. В этом случае заменим производную по времени стандартной разделенной разностью

$$\frac{u(t + 1/k) - u(t)}{1/k} = r[1 - u(t - 1)]u(t). \quad (10)$$

Далее, полагая в равенстве (10) $t = n/k$, $n \in \mathbb{Z}$, $u_n = u(n/k)$, приходим к разностному уравнению порядка $(k+1)$

$$u_{n+1} = [1 + \frac{r}{k}(1 - u_{n-k})]u_n, \quad n \geq 0, \quad (11)$$

которое будем называть дискретным вариантом логистического уравнения с запаздыванием. Уравнение (11), как и исходное уравнение с запаздыванием, имеет очевидный биологический смысл: величина $u_n > 0$ может интерпретироваться как численность очередного поколения моделируемой популяции, а величина k – как номер возрастной группы, начиная с которой особи популяции вовлекаются в процесс ее воспроизводства. Цель настоящей работы состоит в изучении динамических свойств уравнения (11).

Среди качественных характеристик итераций отображения (11) наиболее важным является положительность компонент решения (11). Для логистического уравнения с запаздыванием (1) выполнено свойство 2, гарантирующее положительность его решения при положительных начальных условиях. В случае же разностного уравнения (11) такое свойство выполнено не для всех значений параметров и начальных условий. В следующем пункте будут получены ограничения на значения параметра r и начальные условия, при которых итерации отображения (11) u_n остаются неотрицательными при всех натуральных n , т.е. сохраняется биологический смысл решения.

2. Область существования неотрицательного решения

Рассмотрим сначала логистическое уравнение без запаздывания

$$du / dt = r[1 - u]u \quad (12)$$

и его разностный аналог

$$u_{n+1} = [1 + rh(1 - u_n)]u_n, \quad n \geq 0. \quad (13)$$

Здесь h – шаг по времени. В (13) удобно сделать замену $w_n = u_n rh / (1 + rh)$, после которой (13) принимает вид стандартного логистического отображения

$$w_{n+1} = (1 + rh)(1 - w_n)w_n. \quad (14)$$

Это отображение при $0 < rh \leq 3$ действует из отрезка $[0,1]$ в отрезок $[0,1]$. При $rh > 3$ для почти всех начальных условий, за исключением множества меры ноль, итерации отображения (14), начиная с некоторого n , выходят за пределы этого отрезка. Положительные значения w_n сменяются отрицательными, тем самым, решение перестает быть биологически осмысленным. В то же время, если $0 < rh \leq 2$, то отображение (13), как и уравнение (12) имеет единственное устойчивое положительное состояние равновесия $u_n \equiv 1$. Это означает, что чем меньше h , тем в более широком промежутке значений r отображение (13) имеет близкие динамические свойства с уравнением

(12). В случае, когда $2 < r h \leq 3$, итерации отображения (13), в отличие от уравнения (12), могут иметь сложный колебательный характер. Отметим, что отображение (14) является одномерным и унимодальным. К нему применимы все результаты общей теории одномерных отображений [11–13].

Рассмотрим теперь области начальных условий разностного уравнения (11) и значений r , при которых его решение $u_n > 0$ для всех натуральных n . Перейдем от уравнения (11) к $(k + 1)$ -мерному отображению

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= F(w_n), \quad w_n = \text{colon}(w_0^{(n)}, w_1^{(n)}, \dots, w_k^{(n)}), \quad n = 1, 2, \dots, \\ F(w_n) &\equiv \text{colon}\left(w_1^{(n)}, w_2^{(n)}, \dots, w_k^{(n)}, (1 + r/k)(1 - w_0^{(n)})w_k^{(n)}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

Компоненты отображения (15) связаны с разностным уравнением (11) формулой $w_k^{(n)} = ru_n / (r + 1)$. В качестве начального условия в (15) служит вектор $w_1 = \text{colon}(w_0^{(1)}, w_1^{(1)}, \dots, w_k^{(1)})$. Как известно, в общей теории нелинейных отображений порядка выше, чем первого не существует. В связи с этим изучаются локальные свойства решений в окрестности какого-либо известного решения, либо предпринимаются попытки исследования некоторого класса отображений (см., например, [14, гл.5], [15–18] и многие другие).

Вначале оценим область положительности компонент решений для биологически естественного начального условия

$$w_1 = \text{colon}(0, \dots, 0, w). \quad (16)$$

На рис.1 (для $k = 1$) и рис.2 (для $k = 5$) представлены результаты вычислений итераций отображения (15). Для каждой точки плоскости rOw вычислялось не более 10000 итераций до тех пор, пока какая-либо из итераций не становилась отрицательной, в этом случае соответствующая точка не окрашивалась, а в случае, если для всех итераций $n = 1, \dots, 10000$ компоненты вектора w_n оставались положительными, ставилась черная точка. На соответствующих рисунках изображены значения, близкие к граничным для параметра r . Граница области, где компоненты w_n положительны, имеет сложную структуру, чтобы это проиллюстрировать на рис.1b и 2b дополнительно приведены фрагменты рис.1a и рис.2a.

Для того чтобы убедиться, что при начальных условиях, отличных от (16), поведение итераций отображения не претерпевает существенных изменений, были выполнены расчеты при начальном условии

$$w_1 = \text{colon}(w, 0.2), \quad (17)$$

аналогичные расчетам при условии (16).

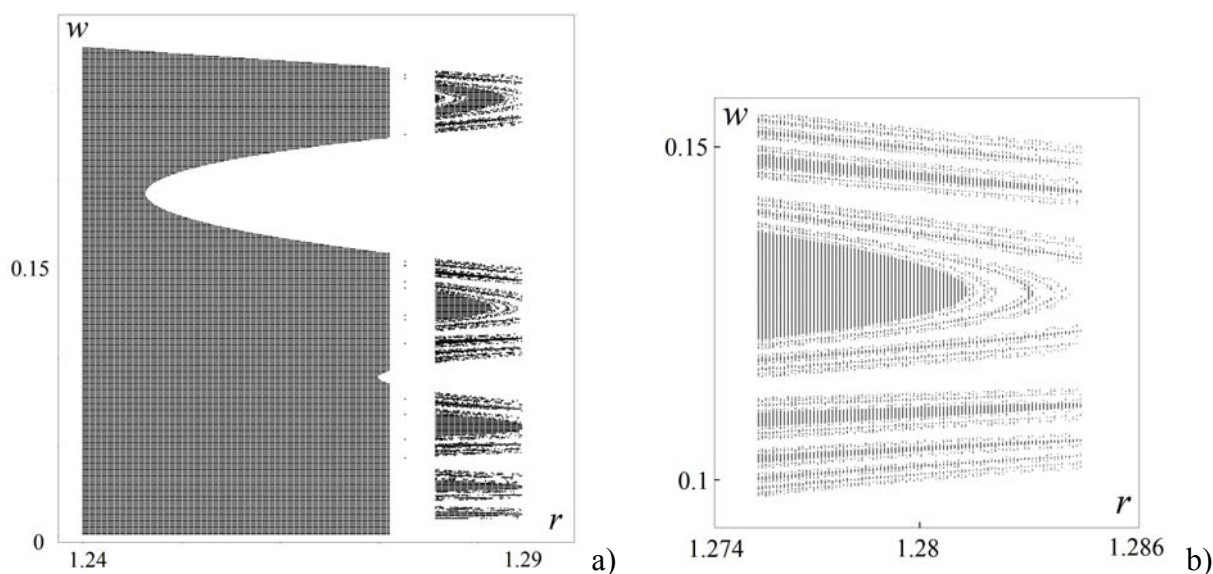


Рис.1. Начальные условия, соответствующие положительным решениям, при $k=1$ и
 а) $1.24 \leq r \leq 1.29$, $0 \leq w \leq 0.3$; б) $1.274 \leq r \leq 1.286$, $0.08 \leq w \leq 0.16$.

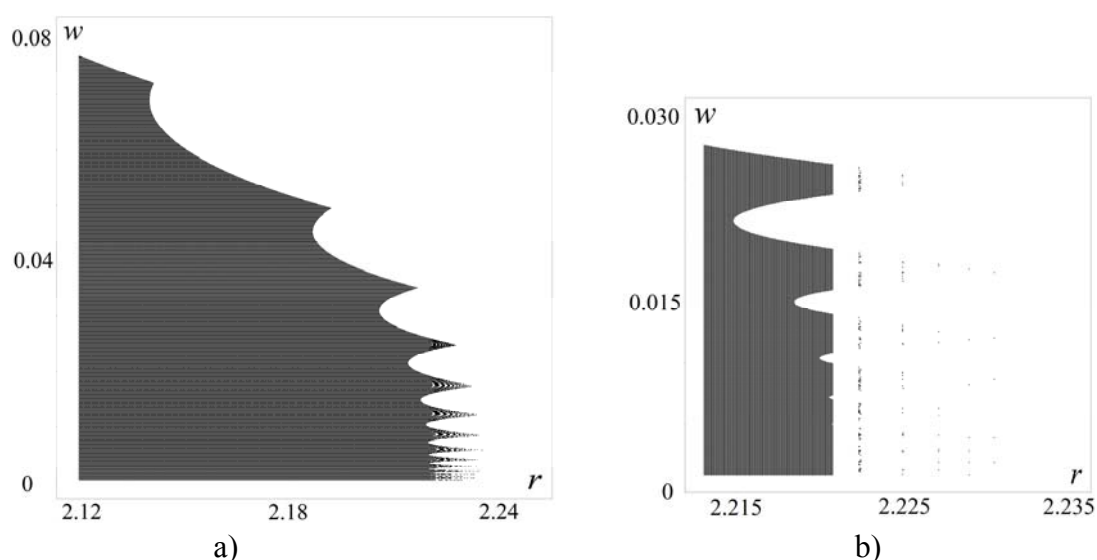


Рис.2. Начальные условия, соответствующие положительным решениям, при $k=5$ и
 а) $2.12 \leq r \leq 2.24$, $0 \leq w \leq 0.08$; б) $2.215 \leq r \leq 2.235$, $0 \leq w \leq 0.03$.

На рис.3,4, как и ранее, закрашивались области, итерации точек из которых остаются положительными, эти точки также образуют область значений r и w со сложной геометрической структурой.

Следует отметить, что случай $k = 5$ не имеет принципиальных отличий в структуре области с биологически осмысленными решениями по сравнению с $k = 1$. Рассмотрим более подробно случай $k = 1$. Отображение (15) оказывается при этом двумерным и его удобно записать в виде

$$w_{n+1} = v_n, \quad v_{n+1} = (1+r)(1-w_n)v_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

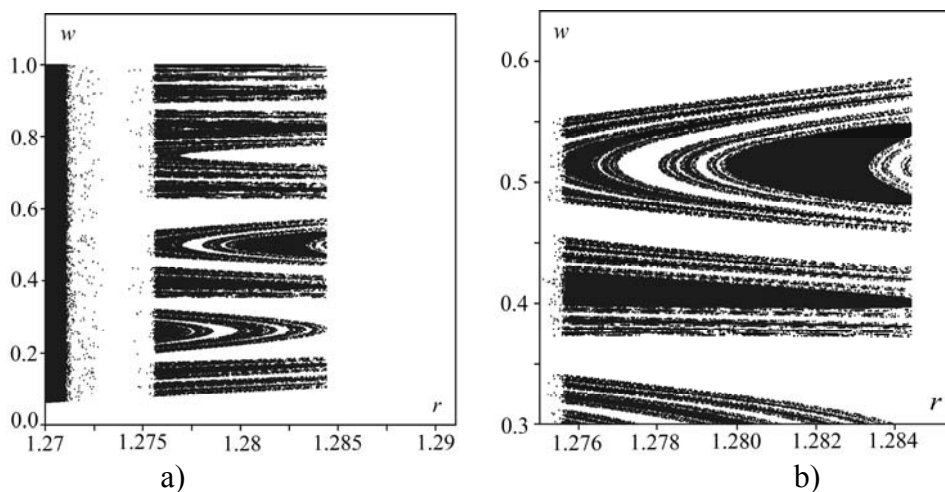


Рис.3. Начальные условия $\text{colon}(w,0.2)$, соответствующие положительным решениям, при а) $1.27 \leq r \leq 1.29$, $0 \leq w \leq 1$; б) $1.275 \leq r \leq 1.285$, $0.3 \leq w \leq 0.6$.

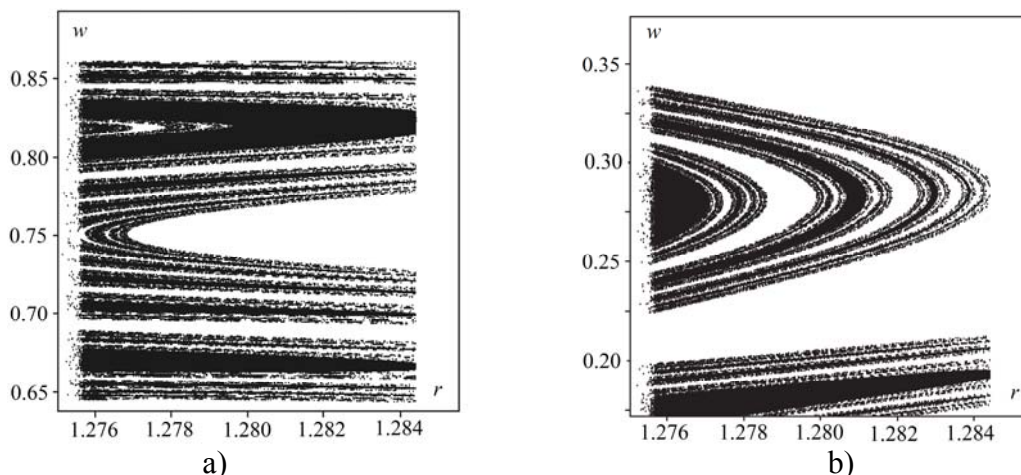


Рис. 4. Начальные условия $\text{colon}(w,0.2)$, соответствующие положительным решениям, при а) $1.275 \leq r \leq 1.285$, $0.65 \leq w \leq 0.85$; б) $1.275 \leq r \leq 1.285$, $0.175 \leq w \leq 0.35$.

Его областью определения естественно рассматривать квадрат $[0,1] \times [0,1]$, поскольку выход из этой области приводит к решениям с отрицательными компонентами. Под действием отображения (18) квадрат $[0,1] \times [0,1]$ переходит в треугольник

$$T = \{(w, v) | 0 \leq v \leq (r+1)w, w \leq 1\} \quad (19)$$

с вершинами: $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1+r)$ (см. рис.5а). Рассмотрим его часть

$$T_* = \{(w, v) | 1 < v \leq (r+1)w, w \leq 1\}, \quad (20)$$

выходящую за пределы фазового квадрата. Обозначим

$$\begin{aligned} L_1 = \{(w, v) | v = 1, (r+1)^{-1} \leq w \leq 1\}, \quad L_2 = \{(w, v) | w = 1, 1 \leq v \leq r+1\}, \\ L_3 = \{(w, v) | v = (r+1)w, (r+1)^{-1} \leq w \leq 1\} \end{aligned} \quad (21)$$

стороны треугольника T_* . Вертикальная граница L_2 треугольника T_* отображается за две, а горизонтальная L_1 – за три итерации в точку ноль. Внутренние точки области T_* и граница L_3 за две итерации отображения (18) переводятся во множество, компонента v которого отрицательна.

Таким образом, все прообразы множества T_* не принадлежат области положительной определенности компонент отображения (18). Для вычисления этих прообразов будем в соответствии с (18) пользоваться формулами

$$w_n = 1 - (1+r)^{-1} v_{n+1} (w_{n+1})^{-1}, \quad v_n = w_{n+1}. \quad (22)$$

Первым прообразом треугольника T_* является область, ограниченная отрезками $L_2^{-1} = \{(w, v) | v=1, 0 \leq w \leq r(r+1)^{-1}\}$ и $L_3^{-1} = \{(w, v) | w=0, (r+1) \leq v \leq 1\}$, в которые под действием отображения (22) переходят отрезки L_2 и L_3 , а также участком гиперболы $L_1^{-1} = \{(w, v) | w = 1 - (1+r)^{-1} v^{-1}, (1+r)^{-1} \leq v \leq 1\}$, в который переходит отрезок L_1 . Тем самым, первый прообраз T_* при всех $r > 0$ отсекает у квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ левый верхний угол (см. рис.5b).

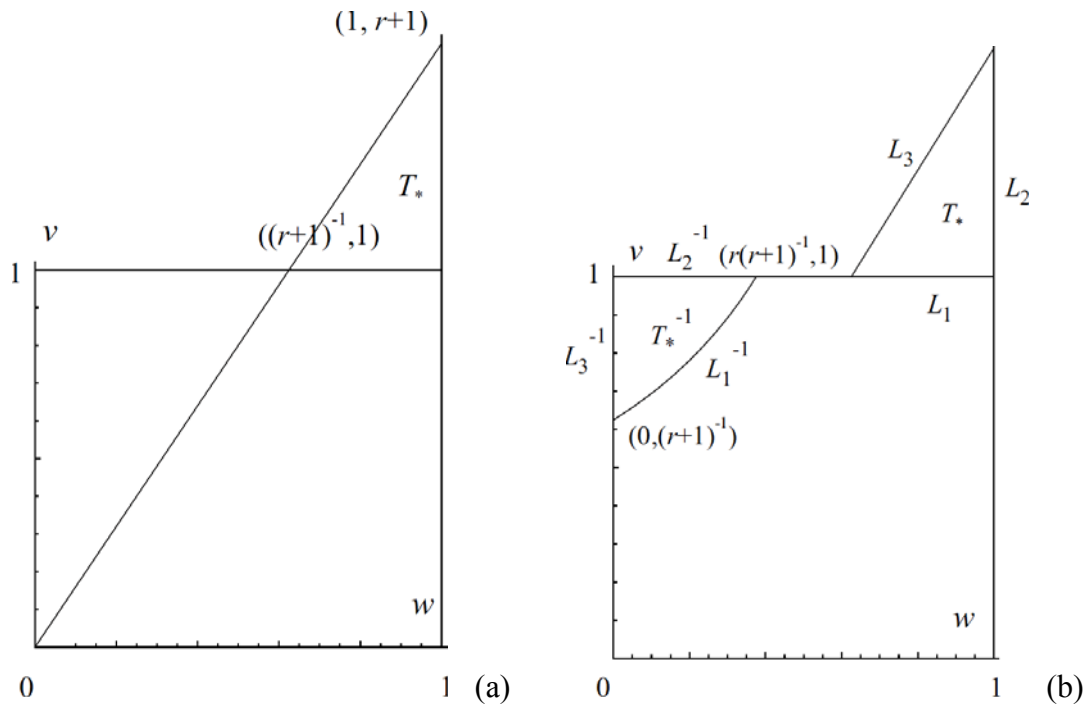


Рис.5. Множество точек T (a) и его первый прообраз T_* (b).

На рис.6а изображены 11 прообразов T_* при $r = 1.273$ (номера прообразов обозначены соответствующими числами). Рассмотрим теперь второй прообраз T_* . Прообраз кривой L_1^{-1} записывается в виде

$$L_1^{-2} = \{(w, v) | v = 1 - (1+r)^{-1} a^{-1}, w = 1 - a^2 (a(r+1) - 1)^{-1}, (1+r)^{-1} \leq a \leq 1\}.$$

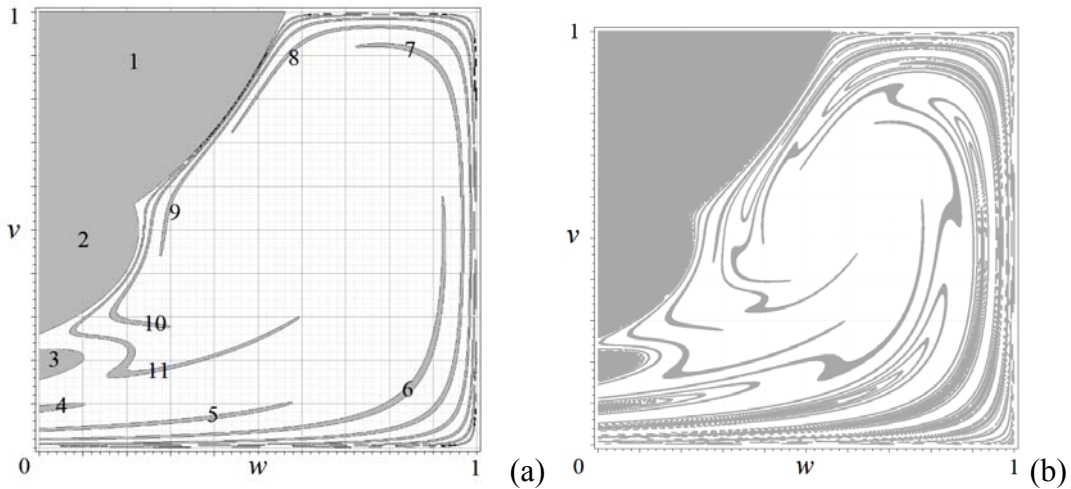


Рис.6. Множество точек, уходящих за пределы фазового квадрата за а) $m = 11$ итераций; б) $m=18$ итераций при $r = 1.273$.

Кривая L_1^{-2} вместе с кривой L_1^{-1} ограничивают в фазовом квадрате область второго прообраза. При $v = 0.5$ на кривой Γ_2 реализуется максимум по w , который равен $w = ((r+1)^2 - 4)((r+1)^2 - 2)^{-1}$. Эта величина отрицательна при $0 < r < 1$ и для таких значений r второй прообраз T_* не содержит точек в области $[0,1] \times [0,1]$. Отсюда следует, что все точки квадрата, за исключением первого прообраза T_* , инвариантны относительно отображения (18) при условии $0 < r < 1$. Кривая

$$L_1^{-3} = \{(w, v) \mid v = 1 - (1+r)^{-1}v^{-1}, \quad w = 1 + (ar + a - 1)^2 \times \\ \times (a(r+1)(a^2 - a(r+1)^2 + r + 1))^{-1}, \quad (1+r)^{-1} \leq a \leq 1\}$$

вместе с кривой L_1^{-2} и осью ординат ограничивает в фазовом квадрате область третьего прообраза T_* . Как и для кривой L_1^{-2} , в данном случае удастся найти такое $r_2 \approx 1.246281$, что для $1 < r < r_2$ кривая L_1^{-3} лежит вне фазового квадрата. Тем самым, фазовый квадрат без первого и второго прообразов T_* оказывается множеством, инвариантным для отображения (18). Далее при увеличении r ситуация повторяется и для четвертого прообраза T_* имеем $r_3 \approx 1.269826$, а для пятого – $r_4 \approx 1.270988$. Нетрудно численно оценить предельную точку для появления внутри фазового квадрата счетного числа прообразов $r_\infty \approx 1.27101201$. При увеличении $r > r_\infty$ прообразы T_* заполняют фазовый квадрат. На рис.6б при $r = 1.273$ (отличается от r_∞ на 0.002) серым закрашена область, точки которой уходят из фазового квадрата за 18 итераций. Видно, что эти точки заполняют значительную его часть. В процессе численного анализа, проведенного при тех же значениях параметров, выяснилось, что с точностью до разбиения (фазовый квадрат делился на

2000×2000 точек) все точки фазового квадрата его покидают. Вместе с тем, при $r > r_\infty$ имеется еще промежуток значений r , для которых в фазовом квадрате отображения (18) удастся найти область точек, не уходящих из него. Отметим, что наличие такого промежутка следует уже из рис.1, на котором видно, что при $r > r_\infty$ имеются такие значения r , что для некоторых начальных условий вида (16) итерации отображения (18) остаются в фазовом квадрате.

На основании численного счета показано, что для $1.27569 < r < 1.28441$ область точек, инвариантная относительно отображения (18), имеет сложный, масштабно инвариантный характер. На рисунках 7а,8а изображены эти области для значений $r=1.2774$ и $r=1.2781$ соответственно (точки, уходящие из фазового квадрата окрашены, а остающиеся в нем – нет). Сложность структуры этих множеств иллюстрируется фрагментами соответствующих областей (см.рис.7б,8б).

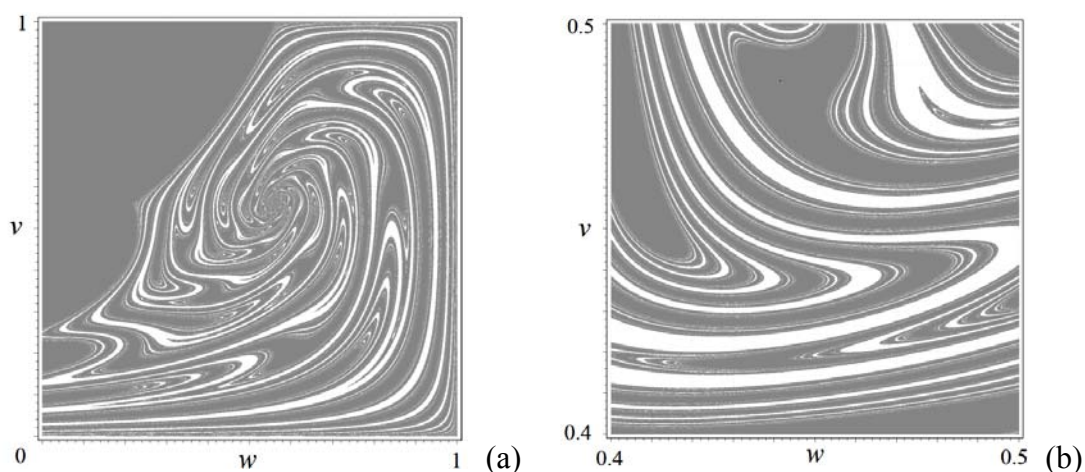


Рис.7. а) множество точек фазового квадрата, инвариантное относительно отображения (18) при $r=1.2774$; б) фрагмент $[0.4,0.5] \times [0.4,0.5]$ фазового квадрата.

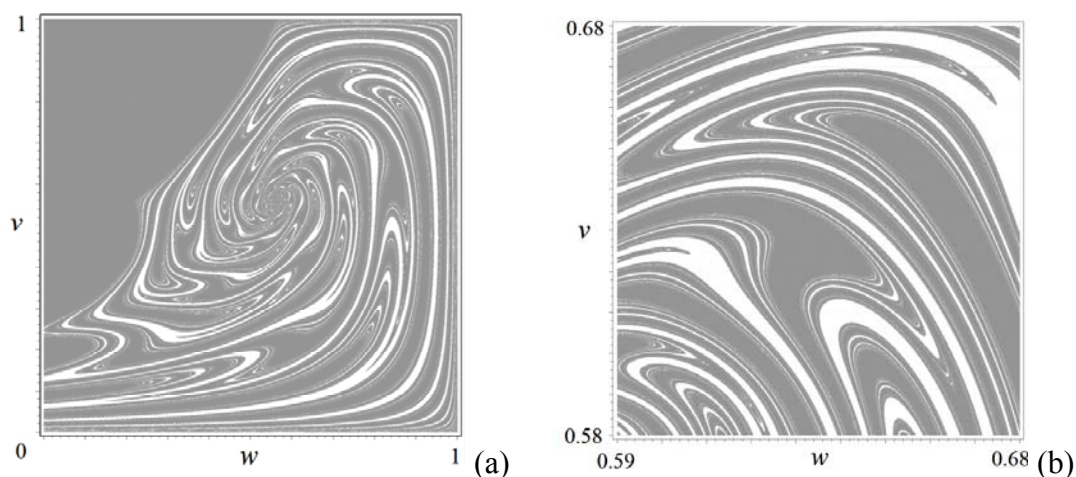


Рис. 8. а) множество точек фазового квадрата, инвариантное относительно отображения (18) при $r=1.2781$; б) фрагмент $[0.59,0.68] \times [0.58,0.68]$ фазового квадрата.

3. Локальные свойства дискретного аналога логистического уравнения. Бифуркация Андронова-Хопфа

Рассмотрим локальные свойства модели (11). Отметим, что разностное уравнение (11), как и уравнение (1), имеет состояние равновесия $u_n \equiv 1$, за устойчивость которого отвечает расположение корней полинома

$$P(\lambda) = \lambda^{k+1} - \lambda^k + r/k. \quad (23)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. 1. Пусть выполнено неравенство

$$0 < r < r_*, \quad \text{где } r_* = 2k \sin(\pi / (2(2k + 1))), \quad (24)$$

тогда все корни многочлена (23) лежат в круге $S = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| < 1\}$, а при $r = r_*$ уравнение $P(\lambda) = 0$ имеет простую пару корней

$$\lambda = \exp(\pm i\omega_0), \quad \omega_0 = \pi / (2k + 1), \quad (25)$$

а все остальные его корни по-прежнему находятся в S .

2. Корни (25) удовлетворяют требованиям отсутствия главных резонансов $\exp(it\omega_0) \neq 1$, $t = 1, 2, 3, 4$.

3. Выполняется неравенство

$$\frac{d}{d\varepsilon} \lambda(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} > 0, \quad (26)$$

где $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ – корень полинома (23), существующий при $r = r_* + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$ и обращающийся в $\exp(\pm i\omega_0)$ при $\varepsilon = 0$.

4. Пусть выполнено неравенство

$$0 < r < r_{**}, \quad \text{где } r_{**} = (k / (k + 1))^{k+1}, \quad (27)$$

тогда полином $P(\lambda)$ имеет вещественные корни.

Доказательство. Многочлен (23) при $r = 0$ имеет корень $\lambda = 0$ кратности k и простой корень $\lambda = 1$. Обозначим через $\lambda(r)$ корень этого многочлена, обращающийся в единицу при $r = 0$ и будем считать, что $0 < r \ll 1$. Нетрудно видеть, что $\lambda'(0) = -1/k < 0$. А это значит, что при малых r все корни уравнения $P(\lambda) = 0$ заведомо лежат в S . Простой анализ функции (23) показывает, что она имеет при $0 < r < r_{**}$ и четном k три вещественных корня, а при нечетном k – два. Если же $r > r_{**}$, то при четном k вещественный корень один, а при нечетном k таких корней нет. Для определения критического значения $r = r_{**}$ необходимо, чтобы наряду с равенством $P(\lambda) = 0$,

выполнялось равенство $P'(\lambda) = 0$. Данные два равенства позволяют найти $r_{**} = (k / (k+1))^{k+1}$ и соответствующий ему кратный корень $\lambda = k / (k+1)$. Появляющийся при четном k простой отрицательный корень остается по модулю меньшим единицы при всех $0 < r < 2k$.

Для того чтобы выявить характер поведения комплексных корней полинома (23) при увеличении параметра r , подставим в уравнение $P(\lambda) = 0$ соотношение $\lambda = \exp(\pm i\omega)$, $\omega > 0$, умножим результат на $\exp[-i(k+1/2)\omega]$ и в получившемся выражении разделим вещественную и мнимую части. В результате приходим к равенствам

$$\cos(k+1/2)\omega = 0, \quad r \sin(k+1/2)\omega = 2k \sin \omega / 2. \quad (28)$$

Нетрудно заметить, что допустимые частоты ω , определяющиеся из (28), задаются формулами

$$\omega_n = \pi / (2k+1) + 2n\pi / (2k+1), \quad n = 0, 1, \dots, 2k-1. \quad (29)$$

Подчеркнем, что рассматривать в (29) натуральные n , большие $2k-1$, не имеет смысла, так как $\omega_{2k} = 2\pi - \omega_0$, $\omega_{2k+1} = 2\pi + \omega_0$ и т.д. Кроме того, поскольку $\omega_n < 2\pi \forall n \leq 2k-1$, то в случае нечетного n (в силу того, что $\sin(k+1/2)\omega_n = -1$, $\sin(\omega_n / 2) > 0$) выполнение второго равенства из (28) невозможно. Таким образом, на самом деле из всей совокупности (29) рассматривать следует только частоты ω_{2s} , $s = 0, 1, \dots, k-1$. Полученные формулы позволяют определить наименьшее значение $r_* > 0$ параметра r , при котором пара комплексных корней $\lambda, \bar{\lambda}$ многочлена (23) первый раз выходит на единичную окружность

$$r_* = \min_{0 \leq s \leq k-1} 2k \sin(\omega_{2s} / 2). \quad (30)$$

Минимум в (30) достигается только при $s = 0$, из чего следует, что для r_* справедлива формула (24), причем при $r = r_*$ полином (23) имеет на единичной окружности одну простую пару корней (25). Отметим, что свойство нерезонансности полученных корней, очевидно, следует из этих же формул.

Для обоснования неравенства (26) обратимся к соответствующей формуле

$$\frac{d}{d\varepsilon} \lambda(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{k} \operatorname{Re} \left(\frac{\exp(-ik\omega_0)}{(k+1)\exp(-ik\omega_0) - k} \right) \quad (31)$$

и заметим, что знак правой части из (31) совпадает со знаком выражения $(2k+1)\cos(k\omega_0)$, которое в силу очевидного свойства $k\omega_0 < \pi/2$ является положительным. Лемма 1 доказана.

Сделаем одно замечание относительно многочлена (23). При стремлении k к бесконечности в пределе получаются равенства

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_*(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2k \sin\left(\frac{\pi}{2(2k+1)}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} r_{**}(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{(k+1)}\right)^{k+1} = e^{-1}, \quad (32)$$

показывающие близость свойств устойчивости многочлена (23) и квазимногочлена (3).

Учитывая доказанную в лемме нерезонансность корней (25), при

$$r = r_* + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (33)$$

мы находимся в рамках применимости известной бифуркационной теоремы Андронова-Хопфа для отображений [19,20]. У данной бифуркации существуют и другие общепринятые названия: бифуркация рождения тора, бифуркация Неймарка-Сакера и даже бифуркация Андронова-Хопфа-Неймарка-Сакера. С бифуркацией Андронова-Хопфа для потоков эту бифуркацию роднит то, что в случае двумерных отображений она связана с рождением замкнутой инвариантной кривой из неподвижной точки (дискретный аналог предельного цикла). Следует отметить, что это соответствие довольно условное, поскольку в такой бифуркации важную роль играют резонансы. В случаях, когда эти резонансы слабые $\exp(im\omega_0) = 1$, $m > 4$ или эта величина иррациональна, то аналогия достаточно полная: здесь, как и в случае потоков, из неподвижной точки рождается единственная замкнутая инвариантная кривая. В случае же так называемых главных резонансов $\exp(im\omega_0) = 1$, $m = 1, 2, 3, 4$, бифуркации совсем другие, см., например, [20-22]. Бифуркация Андронова-Хопфа для отображений была впервые исследована в работе Ю.И. Неймарка [23], который, однако, не рассмотрел случай сильных резонансов. Впоследствии этот пробел был устранен Р. Сакером [24,25]. Способы исследования такой бифуркации хорошо известны и изложены в целом ряде монографий и учебных пособий (см., например, [26]). Ниже изложим несколько иной способ нахождения асимптотики бифурцирующих из состояния равновесия решений на основе построения нормальной формы с непрерывным медленным временем [27,28].

Для того чтобы выяснить характер потери устойчивости единичного состояния равновесия уравнения (11) при условии (33) рассмотрим $(k+1)$ -мерное отображение

$$u = (u_0, u_1, \dots, u_k) \rightarrow (\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k), \quad (34)$$

$$\bar{u}_s = u_{s+1}, \quad s = 0, \dots, k-1, \quad \bar{u}_k = \left[1 + \frac{r_* + \varepsilon}{k} (1 - u_0) \right] u_k.$$

Из линейного анализа следует, что, как и для уравнения с запаздыванием (1) (см. свойство 8), в некоторой достаточно малой окрестности состояния равновесия $y_0 = \dots = y_k = 1$ это отображение имеет экспоненциально устойчивое двумерное инвариантное многообразие. После перемещения этого состояния равновесия в начало координат и последующего перехода к подходящим криволинейным полярным координатам отображение (34) записывается в виде

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= (1 + \varepsilon\alpha_1)\xi + d_1\xi^3 + O(\varepsilon^2\xi + \varepsilon\xi^2 + \xi^4), \\ \bar{\varphi} &= \varphi + \omega_0 + \varepsilon\alpha_2 + d_2\xi^2 + O(\varepsilon^2 + \varepsilon\xi + \xi^3),\end{aligned}\quad (35)$$

где $\alpha_j, d_j \quad j=1,2$ – некоторые вещественные постоянные.

После замены $\xi = \sqrt{\varepsilon}\rho$ отображение (35) приобретает вид

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= \rho + \varepsilon(\alpha_1\rho + d_1\rho^3) + O(\varepsilon^{3/2}), \\ \bar{\varphi} &= \varphi + \omega_0 + \varepsilon(\alpha_2 + d_2\rho^2) + O(\varepsilon^{3/2}).\end{aligned}\quad (36)$$

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d\rho/dt = \rho + \varepsilon(\alpha_1\rho + d_1\rho^3), \quad d\varphi/dt = \varphi + \omega_0 + \varepsilon(\alpha_2 + d_2\rho^2), \quad (37)$$

тогда отображение сдвига по ее траекториям за время $t = 1$ с точностью до величин порядка $\varepsilon^{3/2}$ совпадает с (36), а сама система (37) после замен $\varphi = \psi + \omega_0 t, \quad w = \rho \exp(i\psi), \quad \tau = \varepsilon t$ принимает вид

$$dw/dt = \alpha w + d|w|^2 w, \quad (38)$$

где $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad d = d_1 + id_2$.

Для вычисления коэффициентов α, d рассмотрим вытекающее из (11) разностное уравнение с непрерывным временем (см. аналогичные вычисления в [28])

$$u(t+1) = u(t) \left[\frac{r_* + \varepsilon}{k} (1 - u(t-k)) \right], \quad t \in \mathbb{R}, \quad (39)$$

формальное решение которого будем искать в виде ряда

$$u = 1 + \sqrt{\varepsilon}h_0(t, \tau) + \varepsilon h_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2}h_2(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (40)$$

Здесь

$$h_0(t, \tau) = w(\tau) \exp(i\omega_0 t) + \bar{w}(\tau) \exp(-i\omega_0 t), \quad (41)$$

$w(\tau)$ – медленно меняющаяся комплексная амплитуда, которая будет опре-

делена на третьем шаге алгоритма, а $h_1(t, \tau)$, $h_2(t, \tau)$ – некоторые тригонометрические полиномы аргумента $\omega_0 t$ с зависящими от τ коэффициентами.

После подстановки соотношений (33), (40) в (39) и приравнивания коэффициентов при $\sqrt{\varepsilon}$, ε и $\varepsilon^{3/2}$ приходим к серии линейных неоднородных разностных уравнений вида

$$L(h_0) = 0, \quad L(h_j) = f_j(t, \tau), \quad j = 1, 2, \quad (42)$$

где $L(h) \equiv h(t+1, \tau) - h(t, \tau) + (r_*/k)h(t-k, \tau)$, а переменная τ рассматривается как параметр. В силу (41) и очевидных соотношений $L(\exp(\pm i\omega_0 t)) = 0$ первое уравнение из (42) представляет собой верное равенство. Во втором из этих уравнений неоднородность f_1 , имеющая вид

$$f_1 = \frac{r_*^2}{2k^2} h_0^2(t-k, \tau) - \frac{r_*}{k} h_0(t, \tau) h_0(t-k, \tau), \quad (43)$$

является линейной комбинацией гармоник $\exp(\pm 2i\omega_0 t)$, что позволяет получить для h_1 следующую формулу:

$$h_0(t, \tau) = Aw^2(\tau) \exp(2i\omega_0 t) + \bar{A} \bar{w}^2(\tau) \exp(-2i\omega_0 t), \quad (44)$$

в которой

$$A = (\exp(i\omega_0) + 1)(\exp(i\omega_0) + 1 - \exp(ik\omega_0))^{-1} / 2. \quad (45)$$

Приравнивание коэффициентов при $\varepsilon^{3/2}$ дает

$$\begin{aligned} f_2 = & \left[(r_* \exp(-ik\omega_0) - \exp(i\omega_0)) \frac{dw}{d\tau} - \frac{1}{k} w(\tau) \exp(-ik\omega_0) \right] \exp(i\omega_0 t) + \text{к.с.} + \\ & + \frac{r_*^2}{k^2} h_0(t-k, \tau) h_1(t-k, \tau) + \frac{r_*}{k} (h_0(t, \tau) h_1(t-k, \tau) + h_1(t, \tau) h_0(t-k, \tau)) + \\ & + \frac{r_*^2}{2k^2} h_0(t, \tau) h_0^2(t-k, \tau) + \frac{r_*^3}{6k^3} h_0^3(t-k, \tau), \end{aligned}$$

где под к.с. подразумевается комплексно сопряженное выражение. Преобразуя неоднородность f_2 , приходим к формуле

$$f_2 = f_{2,1}(\tau) \exp(i\omega_0 t) + f_{2,3}(\tau) \exp(3i\omega_0 t) + \text{к.с.}, \quad (46)$$

из которой получаем, что необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения для h_2 в классе тригонометрических полиномов является отсутствие в (46) первых гармоник, т.е. равенство

$$f_{2,1}(\tau) \equiv 0. \quad (47)$$

Для выполнения данного равенства воспользуемся еще не определенной комплексной амплитудой $w(\tau)$ (41). Выполняя соответствующие вычисления, убеждаемся, что из (47) для $w(\tau)$ получается дифференциальное уравнение (38), в котором

$$\alpha = -\frac{1}{k} \frac{\exp(-ik\omega_0)}{(k+1)\exp(-i\omega_0) - k}, \quad (48)$$

$$d = -\frac{(1 + \exp(i\omega_0) - 2\exp(-ik\omega_0))(\exp(i\omega_0) - 1)}{2(1 + \exp(i\omega_0) - \exp(-ik\omega_0))((k+1)\exp(i\omega_0) - k)}.$$

Сделаем одно замечание. Выше вместо разностного уравнения (11) использовалось соответствующее уравнение с непрерывным временем (39) и был приведен формализм построения асимптотического разложения для решения специального вида. С точки зрения теории нормальных форм ситуация является достаточно сложной. Дело в том, что характеристический многочлен (23) для линеаризованного (на положительном состоянии равновесия) уравнения с непрерывным временем имеет при $r = r_*$ не одну пару корней на единичной окружности $\lambda_{\pm} = \exp(\pm i\omega_0)$, а бесконечно много пар корней $\lambda_{n\pm} = \exp(i2\pi n \pm i\omega_0)$ $n = 1, 2, \dots$. Поэтому критический случай в задаче об устойчивости состояния равновесия имеет бесконечную размерность. Такой критический случай был исследован в [29]. На основе анализа из [29] получаем, конечно, тот же результат для нахождения коэффициентов α и d .

Непосредственный анализ коэффициентов (48) позволяет обосновать следующее утверждение:

Лемма 2. *Выполнены неравенства*

$$\alpha_1 = \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad d_1 = \operatorname{Re} d < 0. \quad (49)$$

Неравенства (49) гарантируют существование у уравнения (38) экспоненциально орбитально устойчивого цикла

$$w = \xi_* \exp(i\alpha_* \tau), \quad \xi_* = \sqrt{-\alpha_1 / d_1}, \quad \alpha_* = \alpha_2 + d_2 \xi_*^2.$$

Согласно результатам из [19,20] в исходном разностном уравнении (11) данному циклу отвечает экспоненциально устойчивая замкнутая инвариантная кривая диаметра порядка $\sqrt{\varepsilon}$, бифурцирующая из единичного состояния равновесия при $r = r_* + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$.

4. Нелокальные устойчивые решения дискретного аналога логистического уравнения

В этой части работы численными методами изучаются динамические свойства решений разностного уравнения (11), а точнее эквивалентного ему отображения (15). В первую очередь рассмотрим простейший случай $k = 1$, когда отображение (15) сводится к двумерному (18). В соответствии с результатами предыдущего раздела, при $0 < r < r_*$ у отображения (18) имеется единственная устойчивая неподвижная точка $w^{(n)} = v^{(n)} = r/(1+r)$, которая соответствует единичному состоянию равновесия уравнения (11). В данном случае в соответствии с (24) $r_* = 1$. При значениях параметра r , близких к критическому значению $r = 1$, от ненулевого состояния равновесия отображения (18) ответвляется экспоненциально устойчивая замкнутая инвариантная кривая диаметра порядка $\sqrt{r-1}$, которая всюду плотно заполняется точками итераций отображения (18). Как и в случае уравнения с непрерывным временем (1), при увеличении параметра r эта кривая довольно быстро теряет гармоническую форму. На рис.9 инвариантная устойчивая кривая представлена при $r = 1.1$ (рис.9а) и $r = 1.17$ (рис.9б).

Нетрудно видеть, что, если в первом случае инвариантная кривая представляет собой немного деформированный эллипс, то во втором случае деформации уже существенные.

Важной особенностью отображения (18) является то, что имея схожие квадратичные правые части, например, с отображением Эно [15,16], оно при всех значениях r , для которых ее решения ограничены, имеет устойчивую инвариантную кривую (рис.9-11). Численный анализ показал, что для области фазового квадрата, инвариантной относительно отображения (18), эта кривая является притягивающей и итерации отображения асимптотически к ней приближаются. Вычисления итераций отображения (18) выполнялись, естественно, лишь для тех значений r , при которых инвариантная область не пуста. Используя результаты пункта 2, имеем два промежутка значений $1 < r < r_\infty \approx 1.27101$ и $1.27569 < r < 1.28441$, при которых отображение обладает таким свойством.

Для отображений с квадратичной нелинейностью типа Эно характерно сложное хаотическое поведение траекторий [15–17]. В данном случае ситуация иная. Все фазовые перестройки динамической системы (18) оказываются связаны с ее поведением на инвариантной кривой, причем динамика на этой кривой может быть как регулярной, так и хаотической. В рамках регулярной динамики отображение может иметь устойчивые циклы и двух-

частотные колебания. В частности, при $1 < r < 1.1764$ имеем двухчастотные колебания на инвариантной кривой, а при $1.1764 < r < 1.22765$ им на смену приходят циклы различных периодов. Каскад бифуркаций удвоения приводит к появлению при $r \approx 1.22765$ хаотического аттрактора типа цикла интервалов (о циклах интервалов см. книгу [18] и библиографию в ней). На рис.10а представлен цикл интервалов при $r = 1.228$. Характерной особенностью хаотического аттрактора такого типа является то, что точки траектории последовательно обходят интервалы, принадлежащие аттрактору, а старший ляпуновский показатель, вычисленный вдоль траектории, положителен. Вычисления показали, что в этом случае $\lambda_{max} \approx 0.0251$ (вычисления выполнялись на основе метода динамической перенормировки, см. [30]). Увеличение параметра r приводит к потере устойчивости цикла интервалов и появлению устойчивых циклов. На промежутке $1.2277 < r < 1.242$ аттрактором отображения (18) являются циклы различных периодов. При $r \approx 1.242$ снова происходит переход к циклу интервалов. На рис.10б представлен аттрактор отображения при $r = 1.243$, по сравнению с циклом интервалов из предыдущего промежутка у него меньшее количество интервалов, что же касается старшего ляпуновского показателя, то он оказался больше, чем в предыдущем случае $\lambda_{max} \approx 0.04324$.

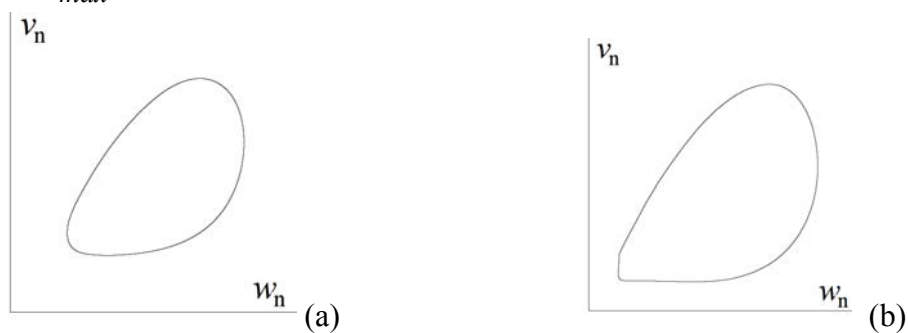


Рис.9. а) $r = 1.1$, б) $r = 1.17$.

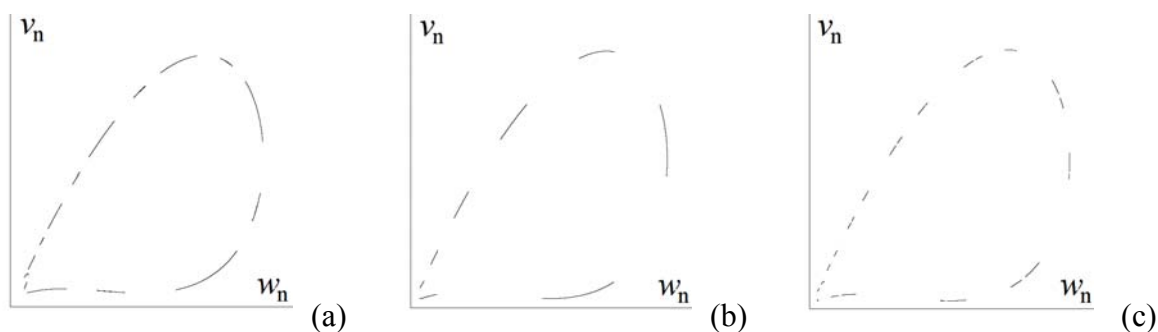


Рис.10. а) $r = 1.228$, б) $r = 1.243$, в) $r = 1.247$.

Дальнейшее увеличение параметра r приводит вероятно к счетному числу переходов от циклов интервалов с хаотической динамикой к обычным устойчивым циклам различных периодов. На рис.10с,11 представлены неко-

торые из них. Среди приведенных рисунков выделим рис.11b, на котором инвариантная кривая заполнена точками траекторий без пробелов. Вычисление старшего ляпуновского показателя, который в этом случае равен $\lambda_{max} \approx 0.1819$, показывает хаотичность поведения траекторий на этой кривой.

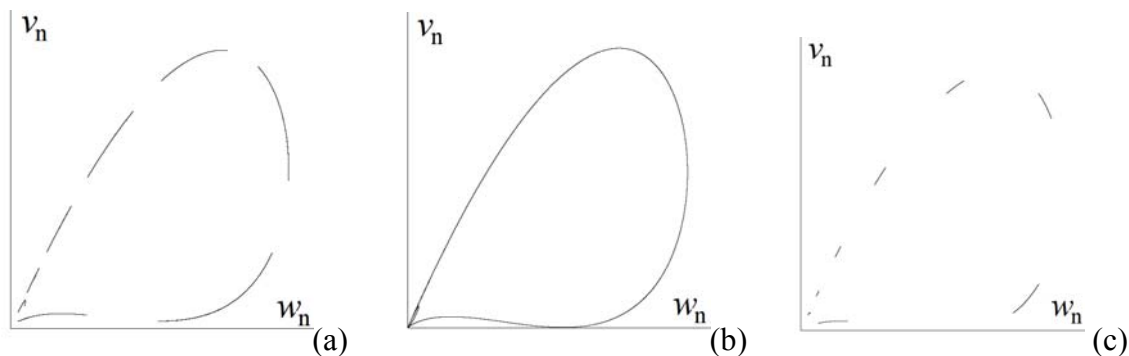


Рис.11. а) $r = 1.25$, б) $r = 1.27$, в) $r = 1.277$.

5. Некоторые другие дискретные модели

В этом разделе рассмотрим ряд других дискретных аналогов уравнения (1). Переход от уравнения (1) к разностному уравнению можно выполнить несколькими различными способами. В первую очередь остановимся на моделях, получающихся в результате замены производной по времени на разделенную разность. Фиксируем произвольно натуральное k и будем считать, что шаг по времени равен $1/k$. Тогда простейшими способами выбора разделенной разности являются разность «вперед» $\frac{u(t+1/k) - u(t)}{1/k}$, «назад» $\frac{u(t) - u(t-1/k)}{1/k}$ и «центральная» разность $\frac{u(t+1/k) - u(t-1/k)}{2/k}$. Случай разности «вперед» нами уже рассмотрен выше. В случае «центральной» разности также получаем разностное уравнение порядка $k+1$

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2rk^{-1}(1 - u_{n-k})u_n, \quad n \geq 0, \quad (50)$$

а для разности «назад» имеем неявную схему вида

$$u_n = u_{n-1} + rk^{-1}(1 - u_{n-k})u_n, \quad n \geq 0,$$

которая после элементарных преобразований приводится к разностному уравнению порядка k

$$u_{n+1} = \frac{u_{n-1}}{1 - rk^{-1}(1 - u_{n-k})}, \quad n \geq 0. \quad (51)$$

Для вывода дискретного аналога уравнения (1) также можно воспользоваться тем, что любое его решение $u(t) > 0$ удовлетворяет интегральному соотношению

$$u(t + 1/k) = u(t) \exp \left[r \left(\frac{1}{k} - \int_{t-1}^{t-1+1/k} u(\tau) d\tau \right) \right]. \quad (52)$$

Если, как и ранее, считать, что $t = n/k$, $n \in \mathbb{Z}$, $u_n = u(n/k)$, а фигурирующий в правой части (52) интеграл аппроксимировать по формуле прямоугольников, то получим разностное уравнение порядка $k + 1$ вида

$$u_{n+1} = u_n \exp \left[rk^{-1}(1 - u_{n-k}) \right], \quad n \geq 0. \quad (53)$$

Уравнения (50), (51), (53), так же, как и (11), будем называть дискретными вариантами логистического уравнения с запаздыванием. Этим уравнениям, как и уравнению (11), может быть придан биологический смысл: величина $u_n > 0$ может интерпретироваться как численность очередного поколения популяции, а величина k – как номер возрастной группы, начиная с которой особи популяции вовлекаются в процесс ее воспроизводства.

Перейдем к описанию специфики построенных разностных уравнений. Начнем с вопроса об устойчивости состояния равновесия $u_n \equiv 1$. Характеристические многочлены уравнений (51) и (53) обладают близкими свойствами с многочленом (23), в то время как многочлен уравнения (50)

$$\lambda^{k+1} - \lambda^{k-1} + 2r/k, \quad (54)$$

построенного на основе центральной разности, имеет при четном k и произвольном положительном r отрицательный корень, по модулю больший единицы. Это приводит к неустойчивости единичного решения при любом $r > 0$ и, более того, к тому, что компоненты u_n решения уравнения (50) с положительными начальными условиями становятся отрицательными. Это обстоятельство не позволяет привлекать модель (50) к анализу динамики уравнения с запаздыванием (1).

Вернемся к свойствам уравнений (51), (53). Потеря устойчивости единичного состояния равновесия в этих моделях происходит аналогично задаче (11). Для них легко формулируются и доказываются утверждения, аналогичные леммам 1 и 2. Причем для уравнения (53) эти утверждения идентичны данным леммам.

В уравнении (50) при нечетном k существует критическое значение параметра $r = r_{cr}$ такое, что при $0 < r < r_{cr}$ единичное состояние равновесия модели устойчиво, однако его способ потери устойчивости существенно отличается от полученного у других моделей. Это связано с наличием у характеристического многочлена (54) при критических значениях r резонансных корней. Численный эксперимент для различных k показал, что при $r > r_{cr}$ в этой модели не появляется устойчивой инвариантной кривой, как в остальных моделях.

Обратимся теперь к проблеме положительности компонент решений при положительных начальных условиях. Нетрудно видеть, что уравнение (53) при всех действительных r , а уравнение (51) при $0 < r < k$ имеют решения с положительными компонентами для любых положительных начальных условий. Компоненты решения уравнения (51) при $r > k$ и достаточно малых начальных условиях становятся отрицательными, что не позволяет его использовать при $r > k$. В уравнении (51) при нечетном k и $r > r_{cr}$ компоненты u_n решения становятся, начиная с некоторого номера, отрицательными.

Модель (53) достаточно хорошо описывает динамику уравнения (1), вместе с тем, наличие в правой части (53) экспоненты несколько замедляет численный эксперимент и, кроме того, у данной модели нет области параметров, в которой реализуются сложные неупорядоченные решения. Тем самым, становится более аргументированным выбор уравнения (11) в качестве основной модели для данного исследования.

6. О локальной динамике уравнений вида (39) с непрерывным временем

Рассмотрим вопрос о поведении всех решений с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности положительного состояния равновесия уравнения (39) с непрерывным временем:

$$x(t) = x(t-1) + \delta r [1 - x(t-1 - h_0)] x(t-1). \quad (55)$$

После замены в нем $y(t) = x(t) - 1$ приходим к уравнению

$$y(t) = y(t-1) - \delta r y(t-1 - h_0) [1 + y(t-1)]. \quad (56)$$

Напомним, что для каждой непрерывной функции $\varphi(s) \in C[-1 - h_0, 0]$ уравнение (56) локально разрешимо при $t > 0$ в классе непрерывных функций, удовлетворяющих начальному условию $y(s) = \varphi(s)$, $s \in [-1 - h_0, 0]$, при выполнении условия согласования

$$\varphi(0) = \varphi(-1) - \delta r \varphi(-1 - h_0) [1 + \varphi(-1)].$$

Подобным образом формулируется условие существования непрерывно дифференцируемых, дважды непрерывно дифференцируемых и т.д. решений.

Сначала остановимся на рассмотрении логистического уравнения без «запаздывания»

$$y(t) = y(t-1) - \delta r y(t-1) [1 + y(t-1)]. \quad (57)$$

Как уже отмечалось выше, при $0 < \delta r < 2$ нулевое решение (57) экспоненциально асимптотически устойчиво, а при $\delta r > 2$ — неустойчиво. Пусть выполнено условие $\delta r = 2 + \varepsilon r_1$, где r_1 — фиксировано, а ε — малый положительный параметр

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (58)$$

Тогда в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия (57) имеем бесконечномерный критический случай. В [31,32] показано, что при этих условиях локальная динамика (57) определяется уравнением

$$\partial \xi / \partial \tau = \alpha \xi + d \xi |\xi|^2 \quad (59)$$

для функции $\xi(\tau, x)$, где параметры α и d определяются формулами (48); $\tau = \varepsilon t$; $x \in [0, 1]$ и зависимость от x является 1-антипериодической:

$$\xi(\tau, x + 1) = -\xi(\tau, x). \quad (60)$$

В случае $h_0 > 0$ ситуация отличается существенным образом. Рассмотрим линеаризованное в нуле уравнение (56):

$$y(t) = y(t-1) - \delta r y(t-1-h_0). \quad (61)$$

Фиксируем некоторое δ и рассмотрим «близкое» (61) уравнение

$$y(t) = y(t-1) - \delta r y(t-1-h_0-\delta). \quad (62)$$

Лемма 3. Пусть $h_0 > 0$. Тогда для любого $\delta_0 > 0$ существует такое $\delta \in (0, \delta_0)$, что характеристическое уравнение для (62)

$$1 = \exp(-\mu) - \delta r \exp(-\mu(1+h_0+\delta)) \quad (63)$$

имеет корни, лежащие вне единичного круга на комплексной плоскости и отделенные от него при $\delta_0 \rightarrow 0$.

Таким образом, задача исследования окрестности положительного состояния в уравнении (55) становится нелокальной.

7. О динамике дифференциально-разностного уравнения, «близкого» к разностному уравнению (56)

Начнем с рассмотрения уравнения при $h_0 = 0$. Заметим, что при малых ε свойства решений этого уравнения и уравнения

$$y(t+\varepsilon) = y(t-1) - \delta r y(t-1)[1+y(t-1)] \quad (64)$$

совпадают: в (54) заменим t на $t+\varepsilon$ и произведем нормирующую замену времени $t \rightarrow (1-\varepsilon_1)t$, где $\varepsilon_1(1+\varepsilon_1) = \varepsilon$.

Левую часть в (64) заменим на «близкое» выражение

$$y(t+\varepsilon) \rightarrow y(t) + \varepsilon y'(t). \quad (65)$$

В результате приходим к дифференциально-разностному уравнению

$$\varepsilon y'(t) + y(t) = y(t-1) - \delta r y(t-1)[1 + y(t-1)], \quad (66)$$

решения уравнения (66) исследованы в [31,32]. Показано, что при

$$\delta r = 2 + \varepsilon^2 r_1 \quad (67)$$

поведение решений (66) из малой окрестности нулевого состояния равновесия определяются нелокальной динамикой параболического уравнения

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + r_1 \xi - 4\xi^3 \quad (68)$$

с антипериодическими краевыми условиями (60). Решения $y(t, \varepsilon)$ уравнения (66) и ограниченные при $\tau \rightarrow \infty$, $x \in [0, 1]$, решения краевой задачи (68), (60) связаны равенством

$$y(t, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \xi(\tau, x) + O(\varepsilon) \quad (\tau = \varepsilon t, x = 1 + \varepsilon t).$$

Ситуация в случае, когда в представлении (67) вместо $\varepsilon^2 r_1$ стоит $\varepsilon^\alpha r_1$, где $0 < \alpha < 2$, изучена в [33,34]. Она существенно отличается от случая $\alpha = 2$. Здесь оказывается характерным явление «взрывной» мультистабильности [33].

В случае, когда вместо (65) используется представление

$$y(t + \varepsilon) \rightarrow y(t) + \varepsilon y'(t) + \dots + \varepsilon^n y^{(n)}(t),$$

результаты приведены в [35].

Пусть теперь выполнены условия $h_0 > 0$ и равенство (65), рассмотрим уравнение

$$\varepsilon y'(t) + y(t) = y(t-1) - \delta r y(t-1-h_0)[1 + y(t-1)] \quad (69)$$

и его линеаризацию в окрестности $y \equiv 0$

$$\varepsilon y'(t) + y(t) = y(t-1) - \delta r y(t-1-h_0).$$

Теорема 2. При условиях (65) и $h_0 > 0$ для всех достаточно малых значений ε характеристическое для (69) уравнение

$$\varepsilon \lambda + 1 = \exp(-\lambda) - \delta r \exp(-(1+h_0)\lambda)$$

имеет корни с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \rightarrow 0$ вещественной частью.

Таким образом, при $h_0 > 0$ в дифференциально-разностном уравнении

(69) динамика является нелокальной: при малых ε , то есть в малой окрестности нулевого решения, у него не может существовать аттракторов.

8. Выводы

Предложено семейство нелинейных логистических разностных уравнений всех порядков $k=1,2,3,\dots$, возникающее при разностных аппроксимациях классического логистического уравнения с запаздыванием. При небольших значениях порядка k проведено исследование динамических свойств решений и сделаны выводы о тенденциях изменения динамики при увеличении соответствующего порядка. Показано, что в зависимости от величины мальтузианского коэффициента r может наблюдаться как простая (т.е. наличие устойчивых состояния равновесия или цикла), так и сложная динамическая структура решений, например, цикл интервалов (см. книгу [18] и библиографию в ней) и др. Рассмотрен вопрос о зависимости поведения решений от порядка k рассматриваемого разностного уравнения. Этот вопрос может быть связан со значением коэффициента разностной аппроксимации оператора дифференцирования в классическом дифференциальном логистическом уравнении с запаздыванием. Например, при уменьшении шага такой аппроксимации динамические свойства соответствующих дифференциальных и разностных уравнений сближаются.

Представляет интерес исследование структуры области начальных условий инвариантной относительно решений разностных уравнений. В фазовом пространстве выделены начальные точки, траектории из которых остаются положительными при увеличении времени, то есть сохраняется биологический смысл логистического уравнения. Проиллюстрировано явление, когда в зависимости от параметра r и значения порядка k указанные области могут иметь как простую, так и сложную структуры. Сформулирован вывод о структуре области в предельном случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *E.M. Wright*. A non-linear difference-differential equation // *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, 1955, v.194, p.66-87.
2. *S. Kakutani, L. Markus*. On the non-linear difference-differential equation $y'(t) = (a - by(t - \tau))y(t)$ // *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations*, v.4 (ed. S. Lefschetz, Princeton University Press, 1958, p.1-18, *Annals of Math.Studies* (AM-41).
3. *С.А. Кащенко*. К вопросу об оценке в пространстве параметров области глобальной устойчивости уравнения Хатчинсона // *Нелинейные колебания в задачах экологии*, Ярославль: ЯрГУ, 1985, с.55-62;
S.A. Kaschenko. К вопросу об оценке в пространстве параметров области глобальной устой-

- chivosti uravneniia Khatchinsona // Nelineinye kolebaniia v zadachakh ekologii, YarGU, Yaroslavl, 1985, s.55-62.
4. *G.S. Jones*. The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x-1) [1 + f(x)]$ // Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 1962, v.5, p.435-450.
 5. *С.А. Кащенко*. Асимптотика периодического решения обобщённого уравнения Хатчинсона // Исследования по устойчивости и теории колебаний. – Ярославль: ЯрГУ, 1981, 22 с.;
S.A. Kaschenko. Asimptotika periodicheskogo resheniia obobshchennogo uravneniia Khat-chinsona // Issledovaniia po ustoichivosti i teorii kolebanii, Yaroslavl: YarGU, 1981, 22 s.
 6. *S. Kashchenko*. Asymptotics of the Solutions of the Generalized Hutchinson Equation // Aut. Control Comp. Sci., 2013, v.47, №7, p.470-494.
 7. *С.А. Кащенко*. Периодические решения нелинейных уравнений, обобщающих логистическое уравнение с запаздыванием // Матем. заметки, 2017, т.102, №2, с.216-230; англ. пер.: *S.A. Kashchenko*. Periodic Solutions of Nonlinear Equations Generalizing Logistic Equations with Delay // Math. Notes, 2017, v.102, №2, p.181-192.
 8. *S. Kashchenko, D. Loginov*. About Global Stable of Solutions of Logistic Equation with Delay // Journal of Physics: Conference Series, 2017, v. 937(1), 012019.
 9. *J.K. Hale*. Theory of functional differential equations. – New York: Springer Verlag, 1977, 626 p.
 10. *P. Hartman*. Ordinary Differential Equations. – New York: Wiley, 1965, 626 p.
 11. *А.Н. Шарковский*. Существование циклов непрерывного отображения прямой в себя // Украин. математ. журн., 1964, т.16, №1, с.61-71;
A.N. Sharkovskii. Sosushchestvovanie tsiklov nepreryvnoho otobrazheniia priamoi v sebia // Ukrainian Math. J., 1964, t.16, №1, s.61-71.
 12. *M.J. Feigenbaum*. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Stat. Phys., 1978, v.19, №1, p.25-52.
 13. *M.J. Feigenbaum*. The universal metric properties of nonlinear transformations // J. Stat. Phys., 1979, v.21, №6, p.669-706.
 14. *Т.С. Ахромеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский*. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. – М.: Наука, 1992, 544 с.;
T.S. Akhromeeva, S.P. Kurdyumov, G.G. Malinetskiy, A.A. Samarskiy. Nestatsionarnye struktury i diffuzionnyi khaos. – М.: Nauka, 1992, 544 s.
 15. *M. Henon*. A two-dimensional mapping with a strange attractor // Communications in Mathematical Physics, 1976, v.50 (1), p.69-77.
 16. *P. Cvitanovic, G. Gunaratne, I. Procaccia*. Topological and metric properties of Henon-type strange attractors // Physical Review A, 1988, v.38 (3), p.1503-1520.
 17. *А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, М.В. Поздняков, Ю.В. Седова*. Универсальное двумерное отображение и его радиофизическая реализация // Нелинейная динамика, 2012, т.8, №3, с.461-471;
P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, M.V. Pozdnyakov, Ju.V. Sedova. Universal two-dimensional map and its radiophysical realization // Nelin. Dinam., 2012, v. 8, №3, p. 461-471.
 18. *S. Ruelle*. Chaos on the interval. Volume 67 of University Lecture Series, AMS, 2017.
 19. *J.E. Marsden, M. McCracken*. The Hopf bifurcation and its applications. – Appl. Math. Sci., 19, Springer-Verlag, 1976.

20. Э.Э. Шноль. Об устойчивости неподвижных точек двумерных отображений // Дифференц. уравнения, 1994, т.30, №7, с.1156-1167;
англ. пер.: *E.E. Shnol*. On the stability of fixed points of two-dimensional mappings // *Differ. Equ.*, 1994, v.30, №7, p.1071-1081.
21. В.И. Арнольд. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений – М.: Наука, 1978.
V.I. Arnold. Additional chapters of the theory of ordinary differential equations. – М.: Nauka, 1978, 304 p.
22. *Yu.A. Kuznetsov*. Elements of Applied Bifurcation Theory. – Springer-Verlag, 1995.
23. Ю.И. Неймарк. О некоторых случаях зависимости периодических решений от параметров // ДАН СССР, 1959, т.129, №4, с.736-739;
Yu.I. Neimark. On some cases of periodic motions depending on parameters // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1959, v.129, p.736-739.
24. *R.J. Sacker*. On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations, 1964, Report IMM-NYU 333, New York University.
25. *R.J. Sacker*. A new approach to perturbation theory of invariant surfaces // *Comm. Pure Appl. Math.*, 1965, v.18, p.717-732.
26. М.И. Болотов, С.В. Гонченко, А.С. Гонченко, Е.А. Гринес, А.О. Казаков, Т.А. Леванова, В.И. Лукьянов. Бифуркация Андронова-Хопфа для потоков и отображений: Учебно-метод. пос. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017, 73 с.;
M.I. Bolotov, S.V. Gonchenko, A.S. Gonchenko, Ye.A. Grines, A.O. Kazakov, T.A. Levanova, V.I. Luk'yanov. Bifurkatsiia Andronova-Khopfa dlia potokov i otobrazhenii: Uchebno-metod. pos. – Nizhnii Novgorod: NNSU, 2017, 73 s.
27. С.Д. Глызин. Поведение решений нормальной формы системы трех связанных разностных автогенераторов // Моделирование и анализ информационных систем, 2006, т.13, №1, с.49-57;
S.D. Glyzin. Povedeniye reshenii normalnoi formy sistemy trekh sviazannykh s nimi raznostnykh avtogeneratedorov // *Modelirovanie i Analiz Informatsionnykh Sistem*, 2006, t.13, №1, s.49-57.
28. С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов. Конечномерные модели диффузионного хаоса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2010, т.50, №5, с. 860-875;
англ. пер.: *S.D. Glyzin, A.Yu. Kolesov, N.Kh. Rozov*. Finite-dimensional models of diffusion chaos // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010, v.50, №5, p.816-830.
29. *I.S. Kashchenko, S.A. Kashchenko*. Normal and quasnormal forms for systems of difference and differential-difference equations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2016, Sept., v.38, p.243-256.
30. Д.С. Глызин, С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов. Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора // Дифференц. уравнения, 2005, т.41, №2, с.268-273;
англ. пер.: *D.S. Glyzin, S.D. Glyzin, A.Yu. Kolesov, N.Kh. Rozov*. The dynamic renormalization method for finding the maximum lyapunov exponent of a chaotic attractor // *Differential Equations*, 2005, v.41, №2, p.284-289.
31. С.А. Кащенко. Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Дифференц. уравнения, 1989, т.25, №8, с.1448-1451;

- S.A. Kashchenko*. Primenenie metoda normalizatsii k izucheniyu dinamiki differentsialno-raznostnykh uravnenii s malym mnozhitel'm pri proizvodnoi // *Differential Equations*, 1989, t.25, №8, s.1448-1451.
32. *S.A. Kashchenko*. Bifurcational Features in Systems of Nonlinear Parabolic Equations with Weak Diffusion // *Intern. J. of Bifurcation and Chaos*, 2005, v.15, №11, p.3595-3606.
33. *И.С. Кащенко*. Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием // Доклады РАН, 2008, т.421, №5, с.586-589;
англ. пер.: *I.S. Kashchenko*. Asymptotic analysis of the behavior of solutions to equations with large delay // *Doklady Mathematics*, 2008, v.78, №1, p.570-573.
34. *И.С. Кащенко*. Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2008, т.48, №12, с.2141-2150;
англ. пер.: *I.S. Kashchenko*. Local dynamics of equations with large delay // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2008, v.48, №12, p.2172-2181.
35. *И.С. Кащенко, С.А. Кащенко*. Анализ локальной динамики разностных и близких к ним дифференциально-разностных уравнений // *Изв. вузов. Матем.*, 2018, №9, с.29-41;
англ. пер.: *I.S. Kashchenko, S.A. Kashchenko*. Analysis of local dynamics of difference and close to them differential-difference equations // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2018, v.62, №9, p.24-34.

Поступила в редакцию 01.04.2019

После доработки 01.04.2019

Принята к публикации 01.07.2019