L. Yu. Kolotilina, A class of optimally conditioned block 2×2 matrices, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2002, Volume 284, 64–76

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 284, 2002 г.

Л. Ю. Колотилина

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПТИМАЛЬНО ОБУСЛОВЛЕННЫХ БЛОЧНЫХ 2×2 МАТРИЦ

§1. Введение

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, – эрмитова положительно определенная матрица, представленная в виде

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

где $A_{11} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $1 \leqslant m < n$.

Спектральное число обусловленности $k(A)$ матрицы A определяется формулой

$$k(A) = \lambda_1(A)/\lambda_n(A),$$

где

$$\lambda_1(A) \geqslant \lambda_2(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A)$$

– это (вещественные и положительные) собственные значения матрицы A, занумерованные в порядке невозрастания.

В этой работе через $\Delta(m, n-m)$, $1 \leqslant m < n$, мы обозначаем группу всех невырожденных матриц из $\mathbb{C}^{n\times n}$ вида

$$A = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix},$$

где $D_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и $D_2 \in \mathbb{C}^{(n-m)\times(n-m)}$.

Будем говорить, что эрмитова положительно определенная матрица A вида (1.1) оптимально обусловлена относительно $\Delta(m, n-m)$, если выполнено условие

$$k(A) = \min_{D\in\Delta(m,n-m)} \{k(D^*AD)\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке NWO, Нидерланды (грант 047-008-007).

Очевидно, что если $A_{12} = 0$, т.е. матрица A блочно диагональна, то она оптимально обусловлена относительно $\Delta(m, n-m)$ тогда и только тогда, когда $k(A) = 1$, т.е. $A = cI_n$ $(c > 0)$ является скалярной матрицей. (Здесь и далее символом I_k или просто I обозначается единичная матрица порядка k.)

Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы отличная от скалярной эрмитова положительно определенная матрица была оптимально обусловлена относительно $\Delta(m, n - m)$, были получены в [2]. (Блочные $k \times k$, $k \geqslant 2$, положительно определенные матрицы, оптимально обусловленные относительно группы $\Delta(m_1, \dots, m_k)$, рассматривались в работе [8].) Сформулируем их в виде следующей теоремы.

Теорема 1.1 [2]. *Эрмитова положительно определенная матрица A вида*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad n \geqslant 2,$$

где $A_{11} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $1 \leqslant m < n$, такая что $A_{12} \neq 0$, оптимально обусловлена относительно $\Delta(m, n-m)$ тогда и только тогда, когда справедливо одно из следующих двух эквивалентных условий:

(i) *существует вектор $z = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}^m$, такой что*

$$Az = \lambda_1(A)z$$

и

$$A\widetilde{z} = \lambda_n(A)\widetilde{z},$$

где $\widetilde{z} = \left[\begin{smallmatrix} x \\ -y \end{smallmatrix}\right]$;

(ii) *существует вектор $z = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}^m$, с ненулевыми блочными компонентами x и y, такой что*

$$A_z = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda_1(A) + \lambda_n(A) & \lambda_1(A) - \lambda_n(A) \\ \lambda_1(A) - \lambda_n(A) & \lambda_1(A) + \lambda_n(A) \end{bmatrix},$$

где матрица A_z, полученная с помощью агрегации A на векторе z, определяется по формуле [7]

$$A_z = \begin{bmatrix} \dfrac{x^* A_{11} x}{\|x\|^2} & \dfrac{x^* A_{12}\, y}{\|x\|\,\|y\|} \\[2ex] \dfrac{y^* A_{21} x}{\|x\|\,\|y\|} & \dfrac{y^* A_{22}\, y}{\|y\|^2} \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Ясно, что для любой эрмитовой положительно определенной матрицы A вида (1.1) множество

$$\{D^*AD, \quad D \in \Delta(m, n-m)\}$$

содержит матрицу

$$D_A^{-1/2}\, A\, D_A^{-1/2} = \begin{bmatrix} I_m & A_{11}^{-1/2}\, A_{12}\, A_{22}^{-1/2} \\ A_{22}^{-1/2}\, A_{21}\, A_{11}^{-1/2} & I_{n-m} \end{bmatrix},$$

где $D_A = \left[\begin{smallmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{smallmatrix}\right]$ – блочно диагональная часть A. Как хорошо известно [3–6] и легко следует из теоремы 1.1 (см. [2]), эта матрица оптимально обусловлена относительно $\Delta(m, n-m)$.

Заметим, что собственные значения матриц вида

$$C = \begin{bmatrix} I_m & G \\ G^* & I_{n-m} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

могут быть определены по формуле

$$\lambda_i(C) = \begin{cases} 1 + \sigma_i(G), & i = 1, \ldots, r, \\ 1, & i = r+1, \ldots, n-r, \\ 1 - \sigma_i(G), & i = n-r+1, \ldots, n, \end{cases}$$

где $r = \operatorname{rank} G$, а через $\sigma_i(G)$, $i = 1, \ldots, r$, обозначены ненулевые сингулярные значения матрицы G, занумерованные в порядке невозрастания. Таким образом, неединичные собственные значения матриц вида (1.3) образуют пары чисел $1 \pm \sigma_i(G)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, (аддитивно) симметричных относительно 1.

Далее, на основе (1.3) нетрудно убедиться в том, что для $i = 1, \ldots, r$ равенство

$$C \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = [1 + \sigma_i(G)] \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

справедливо в том и только том случае, когда

$$C \begin{bmatrix} x_i \\ -y_i \end{bmatrix} = [1 - \sigma_i(G)] \begin{bmatrix} x_i \\ -y_i \end{bmatrix}.$$

Это значит, что собственные векторы матрицы C, отвечающие ее собственным значениям $1 \pm \sigma_i(G)$, $i = 1, \ldots, r$, различаются лишь знаком их второй блочной компоненты. Тем самым мы показали, что для матриц вида (1.3) условие (i) теоремы 1.1 выполнено не только для пары крайних собственных значений $\lambda_1(C)$ и $\lambda_n(C)$, но и для всех пар $1 \pm \sigma_i(G)$ собственных значений, отличных от единицы.

С другой стороны, если $z_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ – это собственный вектор матрицы C, отвечающий ее собственному значению $1 + \sigma_i(G)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, то из ортогональности векторов $\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} x_i \\ -y_i \end{bmatrix}$ вытекают соотношения

$$\|x_i\| = \|y_i\|, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{1.4}$$

Используя же (1.2) и (1.4), легко убедиться, что

$$C_{z_i} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{x_i^* G y_i}{\|x_i\| \, \|y_i\|} \\ \dfrac{y_i^* G^* x_i}{\|x_i\| \, \|y_i\|} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma_i(G) \\ \sigma_i(G) & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_i(C) + \lambda_{n-i+1}(C) & \lambda_i(C) - \lambda_{n-i+1}(C) \\ \lambda_i(C) - \lambda_{n-i+1}(C) & \lambda_i(C) + \lambda_{n-i+1}(C) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Таким образом, условие (ii) теоремы 1.1 в действительности выполняется не только для вектора z_1, отвечающего старшему собственному значению $\lambda_1(C)$ матрицы C вида (1.3), но и для всех собственных векторов $z_1, \ldots, z_r$.

Итак, из вышесказанного следует, что любая блочная 2×2 эрмитова положительно определенная матрица A может быть приведена преобразованием подобия с матрицей, принадлежащей $\Delta(m, n-m)$, к оптимально обусловленной матрице C вида (1.3), обладающей следующими свойствами:

(1) отличные от единицы собственные значения расположены симметрично относительно 1;

(2) собственные векторы, отвечающие собственным значениям $1 \pm \sigma_i(G)$, образуют пары $\begin{bmatrix} x_i \\ \pm y_i \end{bmatrix}$;

(3) собственные значения $1 \pm \sigma_i(G)$ матрицы C являются также собственными значениями агрегированной матрицы $C_{\left[\begin{smallmatrix} x_i \\ y_i \end{smallmatrix}\right]}$ размера 2×2.

С другой стороны, если эрмитова положительно определенная матрица A имеет вид (1.1), то множество $\{D^*AD, D \in \Delta(m, n-$

$m)\}$ также содержит и матрицу $B = \left[\begin{smallmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{smallmatrix}\right]$, удовлетворяющую условиям

$$B_{ii} = B'_{ii}, \quad i = 1, 2, \tag{1.5}$$

где мы используем обозначение

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} \\ \\ B'_{21} & B'_{22} \end{bmatrix}.$$

Действительно, как было отмечено выше, A может быть приведена блочно диагональным преобразованием подобия к матрице C вида (1.3). Следовательно, наряду с матрицей C, множество $\{D^*AD, D \in \Delta(m, n-m)\}$ содержит и матрицу

$$B = \Delta C \Delta,$$

где $\Delta = \left(D_{C^{-1}}\right)^{-1/4}$, а

$$D_{C^{-1}} = \begin{bmatrix} (I - GG^*)^{-1} & 0 \\ \\ 0 & (I - G^*G)^{-1} \end{bmatrix}$$

– это блочно диагональная часть обратной матрицы C^{-1}. Ясно, что матрица B удовлетворяет условиям (1.5).

В дальнейшем эрмитовы положительно определенные блочные 2×2 матрицы, удовлетворяющие условиям (1.5), мы будем называть уравновешенными.

Как будет показано в §2, посвященном исследованию свойств уравновешенных матриц, такие матрицы обладают спектральными свойствами, аналогичными свойствам матриц с единичными диагональными блоками. В частности, они являются оптимально обусловленными относительно $\Delta(m, n-m)$. Однако, в отличие от матриц с единичными диагональными блоками, собственные значения которых расположены симметрично относительно 1 в аддитивном смысле, собственные значения уравновешенных матриц расположены симметрично относительно 1 в мультипликативном смысле, т.е. отличные от единицы собственные значения образуют пары взаимно обратных чисел.

§2. Уравновешенные матрицы

Укажем сперва простейшие свойства уравновешенных матриц. Напомним, что, по определению, любая уравновешенная матрица является эрмитовой и положительно определенной, так что она сама и все ее главные подматрицы всегда обратимы.

Следующее утверждение является тривиальным следствием из определения уравновешенных матриц.

Лемма 2.1. *Матрица A уравновешена тогда и только тогда, когда справедливо любое из следующих эквивалентных утверждений:*

(i) *обратная матрица A^{-1} уравновешена;*

(ii) *матрица Q^*AQ уравновешена, где $Q \in \Delta(m, n-m)$ – унитарная блочно диагональная матрица.*

Лемма 2.2. *Блочно диагональная матрица $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ является уравновешенной тогда и только тогда, когда $A = I$.*

Доказательство. Пусть A уравновешена. Тогда, как следует из определения, диагональные блоки A_{ii} эрмитовы и положительно определены и удовлетворяют условиям $A_{ii}^2 = I$, $i = 1, 2$, откуда следует, что $A = I$. Обратное утверждение тривиально. □

Лемма 2.3. *Если матрица $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, такая что $A_{12} \neq 0$, является уравновешенной, то*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{11}A_{12}A_{22}^{-1} \\ \\ -A_{22}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22} \\ \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Поскольку, по определению, обратная матрица имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

мы заключаем, что

$$I = A^{-1}A = \begin{bmatrix} A_{11}^2 + A'_{12}A_{21} & A_{11}A_{12} + A'_{12}A_{22} \\ \\ A'_{21}A_{11} + A_{22}A_{21} & A_{22}^2 + A'_{21}A_{12} \end{bmatrix},$$

откуда следуют соотношения

$$A_{11}A_{12} + A'_{12}A_{22} = 0,$$
$$A'_{21}A_{11} + A_{22}A_{21} = 0.$$

Следовательно,

$$A'_{12} = -A_{11}A_{12}A_{22}^{-1}, \quad A'_{21} = -A_{22}A_{21}A_{11}^{-1},$$

что и доказывает первое из требуемых равенств. Второе равенство аналогичным образом выводится из условия $AA^{-1} = I$. □

Сравнивая выражения для внедиагональных блоков матрицы A^{-1}, даваемые леммой 2.3, мы немедленно приходим к следующему результату.

Следствие 2.1. *Если матрица A уравновешена, то*

$$A_{11}^2A_{12} = A_{12}A_{22}^2, \quad A_{22}^2A_{21} = A_{21}A_{11}^2.$$

Лемма 2.4. *Пусть A – уравновешенная матрица. Тогда*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & -A_{22} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & -A_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & -A_{22}^{-1} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & -A_{22} \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Тривиальные вычисления показывают, что выражения для A^{-1}, даваемые леммой 2.4, совпадают с выражениями из леммы 2.3. □

Следствие 2.2. *Если матрица A уравновешена, то*

$$\det A = 1.$$

Доказательство. Из леммы 2.4 следует, что

$$(\det A)^{-1} = \det A^{-1} = \det A,$$

так что $(\det A)^2 = 1$. Поскольку, по определению, матрица A является эрмитовой и положительно определенной, мы заключаем, что $\det A = 1$. □

Из леммы 2.4 также следует, что для любой уравновешенной матрицы A ее спектр, обозначаемый $\mathrm{Spec}\,(A)$, содержит вместе с каждым собственным значением $\lambda \neq 1$ также и обратное число λ^{-1}. Таким образом мы приходим к следующему результату.

Следствие 2.3. *Если матрица A уравновешена, то*

(i) $$\operatorname{Spec}(A) = \operatorname{Spec}(A^{-1})$$

или, в других терминах,

$$\lambda \in \operatorname{Spec}(A) \Longleftrightarrow \lambda^{-1} \in \operatorname{Spec}(A);$$

(ii) $$k(A) = \lambda_1^2(A).$$

Лемма 2.5. *Произвольная уравновешенная матрица A коммутирует с квадратом своей блочно диагональной части, т.е.*

$$AD_A^2 = D_A^2 A.$$

Доказательство. В силу леммы 2.4,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & -A_{22} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & -A_{22}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & -A_{22}^{-1} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & -A_{22} \end{bmatrix},$$

откуда следует, что

$$D_A^2 A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & -A_{22} \end{bmatrix}^2 A = A \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & -A_{22} \end{bmatrix}^2 = AD_A^2.$$

□

Как хорошо известно (см., например, [1, гл. IX, теорема 11]), из того факта, что эрмитовы положительно определенные матрицы A и D_A^2 коммутируют, следует, что эти матрицы (а значит также и D_A) имеют полный набор общих собственных векторов. Этот набор будет явно указан ниже в теореме 2.1, описывающей спектральную структуру уравновешенных матриц. Прежде, чем перейти к этому основному результату, мы установим еще два простых свойства уравновешенных матриц.

Лемма 2.6. *Если матрица A является уравновешенной и $\mu \in \operatorname{Spec}(D_A)$, то $\mu \geqslant 1$.*

Доказательство. Пусть $\mu \in \operatorname{Spec}(A_{11})$. Ввиду леммы 2.3 мы имеем:

$$A_{11}^2 - A_{11}A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} = I,$$

так что

$$A_{11}^2 = I + A_{11}^{1/2}A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{1/2},$$

и, следовательно, $A_{11}^2 \geqslant I$. Поскольку матрица A_{11} положительно определена, из последнего неравенства следует, что $\mu \geqslant 1$. Случай $\mu \in \operatorname{Spec}(A_{22})$ рассматривается аналогично. □

Лемма 2.7. *Пусть матрица A уравновешена и пусть*

$$A_{11}x = \mu x, \quad x \neq 0.$$

Тогда вектор $y = A_{21}x$ удовлетворяет соотношению

$$A_{22}y = \mu y.$$

Доказательство. Используя следствие 2.1, мы выводим:

$$A_{22}^2 y = A_{22}^2 A_{21} x = A_{21} A_{11}^2 x = \mu^2 A_{21} x = \mu^2 y,$$

откуда, ввиду положительной определенности матриц A_{11} и A_{22}, и следует требуемое равенство. □

Спектральная структура уравновешенных матриц, не являющихся блочно диагональными, описывается следующей теоремой.

Теорема 2.1. *Пусть матрица*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad n \geqslant 2, \quad A_{11} \in \mathbb{C}^{m\times m}, \quad 1 \leqslant m < n,$$

уравновешена и $A_{12} \neq 0$. Если $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$, где $r = \operatorname{rank} A_{12}$, – это ненулевые сингулярные значения A_{12}, то

(i)

$$\lambda_i(A_{11}) = \begin{cases} \sqrt{\sigma_i^2 + 1}, & i = 1, \ldots, r, \\ 1, & i = r+1, \ldots, m; \end{cases}$$

$$\lambda_i(A_{22}) = \begin{cases} \sqrt{\sigma_i^2 + 1}, & i = 1, \ldots, r, \\ 1, & i = r+1, \ldots, n-m; \end{cases}$$

(ii)

$$\lambda_i(A) = \begin{cases} \sqrt{\sigma_i^2 + 1} + \sigma_i, & i = 1, \ldots, r, \\ 1, & i = r+1, \ldots, n-r, \\ \sqrt{\sigma_i^2 + 1} - \sigma_i, & i = n-r+1, \ldots, n; \end{cases}$$

(iii) *если*

$$\begin{aligned} A_{11}x_i &= \lambda_i(A_{11})x_i, \qquad x_i \neq 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \\ A_{22}y_i &= \lambda_i(A_{22})y_i, \qquad y_i \neq 0, \qquad i = 1, \ldots, m-n, \end{aligned}$$

и

$$\|x_i\| = \|y_i\|, \quad i = 1, \dots, r,$$

то

$$A \begin{bmatrix} x_i \\ \pm y_i \end{bmatrix} = \left(\sqrt{\sigma_i^2 + 1} \pm \sigma_i\right) \begin{bmatrix} x_i \\ \pm y_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, r,$$

и если $r < \max\{m, n-m\}$, *то собственное подпространство матрицы* A, *отвечающее ее собственному значению* $\lambda = 1$, *порождается векторами*

$$\begin{bmatrix} x_{r+1} \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} x_m \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ y_{r+1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ y_{n-m} \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $\mu \in \operatorname{Spec}(A_{11})$ и пусть

$$A_{11} x = \mu x, \quad \|x\| = 1. \tag{2.1}$$

Заметим, что, в силу леммы 2.6, мы имеем

$$\mu \geqslant 1.$$

Введем вектор

$$\widetilde{y} = A_{21} x. \tag{2.2}$$

Тогда, по лемме 2.7,

$$A_{22} \widetilde{y} = \mu \, \widetilde{y}. \tag{2.3}$$

С другой стороны, из леммы 2.1 следует, что

$$I = A_{11}^2 - A_{11} A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}.$$

Принимая во внимание (2.1), (2.2) и (2.3), из последнего соотношения мы выводим:

$$\begin{aligned} \mu^{-1} x = A_{11}^{-1} x &= A_{11} x - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} x \\ &= \mu x - A_{12} A_{22}^{-1} \, \widetilde{y} \\ &= \mu x - \mu^{-1} A_{12} \, \widetilde{y}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A_{21}^* A_{21} x = A_{12} \, \widetilde{y} = (\mu^2 - 1) x. \tag{2.4}$$

Соотношение (2.4) показывает, что собственный вектор x диагонального блока A_{11} является правым сингулярным вектором блока A_{21} и отвечает сингулярному значению $\sigma = \sqrt{\mu^2 - 1}$, так что $\mu = \sqrt{\sigma^2 + 1}$. Из (2.4) также следует, что

$$\|\,\widetilde{y}\,\|^2 = x^* A_{12}\,\widetilde{y} = \mu^2 - 1, \tag{2.5}$$

и мы можем заключить, что $\widetilde{y} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu = 1$. Далее, если $\mu > 1$, то, ввиду (2.3) и (2.5), вектор

$$y = \widetilde{y}/\|\,\widetilde{y}\,\| = \widetilde{y}/\sqrt{\mu^2 - 1} \tag{2.6}$$

является нормированным собственным вектором второго диагонального блока A_{22} и отвечает собственному значению $\mu = \sqrt{\sigma^2 + 1}$. Теперь, используя (2.1)–(2.6), мы легко получаем, что

$$A \begin{bmatrix} x \\ \pm y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu x \pm \sqrt{\mu^2 - 1}\, x \\ \sqrt{\mu^2 - 1}\, y \pm \mu y \end{bmatrix}$$

$$= \left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}\right) \begin{bmatrix} x \\ \pm y \end{bmatrix} = \left(\sqrt{\sigma^2 + 1} \pm \sigma\right) \begin{bmatrix} x \\ \pm y \end{bmatrix}.$$

Если же $\mu = 1$, то, как было показано, $A_{21}x = 0$, а следовательно

$$A \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно применить те же рассуждения к блоку A_{22} и воспользоваться соображениями размерности. □

Из теорем 2.1 и 1.1 немедленно вытекает следующий важный результат.

Следствие 2.4. *Любая уравновешенная матрица A оптимально обусловлена относительно соответствующей группы $\Delta(m, n-m)$.*

Заметим, что из теоремы 2.1 также следует, что, аналогично случаю блочных 2×2 матриц с единичными диагональными блоками, все ненулевые собственные значения уравновешенной матрицы A образуют пары $\sqrt{\sigma_i^2 + 1} \pm \sigma_i$, $i = 1, \ldots, \operatorname{rank} A_{12}$, но при этом $(\sqrt{\sigma_i^2 + 1} + \sigma_i)(\sqrt{\sigma_i^2 + 1} - \sigma_i) = 1$, тогда как соответствующие собственные векторы могут быть выбраны в виде $\begin{bmatrix} x_i \\ \pm y_i \end{bmatrix}$.

Мы завершаем эту работу рассмотрением матриц

$$A_{\left[\begin{smallmatrix} x_i \\ y_i \end{smallmatrix}\right]} = \begin{bmatrix} x_i^* A_{11} x_i & x_i^* A_{12} y_i \\ \\ y_i^* A_{21} x_i & y_i^* A_{22} y_i \end{bmatrix}, \qquad i = 1, \dots, \operatorname{rank} A_{21},$$

получаемых из $A = \left[\begin{smallmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{smallmatrix}\right]$, $A_{12} \neq 0$, в результате ее агрегирования на собственных векторах $\left[\begin{smallmatrix} x_i \\ y_i \end{smallmatrix}\right]$, $\|x_i\| = \|y_i\| = 1$, отвечающих собственным значениям $\sqrt{\sigma_i^2 + 1} + \sigma_i$, $i = 1, \dots, \operatorname{rank} A_{21}$.

Используя теорему 2.1 и ее доказательство, мы легко получаем, что

$$A_{\left[\begin{smallmatrix} x_i \\ y_i \end{smallmatrix}\right]} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_i^2 + 1} & \sigma_i \\ \sigma_i & \sqrt{\sigma_i^2 + 1} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_i(A) + \lambda_{n-i+1}(A) & \lambda_i(A) - \lambda_{n-i+1}(A) \\ \\ \lambda_i(A) - \lambda_{n-i+1}(A) & \lambda_i(A) + \lambda_{n-i+1}(A) \end{bmatrix},$$

$$i = 1, \dots, \operatorname{rank} A_{21}.$$

Следовательно, как и в случае матриц с единичными диагональными блоками, условие (ii) теоремы 1.1 оказывается выполненным для всех собственных векторов уравновешенной матрицы A, отвечающих ее собственным значениям $\lambda_i(A) > 1$.

Литература

1. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*. М. (1953).
2. Л. Ю. Колотилина, *Оптимально обусловленные блочные* 2×2 *матрицы*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **268** (2000), 72–85.
3. H. Bart, I. Gohberg, M. Kaashoek, P. Van Dooren, *Factorizations of transfer functions*. — SIAM J. Contr. Optimiz. **18** (1980), 675–696.
4. J. Demmel, *The condition number of equivalence transformations*. — Lect. Notes Math. **973** (1982), 2–16.
5. S. C. Eisenstat, J. W. Lewis, M. H. Schultz, *Optimal block diagonal scaling of block 2-cyclic matrices*. — Linear Algebra Appl. **44** (1982), 181–186.
6. L. Elsner, *A note on optimal block scaling of matrices*. — Numer. Math. **44** (1984), 127–128.
7. L. Yu. Kolotilina, *Eigenvalue bounds and inequalities using vector aggregation of matrices*. — Linear Algebra Appl. **271** (1998), 139–167.

8. L. Yu. Kolotilina, *Optimally conditioned block matrices.* — Linear Algebra Appl. **340**/1–3 (2001), 55–67.

Kolotilina L. Yu. A class of optimally conditioned block 2×2 matrices.

A block 2×2 Hermitian positive-definite (h.p.d.) matrix is called equilibrated if its diagonal blocks coincide with the corresponding blocks of its inverse. It is demonstrated that any block 2×2 h.p.d. matrix is block diagonally similar to an equilibrated matrix, and any equilibrated matrix is optimally conditioned. Other properties of equilibrated matrices are also established.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 16 декабря 2001 г.