

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Г. Елизарова, А. Н. Павлов, Б. Н. Четверушкин, Использование квазигазодинамической системы уравнений для расчета обтекания тела с иглой, *Докл. АН СССР*, 1987, том 297, номер 2, 327–331

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

13 января 2025 г., 14:09:16



1. *Бобылев А.В.* — ДАН, 1975, т. 225, № 5, с. 1041–1044. 2. *Бобылев А.В.* — ДАН, 1975, т. 225, № 6, с. 1296–1299. 3. *Krook M., Wu T.T.* — Phys. Rev. Lett., 1976, vol. 36, № 19, p. 1107–1109. 4. *Бобылев А.В.* — ТМФ, 1984, т. 60, № 20, с. 280–310. 5. *Ernst M.H.* — Phys. Rep., 1981, vol. 78, № 1, p. 1–171. 6. *Truesdell C.* — J. Rational. Mech. and Anal., 1956, vol. 5, № 1, p. 55–128. 7. *Никольский А.А.* — ДАН, 1963, т. 151, № 2, с. 299–301. 8. *Бобылев А.В.* — ДАН, 1976, т. 231, № 3, с. 571–574. 9. *Бунимович А.И., Краснослободцев А.В.* — МЖГ, 1982, № 4, с. 135–140. 10. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с. 11. *Макашев Н.К.* Тр. ЦАГИ, 1981, вып. 2111, с. 91–114. 12. *Бобылев А.В.* — ДАН, 1981, т. 256, № 6, с. 1341–1346. 13. *Бобылев А.В.* В сб.: Молекулярная газодинамика. М.: Наука, 1982, с. 50–54. 14. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.

УДК 517.9:519.95

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Т.Г. ЕЛИЗАРОВА, А.Н. ПАВЛОВ, Б.Н. ЧЕТВЕРУШКИН

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА С ИГЛОЙ

(Представлено академиком А.А. Самарским 24 III 1986)

В работах [1–3] на основе известной кинетической модели для функции распределения получена система квазигазодинамических уравнений. Опираясь на эту систему, можно построить простой и вместе с тем обладающий достаточной точностью алгоритм численного решения, эффективность которого подтверждается рядом расчетов [2–4].

В работах [1–4] квазигазодинамические уравнения рассматривались в декартовых координатах. Для практически важного осесимметричного случая в  $(r - z)$ -геометрии эта система примет вид

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v) = \\
 & = \frac{\tau}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \rho u^2) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\rho v^2 + p) \right] + \\
 & + \tau \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial z} (\rho u v) \right), \\
 (2) \quad & \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u^2) + \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u v) = \\
 & = \frac{\tau}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \rho u^3) + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} 3 r p u \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u (\rho v^2 + p)) \right] + \\
 & + \tau \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial z} (\rho u^2 v) \right) + \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (p v) \right],
 \end{aligned}$$

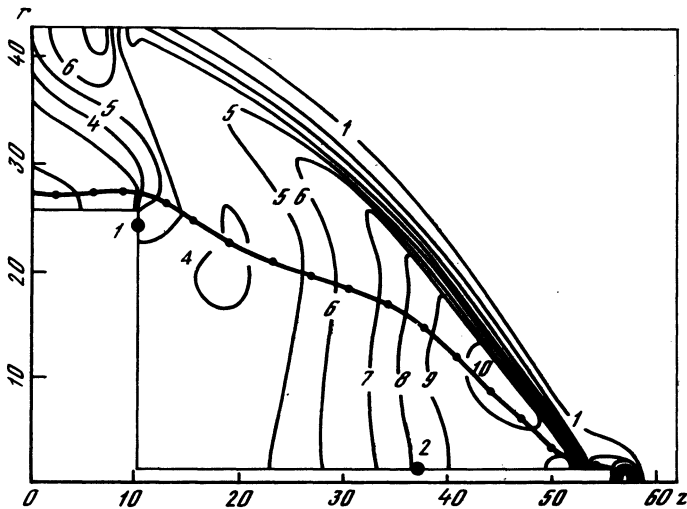


Рис. 1. Изобары на момент времени  $t = 53$ . Линии уровня расположены эквидистантно.  $p_1 = 1,44$ ,  $p_{10} = 11,47$ . Показана звуковая линия  $M = 1$ . Отмечены точки, для которых приведены графики зависимости давления от времени

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho u v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v^2 + p) = \\
 & = \frac{\tau}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (r \rho v u^2) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} (p v) \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\rho v^3 + 3 p v) \right] + \tau \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial z} (\rho u v^2 + p u) \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u (E + p)) + \frac{\partial}{\partial z} (v (E + p)) = \\
 & = \frac{\tau}{2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r u^2 (E + 2p)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\rho} (E + p) \right) \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( v^2 (E + 2p) \right) + \frac{p}{\rho} (E + p) \right] + \tau \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial z} (u v (E + 2p)) \right) \right];
 \end{aligned}$$

здесь  $\rho$  – плотность,  $u$  и  $v$  – компоненты скорости по  $r$  и  $z$ ,  $E$  – полная энергия газа,  $p$  – давление,  $\tau$  – характерное время, определяемое шагом пространственной сетки, на которой реализуется данный алгоритм, и местной скоростью звука.

Один из вариантов алгоритмов численного решения системы (1)–(4) рассмотрен в [5].

В данной работе квазигазодинамическая система уравнений применяется для расчета неустанавливающихся течений. Этот тип течения, при котором постоянный набегающий поток не приводит к установлению стационарной картины вблизи тела, особенно сложен для численной реализации.

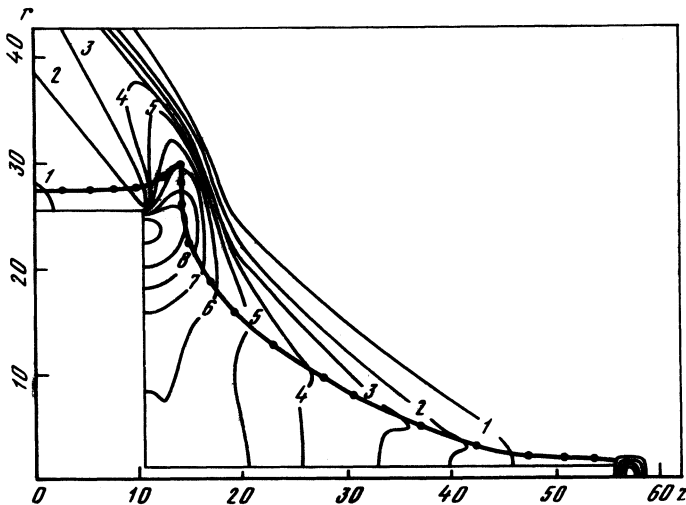


Рис. 2. Изобары на момент времени  $t = 83$ . Линии уровня расположены эквидистантно.  $p_1 = 1,9$ ,  $p_{10} = 24,44$ . Показана звуковая линия  $M = 1$

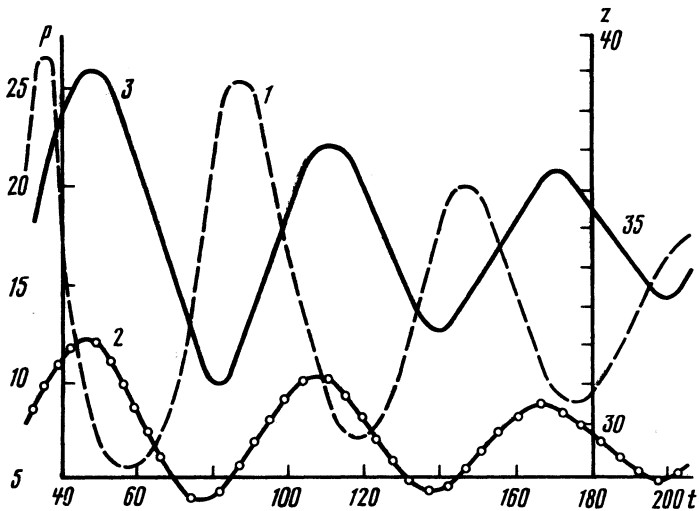


Рис. 3. Зависимости от времени давления  $p$  и координаты точки отрыва  $z$ . 1 соответствует давлению в точке 1, 2 — давлению в точке 2, 3 — координате  $z$

В качестве конкретного примера численного расчета рассматривается задача, соответствующая условиям экспериментального обтекания тел с выступающей иглой [6, 7]. В этих работах отмечалось, что при определенных соотношениях между диаметром тела и длиной иглы общая картина течения при постоянных условиях обтекания близка к периодической. Пусть набегающий справа налево поток имеет постоянные параметры: скорость  $V_\infty$ , плотность  $\rho_\infty$ , давление  $p_\infty$ . Обтекаемое цилиндрическое тело характеризуется размерами:  $D$  — диаметр основного цилиндра,  $d$  — диаметр выступающей иглы,  $l$  — длина иглы.

Как показали эксперименты [6, 7], неустановившиеся режимы обтекания можно разделить на два типа. В первом случае происходит колебание точки присоединения возвратного течения, при этом положение точки отрыва потока практически не меняется. Расчетам таких течений, требующим большого вычислительного

искусства, посвящены работы [8, 9]. Во втором случае происходят периодические изменения всей зоны возвратного течения, которые характеризуются не только смещением точки присоединения потока, но и колебаниями вдоль иглы точки отрыва потока. Период таких колебаний имеет порядок  $\tau^* = l/c$ , где  $c$  – скорость звука в отрывной области. Математическому моделированию такого течения и посвящена данная работа.

Следует отметить, что примеры численного расчета упорядоченного газодинамического течения весьма немногочисленны. Одной из немногих успешных реализаций автоколебательных режимов являются численные расчеты дозвукового обтекания цилиндра, описанные в работах [10, 11]. Для численного моделирования обтекания тела с иглой систему уравнений (1)–(4) следует дополнить уравнением состояния и граничными условиями. В качестве граничных условий на поверхности твердого тела будем использовать условия прилипания и непротекания для скорости  $u = v = 0$  и условие адиабатичности для температуры  $\partial T/\partial n = 0$  (здесь  $n$  – вектор нормали к поверхности тела). Однако система уравнений (1)–(4) в отличие от уравнений Навье–Стокса требует постановки еще одного граничного условия. Такое условие можно выбрать, например, в виде [12]  $\partial p/\partial n = 0$ .

На рис. 1–3 приведены некоторые расчетные данные, соответствующие следующим условиям обтекания:  $V_\infty = 3,5$ ,  $\rho_\infty = 1$ ,  $c_\infty = 1$ ,  $D = 50$ ,  $d = 2$ ,  $l = 46$  ( $l/D = 0,92$ ). Рассматривался идеальный адиабатический газ с отношением удельных теплоемкостей  $\gamma = 1,4$ . Расчеты проводились на равномерной пространственной сетке с числом узлов  $\sim 2500$ .

Как показали натурные эксперименты [6, 7], при таких условиях реализуется неустановившийся режим второго рода. Процесс пульсаций при этом сводится к последовательному образованию, увеличению и разрушению отрывной зоны, возникающей на игле перед торцом. На рис. 1, 2 приведены типичные конфигурации изолиний давления, соответствующих максимальному (рис. 1) и минимальному (рис. 2) размерам отрывной зоны. Виден слабый отошедший скачок уплотнения, постоянно находящийся у конца иглы, и головная ударная волна, которая располагается либо вблизи конца иглы (рис. 1), либо у ее боковой поверхности (рис. 2).

На рис. 3 представлены зависимости от времени координаты точки отрыва на игле и давления в двух характерных пространственных точках – вблизи угловой точки основного цилиндра (1) и на игле (2). Положение этих точек отмечено на рис. 1. Виден колебательный, почти периодический характер решения, численно реализуемый в рассматриваемом случае. Период колебаний  $\tau_0 = 60$ , что соответствует числу Струхала  $Sh = S/\tau_0 c = 0,40$ , где  $S = (l^2 + (D/2)^2)^{1/2}$  – характерный размер, тела,  $c$  – скорость звука в отрывной зоне. По данным [7] число Струхала составляет  $Sh = 0,35$ .

С течением времени происходит незначительное затухание колебаний, характер которого виден на рис. 3. При этом период колебаний практически не изменяется. Наблюдающееся частичное затухание колебаний может быть объяснено наличием остаточной схемной вязкости, которая продолжает оказывать влияние на результаты численного расчета для относительно грубых пространственных сеток, используемых в данных вариантах.

Следует отметить, что аналогичный расчет для скорости, проведенный с традиционными для таких задач условиями скольжения, сразу приводит к установлению постоянной картины течения вокруг тела.

Таким образом, квазигазодинамическая система уравнений позволяет не только эффективно вести расчеты задач газовой динамики [1–5], но и проводить математическое моделирование неустановившихся режимов обтекания. При этом удается оценить параметры реально существующих колебательных решений. Деталь-

ный анализ влияния "вязких" членов, стоящих в правой части системы уравнений (1)–(4), еще предстоит сделать. Однако, по всей видимости, возможность математического моделирования сложных задач связана с физическим характером вывода этой системы уравнений, в котором "вязкие" члены определяются не феноменологическим путем, как в моделях с искусственной вязкостью, а строятся на основе кинетических моделей.

Институт прикладной математики  
им. М.В. Келдыша  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
9 IV 1986

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. – ДАН, 1984, т. 279, № 1, с. 80–83.
2. Елизарова Т.Г., Павлов А.Н., Четверушкин Б.Н. – Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 7, с. 1179–1185.
3. Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. – ЖВМ и МФ, 1985, т. 25, № 10, с. 1526–1533.
4. Граур И.А., Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Препринт Ин-та прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР, 1985, № 85. 18 с.
5. Чурбанова Н.Г. – Там же, 1985, № 100. 13 с.
6. Антонов А.Н., Грецов В.К. – Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 4, с. 93–99.
7. Антонов А.Н., Грецов В.К., Шалаев С.П. – Там же, 1976, № 5, с. 118–124.
8. Забродин А.В., Черкашин В.А. Препринт Ин-та прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР, 1980, № 73, с. 44.
9. Черкашин В.А. – Там же, 1981, № 139, с. 25.
10. Бабаков А.В., Белоцерковский О.М., Зюзин А.П. – ДАН, 1984, т. 279, № 2, с. 315–318.
11. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 515 с.
12. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967. 440 с.

УДК 517.43+530.145

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А.Г. ИЗЕРГИН

### СТАТСУММА ШЕСТИВЕРШИННОЙ МОДЕЛИ В КОНЕЧНОМ ОБЪЕМЕ

(Представлено академиком Л.Д. Фаддеевым 6 XI 1986)

1. Шестивершинная модель на двумерной решетке (модель льда) является одной из самых известных моделей классической статистической физики. На однородной решетке в термодинамическом пределе (в бесконечном объеме) ее статсумма найдена в 1967 г. [1]. Интегрируемая шестивершинная модель на неоднородной решетке была введена в работе [2]. Создание квантового метода обратной задачи дало мощный толчок исследованию интегрируемых моделей [3]. Свойства статсуммы на конечной неоднородной решетке подробно исследованы в работе [4]. В настоящей работе получено явное выражение для статсуммы шестивершинной модели на конечной  $N \times N$  решетке (как однородной, так и неоднородной) со специальными граничными условиями, введенными в [4]. Мы существенно опираемся на результаты [4] и используем обозначения этой работы.

2. Рассмотрим решетку, образованную  $N$  строками ( $\alpha = 1, 2, \dots, N$ ) и  $N$  столбцами ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Строкам припишем "спектральные параметры"  $\lambda_\alpha$ , столбцам – спектральные параметры  $\mu_k$ . Матрицу статистических весов неоднородной шестивершинной модели в узле решетки, расположенном на пересечении  $\alpha$ -й строки и  $k$ -го столбца, зададим в виде

$$(1) \quad L^{(\alpha,k)}(\lambda_\alpha - \mu_k) = \cos \eta \operatorname{sh}(\lambda_\alpha - \mu_k) - i \sin \eta \operatorname{ch}(\lambda_\alpha - \mu_k) \sigma_\alpha^3 \sigma_k^3 - i \sin 2\eta (\sigma_\alpha^- \sigma_k^+ + \sigma_\alpha^+ \sigma_k^-).$$