К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

М. Я. Цыркин

(Армавир)

При аналитическом определении тригонометрических функций с помощью функциональных уравнений принято вводить косинус и синус совместно, рассматривая их как решения системы функциональных уравнений с двумя неизвестными функциями [1]), или одного функционального уравнения [2]). Ю. М. Гайдук [3]) показал, как можно определить косинус, пользуясь одним функциональным уравнением с одной неизвестной функцией.

В настоящей статье рассматриваются два функциональных уравнения:

$$g(x+y)+g(x-y)=2g(x)\,g(y) \tag{I}$$

и

$$f^2(x)-f^2(y)=f(x+y)\,f(x-y). \tag{II}$$

Первое, известное в литературе как уравнение Даламбера — Пуассона, было использовано Ю. М. Гайдуком для определения косинуса; второе мы используем для определения синуса. Мы рассмотрим сначала решения этих уравнений в непрерывных функциях действительной переменной, а затем покажем, как на основе этих уравнений можно определить тригонометрические функции.

1. Будем искать функции $g(x)$, определенные при всех действительных значениях аргумента и удовлетворяющие при любых действительных x и y уравнению (I). Исключая тривиальное решение

---

[1]) Ф. Франклин, Математический анализ, ч. 1, 1950; П. М. Котельников, О функциональных уравнениях, определяющих тригонометрические функции, «Математика в школе» (1951), № 2.

[2]) Waughan, American Mathematical Monthly, **62**, № 10 (1955); стр. 707. С. И. Новоселов, Специальный курс тригонометрии, 1957.

[3]) Ю. М. Гайдук, К вопросу об аналитическом и геометрическом определении тригонометрических функций, «Математика в школе» (1953), № 4.

$g(x) \not\equiv 0$, выводим из этого уравнения, положив последовательно $y=0$, $x=0$, $y=x$ и $y=2x$:

$$\text{а) } g(0)=1,\ \text{б) } g(-y)=g(y),$$
$$\text{в) } g(2x)+1=2g^2(x),\ \text{г) } g(3x)+g(x)=2g(2x)\,g(x). \qquad (1)$$

Докажем, что решения уравнения (I) суть либо функции непрерывные при любом значении аргумента, либо терпящие в каждой точке разрыв, и притом такой, что функция не имеет ни правостороннего, ни левостороннего конечного предела.

Действительно, пусть существует конечный правосторонний предел функции $g(x)$ в точке $x=a$. Тогда из (1, в) следует существование правостороннего предела функции $g(x)$ при $x=2a$. Из $g(2a+x)+g(x)=2g(a+x)\,g(a)$ устанавливаем существование $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$. Обозначим его через α. Из (1, в, г) следует, что $\alpha+1=2\alpha^2$ и $2\alpha=2\alpha^2$, откуда $\alpha=1$. В силу четности $g(x)$ имеем $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=1$ и, следовательно, функция $g(x)$ непрерывна при $x=0$.

Докажем, что $g(x)$ непрерывна при любом x. Имеют место равенства:

$$\lim_{y\to 0}[g(x+y)+g(x-y)]=2g(x),$$
$$\lim_{y\to 0}[2g(x+y)\,g(x-y)]=\lim_{y\to 0}[g(2x)+g(2y)]=$$
$$=g(2x)+1=2g^2(x),$$

откуда

$$\lim_{y\to 0}[g(x+y)-g(x-y)]^2=0,\quad \lim_{y\to 0}[g(x+y)-g(x-y)]=0$$

и

$$\lim_{y\to 0} g(x+y)=\lim_{y\to 0} g(x-y)=g(x).$$

Существование разрывных решений уравнения (I) доказывается на основании базиса Хамеля всех действительных чисел с использованием аксиомы произвольного выбора. На этом вопросе мы задерживаться не будем [1]), ограничившись рассмотрением лишь непрерывных решений.

Из (1, в) следует, что $g(x)\geqslant -1$. Возможны два случая:

Случай 1. В какой-то точке x_0 $g(x_0)=-1$. Тогда, в силу (1, в), $g\left(\frac{x_0}{2}\right)=0$, т. е. существует нуль функции $g(x)$. Так как $g(0)=1$, то $x_0\neq 0$, а учитывая четность функции $g(x)$ можно принять, что $x_0>0$. Рассмотрим множество всех нулей функции $g(x)$, расположенных на оси OX справа от точки $x=0$. Оно огра-

[1]) Об этом см.: Ю. М. Гайдук, Принцип полной математической индукции, его эквиваленты и обобщения, «Математика в школе» (1950), № 2.

ничено снизу и, следовательно, имеет нижнюю грань, которую мы обозначим через $\frac{\lambda}{2}$. Очевидно, что в силу непрерывности $g(x)$, $g\left(\frac{\lambda}{2}\right)=0$ и в силу (1, а) $\lambda\neq 0$. Это значит, что существует наименьший положительный нуль функции $g(x)$. В интервале $\left(0, \frac{\lambda}{2}\right)$ функция $g(x)$ сохраняет свой знак, а так как $g(0)=1$, то в интервале $\left(0, \frac{\lambda}{2}\right)$ $g(x)>0$.

Из (1, в) находим

$$g\left(\frac{x}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+g(x)}{2}}, \tag{2}$$

причем для $0<\frac{x}{2}<\frac{\lambda}{2}$ перед корнем надлежит ставить знак «плюс». Из (I) находим

$$g[(n+1)x]+g[(n-1)x]=2g(nx)\,g(x). \tag{3}$$

Докажем, что

$$g(x)=\cos\frac{\pi x}{\lambda}. \tag{4}$$

В самом деле, функция $\cos\frac{\pi x}{\lambda}$ удовлетворяет уравнению (I), и равенство (4) имеет место при $x=\frac{\lambda}{2}$. В силу (2) равенство (4) имеет место при $x=\frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{8}, \ldots$, т. е. при $x=\frac{\lambda}{2^m}$ (m — любое натуральное число). В силу (3) равенство (4) имеет место при $x=\frac{n\lambda}{2m}$ (n, m — любые натуральные числа). Пусть x — произвольное положительное число. Перейдя в равенстве (4) к пределу при $\frac{n\lambda}{2^m}\longrightarrow x$ и учитывая непрерывность $g(x)$ и $\cos\frac{\pi x}{\lambda}$, устанавливаем равенство при произвольном $x\geqslant 0$. Для $x<0$ оно следует из четности функции.

Итак, в рассматриваемом случае $g(x)=\cos\frac{\pi x}{\lambda}$.

Случай 2. $g(x)>-1$ при любом x. Тогда, как следует из (2), $g(x)\neq 0$, и в силу (1, а) и непрерывности $g(x)$ имеем $g(x)>0$. Применяя последовательно (1, в), находим

$$g(x)>\frac{1}{2}\sqrt{2},\quad g(x)>\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$g(x)>\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \ldots$$

и, следовательно,

$$g(x) \geqslant \lim \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}{2} = 1.$$

Рассмотрим функцию $\operatorname{ch} ax = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax})$ [1]), которая удовлетворяет (I). Задав в точке $x_0 \neq 0$ значение функции $g(x_0) \geqslant 1$, найдем такое значение параметра a, при котором $\operatorname{ch} ax_0 = g(x_0)$. В силу (2) и (3) имеем $\operatorname{ch} \frac{nax_0}{2^m} = g\left(\frac{nx_0}{2^m}\right)$ при любых натуральных m и n. Переходя к пределу в последнем равенстве при $\frac{nx_0}{2^m} \to x$ и учитывая непрерывность обеих функций, находим, что $g(x) = \operatorname{ch} ax$ при $x \geqslant 0$ и в силу четности функций также при $x < 0$. Итак, в рассматриваемом случае $g(x) \equiv \operatorname{ch} ax$.

Таким образом, уравнение (1) имеет непрерывные решения лишь вида:

$$g(x) \equiv 0, \quad g(x) \equiv 1, \quad g(x) = \cos ax, \quad g(x) = \operatorname{ch} ax \qquad (a \neq 0).$$

Ю. М. Гайдук использовал уравнение (I) для аналитического определения аналитического косинуса. Нам кажется целесообразным дать следующее определение.

Функцию $g(x)$, определенную на всей действительной оси, назовем аналитическим косинусом, если 1) *она удовлетворяет уравнению* (I) *при любых x и y*, 2) *в некотором интервале* $0 < x < \frac{\lambda}{2}$ $g(x) > 0$, 3) $g\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 0$.

В этом определении условие непрерывности $g(x)$, имеющееся у Ю. М. Гайдука, заменено условием ее положительности в интервале $\left(0, \frac{\lambda}{2}\right)$, но, как легко доказать, они эквивалентны. В самом деле, выше мы видели, что из непрерывности функции $g(x)$ следует, что она положительна в интервале $\left(0, \frac{\lambda}{2}\right)$. С другой стороны, из условий, определяющих функцию $g(x)$, находим последовательно

$$g\left(x+\frac{\lambda}{2}\right)+g\left(x-\frac{\lambda}{2}\right)=0, \quad g\left(x+\frac{\lambda}{2}\right)=-g\left(x-\frac{\lambda}{2}\right);$$

отсюда $g(x+\lambda) = -g(x)$. Далее,

$$g(x)-g(y)=g(x)+g(y+\lambda)=2g\left(\frac{x+y}{2}+\frac{\lambda}{2}\right)g\left(\frac{x-y}{2}-\frac{\lambda}{2}\right)=$$
$$=-2g\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{x-y}{2}\right).$$

Пусть $0 \leqslant y < x \leqslant \frac{\lambda}{2}$. Тогда $0 \leqslant \frac{\lambda}{2} - \frac{x+y}{2} < \frac{\lambda}{2}$ и $0 \leqslant \frac{\lambda}{2} - \frac{x-y}{2} < \frac{\lambda}{2}$

[1]) При $a = 0$ имеем предельный случай $\operatorname{ch} ax \equiv 1$.

и в силу условий (1, 2 и 3) $g(x)-g(y)<0$, т. е. $g(x)$ — функция, убывающая на сегменте $\left[0, \frac{\lambda}{2}\right]$. Отсюда следует существование одностороннего предела в точке $x=0$ и, как выше доказано, непрерывность функции $g(x)$ при любом x [1]).

2. Легко видеть, что $\sin x$ является решением функционального уравнения (II). Наша цель — найти все непрерывные функции $f(x)$ действительного переменного, удовлетворяющие (II) при любых действительных x и y.

Уравнение (II) имеет тривиальное решение $f(x)\equiv 0$. Мы в дальнейшем примем, что $f(x)\not\equiv 0$.

Положив в (II) $x=y=0$, находим $f(0)=0$. Положив $x=0$, находим $-f^2(y)=f(y)\cdot f(-y)$ или, заменяя y на $-y$, $-f^2(-y)=f(-y)\cdot f(y)$, откуда следует, что $f(y)$ и $f(-y)$ обращаются в нуль лишь одновременно и что $f(-y)=-f(y)$.

Докажем теперь, что решения уравнения (II) либо непрерывны на всем множестве действительных чисел, либо в каждой точке терпят разрыв и притом такой, что функция не имеет односторонних пределов.

Пусть существует конечный односторонний предел функции $f(x)$ в точке $x=a$, например правосторонний. Из $f^2(a+x)-f^2(x)=f(a+2x)\cdot f(a)$ заключаем о существовании правостороннего предела $f^2(x)$ в точке $x=0$. Но из (II) следует $f^2(2x)-f^2(x)=f(3x)f(x)$. Возведя обе части в квадрат и переходя к пределу при $x\to 0^+$, находим, что $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$. В силу нечетности функции $f(x)$ и $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$; следовательно, $f(x)$ непрерывна в точке $x=0$.

Докажем теперь, что $f(x)$ непрерывна при любом x. В самом деле, из (II) находим

$$\lim_{y\to 0}[f(x+y)\cdot f(x-y)]=f^2(x) \quad \text{и} \quad \lim_{y\to 0}[f^2(x+y)-f^2(x-y)]=0,$$

откуда

$$\lim_{y\to 0}[f^2(x+y)+f^2(x-y)]^2=4f^4(x),$$
$$\lim_{y\to 0}[f^2(x+y)+f^2(x-y)]=2f^2(x)$$

и

$$\lim_{y\to 0} f^2(x+y)=f^2(x).$$

---

[1]) Можно идти и другим путем: установить непрерывность $g(x)$ при $x=0$ и ограниченность $g(x)$, а затем использовать вышеприведенное выражение для $g(x)-g(y)$.

Если $f(x)=0$ при каком-либо x, то $\lim\limits_{y\to 0} f^2(x+y)=0$ и $\lim\limits_{y\to 0} f(x+y)=0=f(x)$. При тех же значениях x, при которых $f(x)\neq 0$, из $f^2\left(x+\frac{y}{2}\right)-f^2\left(\frac{y}{2}\right)=f(x+y)\cdot f(x)$, переходя к пределу при $y\to 0$, находим

$$\lim_{y\to 0} f(x+y)=f(x).$$

Предложение доказано. В дальнейшем будем рассматривать лишь непрерывные решения уравнения (II).

Пусть α — такое число, что $f(\alpha)\neq 0$. Введем функцию

$$g(x)=\frac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{2f(\alpha)}. \tag{5}$$

Докажем, что

$$f(x+y)-f(x-y)=2f(y)\cdot g(x). \tag{6}$$

В самом деле, из (II) получаем: $f(y)[f(x+\alpha)-f(x-\alpha)]=$ $=f^2\left(\frac{x+y+\alpha}{2}\right)-f^2\left(\frac{x-y+\alpha}{2}\right)-f^2\left(\frac{x+y-\alpha}{2}\right)+f^2\left(\frac{x-y-\alpha}{2}\right)=$ $=f(\alpha)[f(x+y)-f(x-y)]$. Из (6) следует

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y). \tag{7}$$

Складывая (6) и (7), находим

$$f(x+y)=f(x)g(y)+g(x)f(y) \tag{8}$$

и, в частности, $f(2x)=2f(x)g(x)$. Применяя (6) и (5), находим

$$2f(\alpha)[g(x+y)+g(x-y)]=$$
$$=f(x+y+\alpha)-f(x+y-\alpha)+f(x-y+\alpha)-f(x-y-\alpha)=$$
$$=2f(y+\alpha)g(x)-2f(y-\alpha)g(x)=4f(\alpha)g(y)g(x),$$

откуда следует, что $g(x)$ удовлетворяет (I).

Функция $g(x)$ ввиду (5) непрерывна, и $g(0)=1$. Поэтому, как мы установили в п. 1, $g(x)$ может быть только функцией вида

$$g(x)\equiv 1, \quad g(x)=\cos ax, \quad g(x)=\operatorname{ch} ax \qquad (a\neq 0).$$

Положив в (8) $g(x)=1$, находим, что $f(x)$ удовлетворяет уравнению $f(x+y)=f(x)+f(y)$, непрерывные решения которого, как известно, имеют вид $f(x)=Ax$ (A — произвольная постоянная; в данном случае $A\neq 0$). Функция $f(x)=Ax$, как легко проверить, удовлетворяет (II).

Чтобы найти остальные решения (II), заметим, что

$$f(\alpha)[g(\alpha+x)-g(\alpha-x)]=\frac{1}{2}[f(2\alpha+x)-2f(x)-f(2\alpha-x)]=$$
$$=f(x)\,g(2\alpha)-f(x),$$

откуда $f(x)=f(\alpha)\,\frac{g(\alpha+x)-g(\alpha-x)}{g(2\alpha)-1}$. Подставляя $g(x)=\cos ax$, находим $f(x)=\frac{f(\alpha)}{\sin a\alpha}\sin ax=A\sin ax$, а подставляя $g(x)=\operatorname{ch} ax$, находим $f(x)=\frac{f(\alpha)}{\operatorname{sh} a\alpha}\operatorname{sh} ax=A\operatorname{sh} ax$ (A — *произвольная постоянная*, отличная от нуля).

Проверкой убеждаемся, что функции $A\sin ax$ и $A\operatorname{sh} ax$ удовлетворяют (II). Итак, уравнение (II) имеет непрерывные решения только вида

$$f(x)=Ax,\quad f(x)=A\sin ax,\quad f(x)=A\operatorname{sh} ax,$$

где A и α — произвольные постоянные [1]).

Результаты показывают, что уравнение (II) может быть использовано для аналитического определения тригонометрического синуса, разумеется, при некоторых дополнительных условиях. Эти дополнительные условия могут быть сформулированы по-разному. Нам кажется целесообразным дать следующее определение.

Аналитическим синусом назовем функцию $f(x)$, *определенную при всех действительных значениях аргумента и* 1) *удовлетворяющую при всех действительных* x *и* y *уравнению* (II), 2) *положительную в некотором интервале* $0<x<\frac{\lambda}{2}$ *и* 3) $f(\lambda)=0$, $f\left(\frac{\lambda}{2}\right)=1$.

Функция $f(x)$ совпадает с $\sin\frac{\pi x}{\lambda}$.

Обоснование определения и утверждения, что $f(x)=\sin\frac{\pi x}{\lambda}$, может легко быть получено.

3. Рассмотрим теперь другие функциональные уравнения, доставляемые теоремами сложения тригонометрических и гиперболических синуса и косинуса:

$$f(x+y)-f(x-y)=2f(y)\,g(x),\qquad \text{(III)}$$
$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\,g(y),\qquad \text{(IV)}$$
$$g(x+y)-g(x-y)=-2f(x)\,f(y),\qquad \text{(V)}$$
$$g(x+y)-g(x-y)=2f(x)\,f(y).\qquad \text{(VI)}$$

[1]) Здесь мы включаем также $f(x)\equiv 0$, что соответствует $A=0$ или $a=0$.

а) Уравнение (III) имеет очевидные решения: 1) $f(x)\equiv 0$, $g(x)$ — произвольная функция; 2) $g(x)\equiv 0$, $f(x)$ — произвольная постоянная.

Положим $f(x)\not\equiv 0$, $g(x)\not\equiv 0$. Из (III) легко выводим $f(-y)=-f(y)$, $g(-x)=g(x)$, $f(0)=0$, $g(0)=1$, $f(2x)=2f(x)g(x)$, откуда следует, что $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют уравнению (IV).

Перемножив (III) и (IV), приходим к уравнению (II), в котором вместо x и y подставлено соответственно $(x+y)$ и $(x-y)$. Предполагая, что $f(x)$ имеет в какой-либо точке односторонний предел или что $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, находим решения (II):

$$f(x)=Ax,\quad f(x)=A\sin ax,\quad f(x)=A\operatorname{sh} ax,$$

где A и a — произвольные постоянные, отличные от нуля. Соответствующие значения $g(x)$ находим из (III):

$$g(x)=1,\quad g(x)=\cos ax,\quad g(x)=\operatorname{ch} ax.$$

Этим исчерпываются все непрерывные решения уравнения (III), отличные от тривиальных.

б) Уравнение (IV) имеет очевидное решение $f(x)\equiv 0$, $g(x)$ — произвольная функция.

Предполагая $f(x)\not\equiv 0$ [и в силу этого и $g(x)\not\equiv 0$], находим из (IV) $g(-y)=g(y)$.

Пусть α — такое значение x, что $f(\alpha)\neq 0$. Положив в (IV) $x=\alpha$, находим $g(y)=\dfrac{f(\alpha+y)+f(\alpha-y)}{2f(\alpha)}$. В силу этого

$$g(x+y)+g(x-y)=$$
$$=\frac{1}{2f(\alpha)}[f(\alpha+x+y)+f(\alpha-x-y)+f(\alpha+x-y)+$$
$$+f(\alpha-x+y)]=$$
$$=\frac{1}{2f(\alpha)}[2f(\alpha+x)g(y)+2f(\alpha-x)g(y)]=2g(x)g(y).$$

Полученное соотношение позволяет решить уравнение (IV), подставив в него вместо $g(x)$ решения функционального уравнения (II). Но в этом случае нам пришлось бы решать три уравнения (если ограничиться непрерывными функциями). Чтобы сократить выкладки, пойдем другим путем. Заметим, что если функции $f(x)$, $g(x)$ удовлетворяет уравнению (IV), то ему удовлетворяют и функции $f_1(x)=f(x)-f(0)g(x)$, $g(x)$, в чем убеждаемся непосредственной подстановкой. Но для функции $f_1(x)$ имеем $f_1(x)+f_1(-x)=f(x)+f(-x)-2f(0)g(x)=0$, т. е. $f_1(-x)=-f_1(x)$. Поэтому пара функций $f_1(x)$, $g(x)$ удовлетворяет также уравнению (III), решенному выше.

Предполагая дальше, что $f(x)$ и $g(x)$ [следовательно, и $f_1(x)$] имеют в какой-либо точке правосторонние (или левосторонние) пре-

делы или же что $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ и $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$, находим решения уравнений (IV), исключая тривиальные:

$$g(x) = 1, \qquad f(x) = Ax + f(0),$$
$$g(x) = \cos ax, \qquad f(x) = A \sin ax + f(0) \cos ax,$$
$$g(x) = \operatorname{ch} ax, \qquad f(x) = A \operatorname{sh} ax + f(0) \operatorname{ch} ax,$$

где A, a, $f(0)$ — произвольные постоянные.

Очевидно, что уравнения

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x), \qquad f(x+y) + f(x+y) = 2f(x) \cos ay,$$
$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \operatorname{ch} ay,$$

имеют соответственно нетривиальные непрерывные решения:

$$f(x) = Ax + f(0), \quad f(x) = A \sin ax + f(0) \cos ax,$$
$$f(x) = A \operatorname{sh} ax + f(0) \operatorname{ch} ax\ ^{1}).$$

в) Рассмотрим теперь одновременно функциональные уравнения (V) и (VI)[2]). Оба уравнения имеют тривиальные решения: $f(x) \equiv 0$ $g(x) = \text{const}$.

Предположим $f(x) \not\equiv 0$. Из (V) и (VI) находим $f(0) = 0$, $g(-y) = g(y)$ и $f(-y) = -f(y)$, а также

$$g(2x) = g(0) \mp 2f^2(x). \tag{9}$$

Используя эти соотношения, приводим уравнения (V) и (VI) к виду: $f^2\left(\frac{x+y}{2}\right) - f^2\left(\frac{x-y}{2}\right) = f(x) f(y)$ или (II).

Предполагая, что функция $f(x)$ имеет конечный односторонний предел в какой-либо точке или что $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, находим решения:

$$f(x) = Ax, \quad f(x) = A \sin ax, \quad f(x) = A \operatorname{sh} ax.$$

Подставляя найденные значения функции $f(x)$ в (9), находим соответствующие значения функции:

$$g(x) = g(0) \mp \frac{A^2x^2}{2}, \quad g(x) = g(0) \mp A^2 \pm A^2 \cos ax,$$
$$g(x) = g(0) \pm A^2 \mp A^2 \operatorname{ch} ax,$$

причем верхние знаки для уравнения (V), а нижние для (VI).

---

[1]) Другой путь решения уравнения $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cos ay$ приведен в статье: Я. Ацель, Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной, Успехи матем. наук (1956), т. XI, вып. 3.

[2]) Впрочем, каждое из них может быть приведено к другому подстановкой $g(x) = -g_1(x)$.

г) Очевидно, что уравнения (III), (IV) и (V) [а также (VI)] могут служить для аналитического определения тригонометрических функций.

Приведем следующее определение.

Аналитическим синусом и аналитическим косинусом мы назовем функции $f(x)$ и $g(x)$, *определенные при всех действительных значениях аргумента и* 1) *удовлетворяющие уравнению* (III) *или* (IV) *или* (V) *при всех действительных значениях* x *и* y; 2) $f(x)$ $[g(x)]$ *положительна в некотором интервале*; 3) $f\left(\frac{\lambda}{2}\right)=1$; 4) $f(\lambda)=0$ $\left[g\left(\frac{\lambda}{2}\right)=0\right]$; 5) $f(0)=0$ [*при применении* (IV)], $g(0)=1$ [*при применении* (V)].

Функция $f(x)$ совпадает с $\sin\frac{\pi x}{\lambda}$, а $g(x)$ — с $\cos\frac{\pi x}{\lambda}$. Доказательство нетрудно провести.