

# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

Yu. N. Kuznetsov, V. P. Belousov, Numerical solution of unsteady heat transfer in turbulent flow of a fluid in a pipe, *TVT*, 1970, Volume 8, Issue 6, 1218–1227

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

January 23, 2025, 07:33:40



УДК 536.24:532.517.4

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НЕСТАЦИОНАРНОМ  
ТЕПЛООБМЕНЕ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ ТЕЧЕНИИ  
ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ**

*Ю. Н. Кузнецов, В. П. Белоусов*

На основании численного решения анализируются закономерности влияния нестационарности теплового режима на конвективный теплообмен при турбулентном течении в трубе.

**Постановка задачи**

Рассматривается нестационарный процесс конвективного теплообмена при гидродинамически стабилизированном стационарном турбулентном течении вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе. Тепловая нагрузка на внутренней поверхности стенки трубы изменяется во времени по произвольному закону, оставаясь постоянной по длине и периметру. В случае постоянства физических свойств теплоносителя, отсутствия внутренних источников тепла, пренебрежения диссипацией энергии в жидкости, теплопроводностью вдоль оси и теплоемкостью стенки процесс теплообмена описывается следующим уравнением энергии:

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + U(R) \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ R \gamma(R) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right] \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\theta|_{Fo=0} = \theta_0(R, Z), \quad (2)$$

$$\theta|_{Z=0} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} \Big|_{R=1} = q(Fo), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} \Big|_{R=0} = 0. \quad (5)$$

Здесь

$\theta = (t - t_e) / t_e$ ;  $R = r / r_0$ ;  $Fo = a\tau / r_0^2$ ;  $Z = (4x / d) / Pe(w / u_{max})$ ;  $U(R) = u(R) / u_{max}$ ;  $\gamma(R) = (a + a_T) / a = 1 + \epsilon Pr(\epsilon_T / \nu)$ ;  $q = q_w r_0 / \lambda t_e$ ;  $Pr = \nu / a$ ;  $Pe = wd / a$ ;  $t_e$  — температура жидкости на входе в трубу;  $x$  — продольная координата;  $r_0$  — радиус трубы;  $u_{max}$  — максимальная скорость жидкости (скорость на оси);  $a$  — теплопроводность жидкости;  $a_T$  — турбулентная теплопроводность;  $\epsilon_T$  — турбулентная вязкость;  $\epsilon = (a_T) / (\epsilon_T)$ ;  $\theta_0(R, Z)$  — начальное поле температуры, соответствующее граничному условию  $\partial \theta / \partial R|_{R=1} = q(0)$ ;  $q_w$  — тепловой поток на стенке трубы.

Уравнение (1) есть линейное уравнение в частных производных второго порядка ультрапараболического типа с переменными коэффициентами. Аналитического решения краевой задачи (2) — (5) для уравнения (1) получить не удалось, поэтому для изучения влияния нестационарности теплового режима на процесс конвективного теплообмена было проведено численное решение.

Постановка краевых условий для уравнения (1) имеет особенность: как следует из результатов работы [1], единственность решения уравнения (1) в области  $Fo \leq Z / U_{\max}$  обеспечена заданием условий на поверхности канала и условия при  $Fo = 0$ . В области же  $Fo \geq Z / U_{\max}$  задаются условия на поверхности канала и на плоскостях  $Z = 0$  и  $Z = U_{\max} Fo$ . Физически область  $Fo \leq Z / U_{\max}$  есть совокупность сечений, до которых в данный момент времени не дошла жидкость, находившаяся в начальный момент на входе в трубу; естественно, что теплообмен в этой области не зависит от условий на входе. В рассматриваемом случае  $U_{\max} = 1$ . Целесообразно ввести новую функцию  $\theta^* = \theta - \theta_0$ , что позволит свести задачу к случаю отсутствия начального теплообмена. Опуская индекс \*, будем в дальнейшем обозначать через  $\theta$  решение задачи (1) — (5) при нулевом начальном условии (2). В силу линейности задачи решение для любых начальных условий найдется из данного простым суммированием. Поскольку при этом в области  $Fo \leq Z$  ни коэффициенты уравнения, ни условия однозначности от  $Z$  не зависят, то и  $\theta$  при  $Fo \leq Z$  не зависит от  $Z$  и описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ R \gamma(R) \frac{\partial \theta}{\partial R} \right]. \quad (6)$$

Используя такой же подход как и в работе [2], вводя функцию  $V = \theta / q(Fo)$  можно показать, что в рассматриваемом случае нестационарного теплообмена поле температуры  $V$  и, следовательно, все характеристики процесса теплообмена, зависят как от безразмерных чисел, используемых в стационарном случае, так и от числа  $K_q(Fo)$ , характеризующего влияние переменности граничного условия во времени на процесс теплообмена.

По определению

$$K_q(Fo) = d \ln q(Fo) / dFo. \quad (7)$$

В отличие от «стационарных» чисел  $K_q(Fo)$  есть функция, и для строгого подобия процессов нестационарного теплообмена необходимо, в частности, равенство  $K_q$  во все рассматриваемые моменты, т. е. равенство функций  $K_q(Fo)$ . В этом смысле некорректны предпринимаемые в ряде работ попытки построения обобщающих зависимостей для нестационарного теплообмена, опирающиеся на предположение, что если равны значения  $K_q$  в данный момент времени, то при прочих равных условиях равны и числа  $Nu$ , независимо от совпадения функций  $K_q(Fo)$  в предшествующие моменты времени\*.

Следует отметить, что закономерности стабилизации числа  $Nu$  во времени, подробно рассмотренные в работе [3], связаны со стабилизацией критерия  $K_q$  с ростом времени [2].

### Методика численного решения

Конечно-разностная аппроксимация уравнения (6) проводилась по четырехточечной неявной разностной схеме [4], устойчивой при любом выборе шагов по  $Fo$  и по  $R$ . Для аппроксимации уравнения (1) была выбрана пятиточечная неявная разностная схема с движением вперед как по  $Fo$ , так и по  $Z$ . В плоскости  $Fo, Z$  прямая  $Z = Fo$  должна проходить через

\* Последнее предположение справедливо только при больших  $Fo$  ( $Fo \rightarrow \infty$ ).

узлы сетки, для чего необходимо равенство шагов по  $Z$  и  $Fo$ . Можно показать, что при таком условии разностная схема устойчива при любых шагах по  $R$ . Счет по  $Fo$  велся послойно. На каждом слое система конечно-разностных уравнений решалась методом прогонки [5]. Помимо вычисления поля температуры вычислялись также локальные значения средней калориметрической температуры жидкости  $\theta_j$ , температуры стенки  $\theta_w$  и числа  $Nu$ .

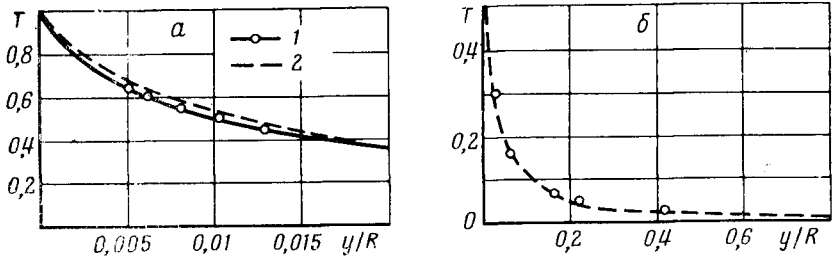


Рис. 1. Сопоставление полей температуры:  
1 — эксперимент, 2 — теория; вода:  $Pr = 6,2$ ;  $Re = 41\ 000$

Для описания поля скорости в турбулентном потоке после сравнительных расчетов была выбрана зависимость, полученная Рейхардтом [6]

$$\frac{u}{v^*} = 2,5 \ln \left[ (1 + 0,4\eta) \frac{3}{2} \frac{1 + R}{1 + 2R^2} \right] + 7,8 \left( 1 - e^{-\eta/\eta_0} - \frac{\eta}{\eta_0} e^{-0,33\eta} \right). \quad (8)$$

Здесь  $v^*$  — динамическая скорость;  $\eta = r_0^+(1 - R)$ ;  $r_0^+ = r_0 v^* / \nu = Re \sqrt{\xi/32}$ . Коэффициент сопротивления  $\xi$  вычислялся по формуле Филоненко [7]. Коэффициент турбулентного обмена импульса как и в работе [8] рассчитывался по формуле [6]

$$\frac{\varepsilon_\tau}{\nu} = 0,4 \left( \eta - \eta_0 \operatorname{th} \frac{\eta}{\eta_0} \right); \quad \eta_0 = 11. \quad (9)$$

Следует отметить, что (9) дает завышенные значения  $\varepsilon_\tau/\nu$  в центральной зоне потока, однако, это незначительно сказывается на распределении температуры ввиду малости градиента температуры в ядре потока. Действительно, сравнительные расчеты показали, что отличие результатов решения с использованием (9) или при описании  $\varepsilon_\tau/\nu$  в ядре ( $\eta > 50$ ) по эмпирической формуле [6]  $\varepsilon_\tau/\nu = (0,4/3)\eta(R^2 + 0,5)(R + 1)$  в рассматриваемой области  $Re$  и  $Pr$  лежит в пределах точности решения.

Погрешности численного решения данной задачи могут быть разделены на две группы: во-первых, это погрешности, связанные с приближенностью модели турбулентного потока, во-вторых, это погрешности, обусловленные приближенностью конечно-разностной аппроксимации уравнения и граничных условий.

Погрешности первой группы могут быть оценены путем сравнения поля температуры и характеристик теплообмена на участке стабилизированного по  $Fo$  и  $Z$  теплообмена с экспериментальными результатами, либо с результатами расчетов по общепринятым в стационарном случае формулам.

На рис. 1 приведено сравнение расчетного поля температуры  $T = (\theta - \theta_a)/(\theta_w - \theta_a)$  ( $\theta_a$  — температура на оси) на стабилизированном участке с экспериментальным, взятым из работы [9]. Расчетные и экспериментальные поля температур как качественно, так и количественно согласуются между собой. Расчетное значение числа  $Nu$  отличается от экспериментального на 1,5%. Небольшие отличия значений температуры в ламинарном подслое объясняются, по-видимому, как возможными неточностями экспериментальных измерений температуры в пристенной области,

так и несовершенством модели турбулентного обмена. В частности, является спорной гипотеза о постоянстве  $\epsilon$  как по радиусу, так и с изменением числа  $Re$ . Ввиду отсутствия обоснованных рекомендаций по выбору  $\epsilon$ , в дальнейших расчетах принимается  $\epsilon = 1$ .

Погрешности второй группы оцениваются построением последовательности решений, соответствующих убывающей последовательности шагов.

Анализ показывает, что точность численного решения в рассматриваемом случае определяется в основном погрешностями в описании радиального переноса тепла. В том диапазоне параметров, в котором проводи-

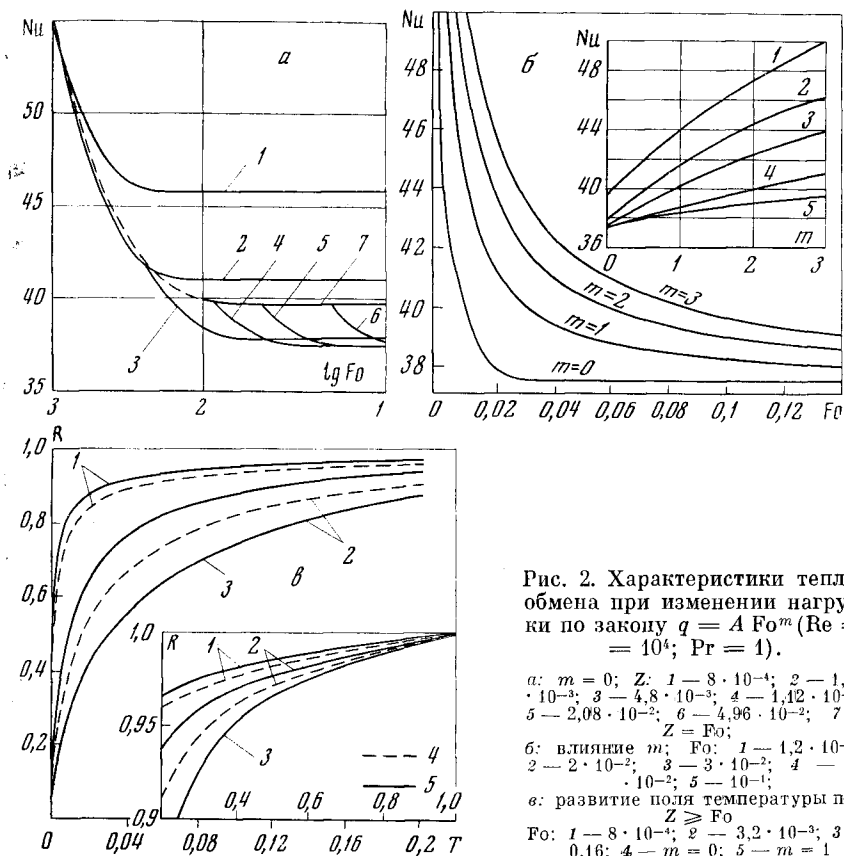


Рис. 2. Характеристики теплообмена при изменении нагрузки по закону  $q = A Fo^m$  ( $Re = 10^4$ ;  $Pr = 1$ ).

а:  $m = 0$ ;  $Z$ : 1 —  $8 \cdot 10^{-4}$ ; 2 —  $1,6 \cdot 10^{-3}$ ; 3 —  $4,8 \cdot 10^{-3}$ ; 4 —  $1,42 \cdot 10^{-2}$ ; 5 —  $2,08 \cdot 10^{-2}$ ; 6 —  $4,96 \cdot 10^{-2}$ ; 7 —  $Z = Fo$ ;  
 б: влияние  $m$ ;  $Fo$ : 1 —  $1,2 \cdot 10^{-2}$ ; 2 —  $2 \cdot 10^{-2}$ ; 3 —  $3 \cdot 10^{-2}$ ; 4 —  $6 \cdot 10^{-2}$ ; 5 —  $10^{-1}$ ;  
 в: развитие поля температуры при  $Z \geq Fo$   
 $Fo$ : 1 —  $8 \cdot 10^{-4}$ ; 2 —  $3,2 \cdot 10^{-3}$ ; 3 — 0,16; 4 —  $m = 0$ ; 5 —  $m = 1$

лось численное решение задачи, ошибка не превышает 3%. Численное решение проведено для различных законов изменения нагрузки во времени в следующей области параметров потока:

$$10^4 \leq Re \leq 10^6 \quad \text{при} \quad Pr = 1,$$

$$0,7 \leq Pr \leq 100 \quad \text{при} \quad Re \leq 2 \cdot 10^5.$$

### Результаты численного решения

Как показано выше, локальная относительная температура в рассматриваемой задаче зависит от следующих величин:

$$V = V(R, Z, Fo, Re, Pr, K_r(Fo)), \quad (10)$$

при этом  $Nu = 2 / (V_w - V_f)$ .

Поскольку функция  $K_q(\text{Fo})$  определяется функцией  $q(\text{Fo})$ , то вначале рассмотрим влияние закона изменения тепловой нагрузки на процесс нестационарного теплообмена при фиксированном значении  $\text{Re} = 10^4$  и  $\text{Pr} = 1$ , при этом  $w / u_{\max} = 0,784$ .

**Законы вида  $q(\text{Fo}) = A\text{Fo}^m$ .** В этом случае  $K_q = m/\text{Fo}$  и, во-первых, не зависит от множителя  $A$ , ввиду чего в дальнейшем взято  $A = 1$ . (Естественно, что и поле температуры  $V$ , и число  $\text{Nu}$  не зависят от  $A$ .) Во-вторых,  $\lim_{\text{Fo} \rightarrow \infty} K_q(\text{Fo}) = 0$  и, следовательно, с ростом  $\text{Fo}$  влияние нестационар-

ности на теплообмен уменьшается, притом тем быстрее, чем быстрее стремится  $K_q$  к нулю, т. е. чем меньше  $m$ . Наименьшего влияния нестационарности следует ожидать при  $m = 0$ . Аналогично [2] можно показать, что через некоторое время поле температуры  $V$ , а вместе с ним и число  $\text{Nu}$  стабилизируются во времени, принимая те же значения, которые имеют место при одинаковых условиях в стационарном случае ( $\text{Nu}_0$ ). На рис. 2, а представлены результаты решения для скачкообразного изменения нагрузки ( $m = 0$ ). В этом случае  $K_q(\text{Fo})$  есть  $\delta$ -функция с центром в нуле. Относительные температура стенки  $V_w$  и среднекалориметрическая температура жидкости  $V_j$ , возрастая, стабилизируются во времени, причем тем быстрее, чем ближе ко входу расположено сечение. В начальный момент число  $\text{Nu}$  принимает во всех сечениях бесконечно большие значения, а затем достаточно быстро падает, что аналогично изменению числа  $\text{Nu}$  по длине трубы на входном участке при стационарном теплообмене. Во всех сечениях области  $Z \geq \text{Fo}$  в данный момент  $\text{Fo}$  одинаков. Как только граница области  $\text{Fo} = Z$  проходит через данное сечение, число  $\text{Nu}$  начинает изменяться более интенсивно, ибо перестройка профиля температуры вызывается не только радиальным градиентом температуры, но и градиентом температуры вдоль оси канала (конвективный перенос тепла). При достаточно больших  $Z$  ( $Z \geq 0,03$ ) характерно наличие двух стабилизаций во времени: вначале, пока  $Z$  находится в области  $Z \geq \text{Fo}$ , наступает стабилизация  $\text{Nu}$  в этой области ( $\text{Nu}_\infty = 39,7$ ), а затем в данном сечении  $\text{Nu}$  стабилизируется в области  $Z \leq \text{Fo}$ , достигая значений, совпадающих со стационарным случаем ( $\text{Nu}_\infty = \text{Nu}_0 = 37,4$ ). Соответственно и для изменения  $\text{Nu}$  по  $Z$  характерны при  $\text{Fo} > 0,03$  два участка стабилизированного по  $Z$  теплообмена; один в области  $Z \leq \text{Fo}$ , другой при  $Z \geq \text{Fo}$ .

Аналогичные результаты были получены В. Д. Виленским\* при рассмотрении нестационарного теплообмена при ламинарных режимах.

Время стабилизации поля температуры, а вместе с ним и числа  $\text{Nu}$  тем меньше, чем больше суммарный градиент температуры в данном сечении (а следовательно, чем ближе ко входу расположено сечение). Если находить безразмерное время стабилизации  $\text{Fo}^*$  из условия  $\text{Nu}(\text{Fo}^*) = 1,02\text{Nu}_\infty$ , то зависимость  $\text{Fo}^*$  от  $Z$  может быть аппроксимирована формулой

$$\text{Fo}^* = \begin{cases} 0,0033[1 - \exp(-1375Z)] + 1,36Z & Z \leq 0,004, \\ 0,0033 + 1,36Z & Z \geq 0,004. \end{cases} \quad (14)$$

В области  $Z \geq \text{Fo}$   $\text{Fo}^* = 0,007$ . Как следует из (10), скачкообразное изменение нагрузки оказывает наименьшее влияние на процесс конвективного теплообмена. В частности, время стабилизации числа  $\text{Nu}$  в этом случае наименьшее. При  $m \neq 0$  число  $\text{Nu}$  качественно изменяется также, как и в случае  $m = 0$ . Рис. 2, б иллюстрирует изменение числа  $\text{Nu}$  во времени для разных  $m$ . Чем выше  $m$ , тем в данный момент времени в данном сечении число  $\text{Nu}$  больше отличается от стабилизированного значения.

Следует отметить, что скорость изменения тепловой нагрузки при  $m \geq 1$  и  $\text{Fo} < 0,5$  тем меньше, чем больше  $m$ . Таким образом, встречающиеся в литературе попытки обобщения данных по нестационарному теп-

\* В. Д. Виленский. Канд. дис., МЭИ, 1966.

лообмену с использованием в качестве параметра скорости изменения нагрузки, очевидно, неверны.

Время стабилизации теплообмена в данном сечении с ростом  $m$  возрастает, причем тем значительно, чем дальше от входа расположено сечение. Зависимость  $Fo^*$  от  $m$  для разных сечений близка к линейной и может быть описана формулами

$$Fo^*(m, Z) = Fo^*(0, Z) + b(Z)m \quad Fo \geq Z,$$

$$Fo^*(m) = 0,007 + 0,054m \quad Fo \leq Z,$$

$$b(Z) = 0,09[1 - \exp(-430Z)] = 0,09[1 - \exp(-0,135x/d)]. \quad (12)$$

Здесь  $Fo^*(0, Z)$  — время стабилизации  $Nu$  в данном сечении при скачке нагрузки, рассчитываемое по (11). Например, для турбулентного течения воды в трубе радиусом 10 мм при изменении тепловой нагрузки по закону  $q = Fo^3$  время стабилизации теплообмена в сечении  $x/d = 35$  со-

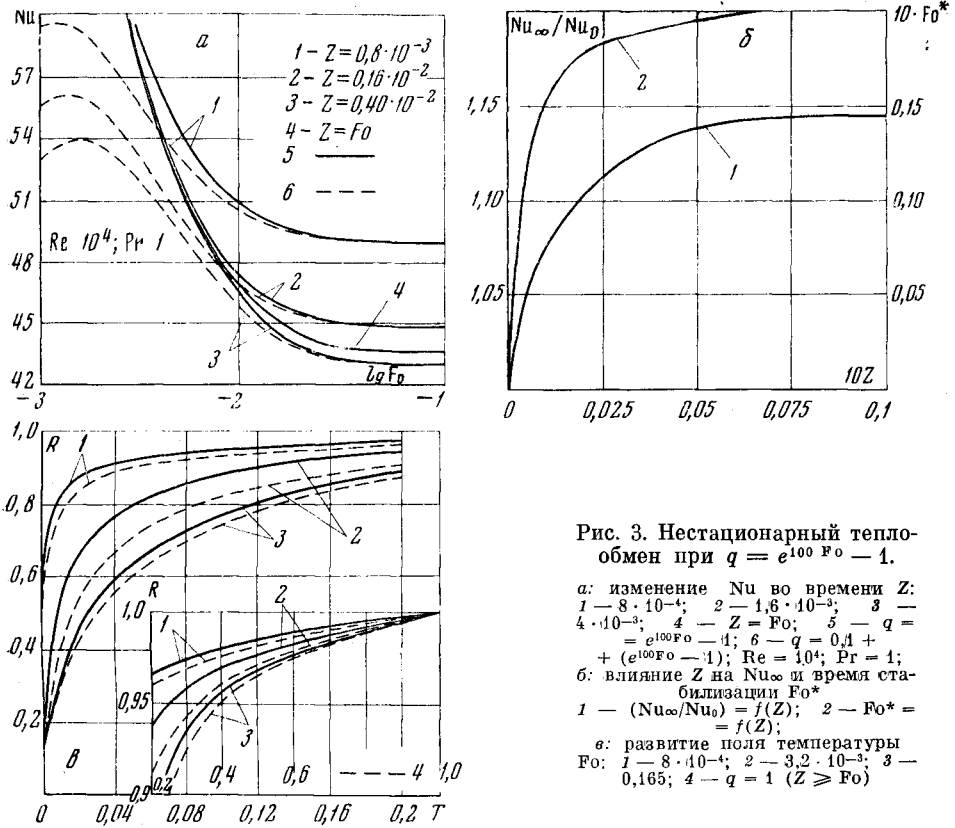


Рис. 3. Нестационарный теплообмен при  $q = e^{100 Fo} - 1$ .

a: изменение  $Nu$  во времени  $Z$ : 1 -  $8 \cdot 10^{-4}$ ; 2 -  $1,6 \cdot 10^{-3}$ ; 3 -  $4 \cdot 10^{-3}$ ; 4 -  $Z = Fo$ ; 5 -  $q = e^{100 Fo} - 1$ ; 6 -  $q = 0,1 + (e^{100 Fo} - 1)$ ;  $Re = 10^4$ ;  $Pr = 1$ ;  
 б: влияние  $Z$  на  $Nu_{\infty}$  и время стабилизации  $Fo^*$   
 1 -  $(Nu_{\infty}/Nu_0) = f(Z)$ ; 2 -  $Fo^* = f(Z)$ ;  
 в: развитие поля температуры  
 $Fo$ : 1 -  $8 \cdot 10^{-4}$ ; 2 -  $3,2 \cdot 10^{-3}$ ; 3 - 0,165; 4 -  $q = 1 (Z \geq Fo)$

ставляет  $\sim 30$  сек и возрастает пропорционально квадрату радиуса трубы.

Физически отличие характеристик теплообмена и, в частности, числа  $Nu$  от квазистационарных значений обусловлено перестройкой температурного профиля под действием изменяющейся нагрузки. На рис. 2, в представлено развитие профиля температуры  $T = (\theta - \theta_s) / (\theta_w - \theta_s)$  в области  $Fo \leq Z$  для скачкообразного и линейного законов изменения нагрузки. Вначале в каждый момент времени профиль температуры для линейного закона полнее ( $Nu$  больше), чем для скачка, а затем профили совпадают ( $Nu_{\infty}$  равны).

Законы вида  $q = A(e^{\alpha Fo} - 1)$ . Для них  $K_q(Fo) = \alpha / [1 - \exp(-\alpha Fo)]$ . От постоянного множителя  $A$  число  $K_q$  и теплообмен не зависят. В даль-

нейшем принято  $A = 1$ . С ростом  $Fo$  число  $K_q(Fo)$  стремится к постоянно-му значению  $\alpha$ .

На рис. 3, а представлено изменение числа  $Nu$  в случае экспоненциального закона для различных  $Z$ . Внешне картина изменения  $Nu$  похожа на описанную выше ( $q(Fo) \equiv 1$ ), однако имеется качественное различие: стабилизированные значения числа  $Nu$  в каждом сечении ( $Nu_\infty$ ) отличаются от квазистационарных значений ( $Nu_0$ ). Во входном сечении трубы это отличие, естественно, равно нулю; по мере роста  $Z$  (снижения продольного градиента температуры) оно возрастает, а затем стабилизируется по  $Z$  (рис. 3, б). Время стабилизации теплообмена  $Fo^*$  с ростом  $Z$  возрастает. Начиная с сечений, соответствующих приблизительно длине входного теплового участка,  $Fo^*$  зависит от  $Z$  линейно (рис. 3, б). С увеличением показателя  $\alpha$ , во-первых, в каждый момент  $Fo$   $K_q$  растет, во-вторых,

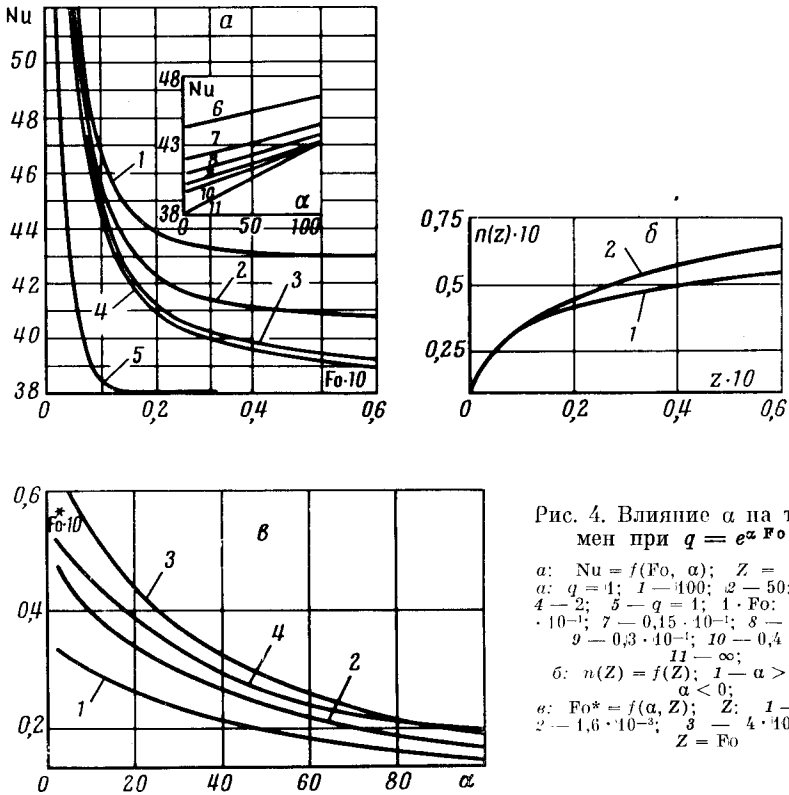


Рис. 4. Влияние  $\alpha$  на теплообмен при  $q = e^{\alpha Fo} - 1$ .

а:  $Nu = f(Fo, \alpha)$ ;  $Z = 0,4 \cdot 10^{-2}$ ;  $\alpha: q = 1; 1 - 100; 2 - 50; 3 - 10; 4 - 2; 5 - q = 1; 1 \cdot Fo: 6 - 0,1 \cdot 10^{-1}; 7 - 0,15 \cdot 10^{-1}; 8 - 0,2 \cdot 10^{-1}; 9 - 0,3 \cdot 10^{-1}; 10 - 0,4 \cdot 10^{-1};$   
 б:  $n(Z) = f(Z); 1 - \alpha > 0; 2 - \alpha < 0;$   
 в:  $Fo^* = f(\alpha, Z); Z: 1 - 8 \cdot 10^{-4}; 2 - 1,6 \cdot 10^{-3}; 3 - 4 \cdot 10^{-3}; 4 - Z = Fo$

растет предельное значение  $\lim_{Fo \rightarrow \infty} K_q(Fo)$  и, в-третьих, увеличивается скорость стремления  $K_q(Fo)$  к предельному значению.

Соответственно, число  $Nu$  в каждом сечении трубы в данный момент  $Fo$  тем выше, чем выше  $\alpha$  (рис. 4, а). С ростом  $Fo$  влияние  $\alpha$  на теплообмен в данном сечении увеличивается. При малых  $Fo$  функция  $K_q$  эквивалентна  $1 / Fo$  и не зависит от  $\alpha$ ; число  $Nu$  совпадает со значениями для случая  $q = AFo$ . С уменьшением  $\alpha$  область значений  $Fo$ , для которых справедлива данная эквивалентность, расширяется.

Стабилизированное значение числа  $Nu$  в данном сечении ( $Nu_\infty$ ) линейно возрастает с ростом  $\alpha$ . Скорость роста  $Nu_\infty$  вначале увеличивается по мере удаления сечения от входа, а затем стабилизируется по длине. Для расчета  $Nu_\infty$  можно предложить формулу  $Nu_\infty(Z, \alpha) = Nu_0(Z) + n(Z)\alpha$ . Здесь  $Nu_0(Z)$  — значение  $Nu$  в данном сечении в стационарном случае, а  $n(Z)$  представлено на рис. 4, б. В области  $Fo \leq Z$   $n(Z) = 0,425$ .



В случае  $\alpha < 0$  стабилизированные значения числа  $Nu$  лежат ниже стационарных и линейно уменьшаются с ростом  $|\alpha|$ . Скорость изменения  $Nu$  при этом больше, чем в случае  $\alpha > 0$  (рис. 4, б). Время стабилизации теплообмена  $Fo^*$  в данном сечении уменьшается с ростом  $\alpha$  (рис. 4, в), что находится в соответствии с увеличением при этом скорости стремления  $K_q(Fo)$  к предельному значению. Влияние  $\alpha$  на  $Fo^*$  растет с ростом  $Z$ , а затем стабилизируется по  $Z$ .

На рис. 3, в показано развитие поля температуры в области  $Fo \leq Z$  для экспоненциального закона изменения нагрузки при  $\alpha = 100$ . Во все моменты времени профиль температуры для данного закона более заполнен, чем при скачке нагрузки. С ростом  $Fo$  профиль стабилизируется во

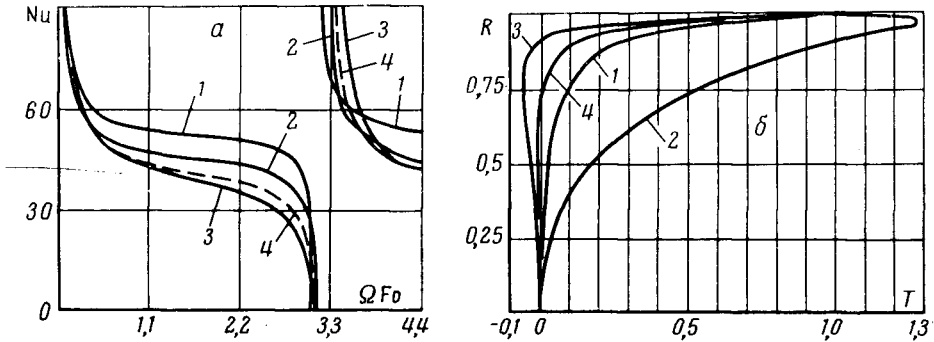


Рис. 5. Нестационарный теплообмен при  $q = A \sin 100 Fo$ .

а:  $Nu = f(Fo)$ ;  $Z$ : 1 —  $8 \cdot 10^{-4}$ ; 2 —  $1,6 \cdot 10^{-3}$ ; 3 —  $1,6 \cdot 10^{-2}$ ; 4 —  $Z = Fo$ ;  
 б: развитие поля температуры при  $Z \geq Fo$ ,  $Fo$ : 1 —  $1,12 \cdot 10^{-2}$ ; 2 —  $3,29 \cdot 10^{-2}$ ; 3 —  $3,40 \cdot 10^{-2}$ ; 4 —  $3,65 \cdot 10^{-2}$ .

времени, оставаясь более заполненным, чем при скачке ( $Nu_\infty > Nu_0$ ) после стабилизации.

Влияние начального теплообмена на процесс нестационарного теплообмена иллюстрируется примером закона  $q = \beta + (e^{\alpha Fo} - 1)$  (рис. 3, а). Наличие начального теплообмена приводит к тому, что глубина перестройки профиля температуры в каждом сечении уменьшается, а следовательно, и влияние нестационарности режима на теплообмен уменьшается и зависит от относительного уровня начального теплообмена. Число  $K_q(Fo)$  в данном случае равно  $K_q = \alpha / \{ \beta \exp(-\alpha Fo) + [1 - \exp(-\alpha Fo)] \}$  и с ростом  $Fo$  стремится к пределу  $\alpha$ , принимая, однако, при каждом  $Fo$  меньшие значения, чем в случае отсутствия начального теплообмена. Величина отличия  $K_q$  определяется членом  $\beta \exp(-\alpha Fo)$ , зависит от соотношения между  $\beta$  и  $\alpha$  и уменьшается с ростом  $Fo$ . Число  $Nu$  в начальный момент времени в данном сечении имеет стационарное значение, затем увеличивается, проходит через максимум тем больший, чем меньше отношение  $\beta / \alpha$ , и при тем меньших временах, чем меньше  $Z$ , а в дальнейшем приближается к кривой  $Nu(Fo)$  для данного сечения в случае отсутствия начального теплообмена.

**Синусоидальный закон**  $= A \sin \Omega Fo$ . В качестве иллюстрации на рис. 5 представлены результаты численного решения для случая  $q = \sin 100 Fo$ . При этом  $K_q(Fo) = 100 \operatorname{ctg} 100 Fo$ . Соответственно и число  $Nu$  в данном сечении с ростом времени принимает не только положительные, но и отрицательные значения, а также периодически претерпевает разрыв второго рода при значениях  $Fo$ , зависящих от расположения сечения по длине трубы (рис. 5, а). Такое изменение числа  $Nu$  обусловлено неодинаковой тепловой инерционностью различных слоев жидкости, вследствие чего при значениях  $Fo$ , когда  $q = 0$ , а  $\theta_w - \theta_f > 0$  ( $Nu = 0$ ), и в силу непрерывности для некоторых последующих  $Fo$ , когда  $q < 0$ , и  $\theta_w - \theta_f > 0$  ( $Nu < 0$ ) распределение температуры таково, что при  $\theta_w > \theta_f$

вблизи стенки существует слой, в котором местная температура больше, чем  $\theta_w$  (рис. 5, б). При  $\theta_w - \theta_f = 0$  число Nu претерпевает разрыв. Стабилизация теплообмена во времени в этом случае происходит следующим образом: начиная с некоторых  $Fo$  функция  $Nu(Fo)$  в данном сечении становится периодической, принимая вид

$$Nu = c_1(Z, \Omega) + c_2(Z, \Omega) \operatorname{ctg} \Omega Fo,$$

$c_1$  и  $c_2$  — функции от  $Z$  и  $\Omega$ .

**Влияние числа Re.** С ростом числа Re увеличивается интенсивность переноса тепла как в радиальном, так и в осевом направлениях, что приводит к уменьшению «инерционности» процесса теплообмена, а следовательно, и к уменьшению влияния нестационарности (рис. 6, а). При фиксированном  $Fo$  в данном сечении число Nu в процессе нестационарного теплообмена тем меньше отличается от стабилизированного значения, чем больше Re. С уменьшением  $Fo$  влияние Re уменьшается. Время стаби-

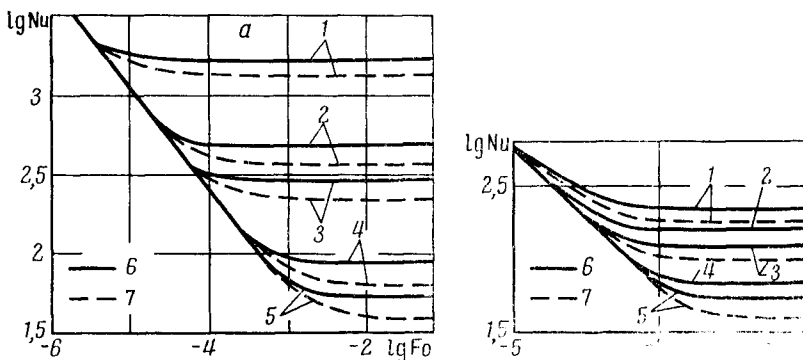


Рис. 6. Влияние Re и Pr на нестационарный теплообмен.

а:  $Pr = 1$ ; 1 —  $Re = 10^6$ ; 2 —  $2 \cdot 10^5$ ; 3 —  $10^5$ ; 4 —  $2 \cdot 10^4$ ; 5 —  $10^4$ ; 6 —  $x/d = 1,28$ ; 7 —  $Z = Fo$ ;  
 б:  $Re = 10^4$ ; 1 —  $Pr = 50$ ; 2 —  $20$ ; 3 —  $10$ ; 4 —  $2$ ; 5 —  $1$ ; 6 —  $x/d = 6$ ; 7 —  $Z = Fo$

лизации теплообмена в данном сечении с ростом числа Re снижается и в случае скачка нагрузки может быть найдено по формуле

$$Fo^*(Re, Z) = Fo^*(10^4, Z) (Re / 10^4)^{-1,15}. \quad (13)$$

Здесь  $Fo^*(10^4, Z)$  — время стабилизации теплообмена в данном сечении при  $Re = 10^4$ ,  $Pr = 1$ , вычисленное по (11).

**Влияние числа Pr.** Поскольку с ростом числа Pr увеличивается интенсивность переноса тепла в радиальном направлении, то качественно влияние числа Pr на процесс нестационарного теплообмена аналогично влиянию числа Re (рис. 6, б). Однако снижение влияния нестационарности на теплообмен с ростом Pr значительно меньше, чем при росте Re.

Время стабилизации теплообмена в данном сечении с ростом Pr уменьшается и в случае скачка нагрузки может быть найдено по формуле

$$Fo^*(Pr, Z) = Fo^*(1, Z) Pr^{n(x/d)}, \quad (14)$$

$$n(x/d) = 1 - 1/2 \exp(-0,71x/d) \quad (15)$$

$Fo^*(1, Z)$  — время стабилизации при  $Pr = 1$ ,  $Re = 10^4$ , вычисленное по (11).

Из результатов численного решения (рис. 6) следует, что квазистационарная зависимость числа Nu от Re и Pr в данный момент времени и в данном сечении имеет место только для стабилизированного по времени теплообмена. В связи с этим проводимые в некоторых работах попытки обобщения опытных данных по нестационарному теплообмену, основан-

ные на предложении о квазистационарной зависимости нестационарного числа  $Nu$  от  $Re$  и  $Pr$ , представляются необоснованными. Для исключения влияния  $Re$  и  $Pr$ , по-видимому, необходимо получить такое безразмерное уравнение энергии, в котором коэффициенты не зависели бы от  $Re$  и  $Pr$ . Один из путей к этому — использование при приведении уравнения энергии к безразмерному виду наряду с коэффициентом температуропроводности жидкости коэффициента турбулентной температуропроводности, осредненного по сечению.

В настоящей работе построение обобщающих зависимостей по результатам численного решения не производится, поскольку получение расчетных формул для нестационарного теплообмена целесообразно проводить по методике, предложенной в работе [2].

Всесоюзный теплотехнический институт  
им. Ф. Э. Дзержинского

Поступила в редакцию  
30 III 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. С. Пискунов. Математический сборник, нов. сер., I, в. 6, 1936.
  2. Ю. Н. Кузнецов. Теплофизика высоких температур, 7, № 4, 1969.
  3. В. Д. Виленский. Теплофизика высоких температур, 4, № 6, 1966.
  4. Р. Д. Рихтмайер. Разностные методы решения краевых задач. Изд. иностр. лит., 1960.
  5. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. «Наука», 1966.
  6. H. Reichardt. Z. angew. Math. u. Mech., № 7, 1951.
  7. Г. К. Филоненко. Теплоэнергетика, № 4, 1954.
  8. Б. С. Петухов, В. В. Кириллов. Теплоэнергетика, № 4, 1958.
  9. J. W. Smith, R. A. Gowen, B. O. Wasmund. Chem. Eng. Progr. Symp. Ser., 63, № 77, 1967.
-