*Функциональный анализ и его приложения*
1993, т. 27, вып. 1, с. 25–32

УДК 517.9

# Гармонический анализ и глобальное экспоненциальное отображение для компактных групп Ли

© 1993. А. Х. Дули, Н. Дж. Вилдбергер

## §0. Введение

Большая часть современного анализа на группах Ли использует переход от алгебры Ли $\mathfrak{g}$ к группе Ли $G$ с помощью экспоненциального отображения. Известно, что экспоненциальное отображение «плохо себя ведет» вдали от нуля в $\mathfrak{g}$, так что лучше всего рассматривать его лишь в окрестности нуля, где оно является диффеоморфизмом. Многие важные результаты справедливы лишь в такой окрестности.

Мы здесь предлагаем следующую новую точку зрения:

Основной принцип. *Истинное взаимоотношение между* $\mathfrak{g}$ *и* $G$ *проявляется только при рассмотрении всего экспоненциального отображения* $\exp\colon \mathfrak{g}\to G$.

В этой статье мы приводим доводы в пользу этого принципа в случае, когда $G$ — связная компактная группа Ли. Наши результаты связаны с некоторым отображением $\Phi$, которое мы называем *обертывающим отображением*. Рассмотрение его подсказано работами Дюфло, Вернь и Кашивары и Вернь. Пусть $j$ — аналитический квадратный корень из якобиана экспоненциального отображения, выделяемый условием $j(0)=1$. Для обобщенной функции $\nu$ с компактным носителем на $\mathfrak{g}$ определим обобщенную функцию $\Phi(\nu)$ на $G$ формулой

$$(\Phi(\nu), f) = (\nu, j\widetilde{f}),$$

где $f\in C^\infty(G)$, а $\widetilde{f}(X)=f(\exp X)$ для $X\in\mathfrak{g}$. Это определение имеет смысл также, если $\nu$ — суммируемая функция на $\mathfrak{g}$, в частности, если $\nu$ принадлежит пространству Шварца $S(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Наш первый результат относится к этому последнему случаю. Пусть $T\subseteq G$ — максимальный тор и $\mathfrak{t}$ — его алгебра Ли.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi\in S(\mathfrak{g})$ *есть* $G$*-инвариантная функция. Тогда* $\Phi(j\varphi)$ *будет* $G$*-инвариантной* $C^\infty$*-функцией на* $G$*, задаваемой формулой*

$$\Phi(j\varphi)(\exp H) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\varphi(H+\gamma)$$

*для всех* $H\in\mathfrak{t}$*, где* $\Gamma=\exp^{-1}(e)\cap\mathfrak{t}$.

В качестве приложения этого результата мы дадим короткое доказательство теоремы Пуассона–順 Планшереля для компактных групп Ли, полученной М. Вернь.

Наш следующий результат:

Теорема 2. *Пусть* $\mu$, $\nu$ *— две* $G$*-инвариантные обобщенные функции с компактным носителем на* $\mathfrak{g}$ *или две* $G$*-инвариантные суммируемые функции. Тогда*

$$\Phi(\mu*\nu)=\Phi(\mu)*\Phi(\nu),$$

*где свертка слева берется на* $\mathfrak{g}$*, а справа — на* $G$.

Этот результат тесно связан с формулой Хариш–Чандры. Он также аналогичен теореме Кашивары–Вернь [5] для разрешимых групп Ли. В случаи, когда $\mu$ и $\nu$ — обычные функции, это было известно из работы Френкеля [4].

Наше доказательство этого факта очень просто и опирается по существу только на формулу Кириллова для характеров.

С нашей точки зрения теорема 2 является одним из наиболее фундаментальных фактов гармонического анализа на компактных группах Ли. Из нее легко выводится описание $\widehat{G}$ в терминах старших весов (или целочисленных орбит коприсоединенного представления), формула Хариш–Чандры, формула Кириллова для характеров (и, следовательно, формула Г. Вейля), гипотеза Томпсона и много других интересных фактов. Эти приложения обсуждаются в последнем разделе. Кроме того, в теореме 2 не используются никакие сведения о структуре группы $G$ (максимальные торы, корни, веса и т.д.)

Поэтому она является прототипом общего результата, справедливого, возможно, для существенно более широкого класса групп.

Поскольку формулировка теоремы 2 не использует структуры группы $G$, она должна иметь доказательство, также не использующее этой структуры. Поэтому с нашей точки зрения интересна и важна следующая задача, которую мы пока не в состоянии решить.

Основная задача. *Найти доказательство теоремы* 2, *не использующее структурную теорию или теорию представлений.*

Возможно, что такое доказательство будет основано на нетривиальном тождестве, связанном с формулой Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа, которое будет иметь приложения и к другим классам групп Ли.

## §1. Обозначения

Пусть $G$ — связная компактная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $T$ — максимальный тор и $\mathfrak{t}$ — его алгебра Ли. Обозначим $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ форму Киллинга на $\mathfrak{g}$. Относительно присоединенного действия алгебры Ли $\mathfrak{t}$ алгебра $\mathfrak{g}$ разлагается в сумму

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \sum_{n} \mathfrak{g}_\alpha,$$

где $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{g}$ — двумерные вещественные подпространства в $\mathfrak{g}$, в которых оператор $\operatorname{ad} H$, $H \in \mathfrak{t}$, имеет в подходящем базисе матрицу $\alpha(H)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Множество функционалов $\alpha$ вместе с $-\alpha$ образует систему корней $R \subseteq \mathfrak{t}^*$. Это определение $R$ не вполне стандартно, но имеет то преимущество, что не требует перехода к комплексификации группы Ли $G$.

Выберем порядок на $R$, и пусть $R_+$ означает множество положительных корней, $W$ — группу Вейля, $\mathfrak{t}^*_+$—положительную камеру Вейля и $\delta = (1/2)\sum_{\alpha\in R_+} \alpha$. Пусть $\Lambda \subseteq \mathfrak{t}^*$ означает множество целочисленных весов для $\mathfrak{t}$ (т.е. таких функционалов $\gamma$, что $\exp H \to e^{i\gamma(H)}$ определяет характер тора $T$), а $\Lambda_+ = \Lambda \cap \mathfrak{t}^*_+$ — множество положительных целочисленных весов, упорядоченное обычным образом. Пусть $j$ есть $G$-инвариантная аналитическая функция на $\mathfrak{g}$, заданная формулой

$$j(H) = \prod_{\alpha\in R_+} \frac{\sin(\alpha(H)/2)}{\alpha(H)/2} \quad \text{для } H \in \mathfrak{t};$$

квадрат $j$ совпадает с якобианом экспоненциального отображения.

Каждому неприводимому представлению $\pi \in \widehat{G}$ соответствует единственный старший вес $\lambda \in \Lambda_+$ и обратно. Если $\chi_\pi = \chi_\lambda$ — характер этого представления, то формула Кириллова утверждает, что

$$j(X)\,\widetilde{\chi}_\pi(X) = \int_{\mathcal{O}_{\lambda+\delta}} e^{i\beta(X)} d\mu_{\lambda+\delta}(\beta) \quad \text{для } X \in \mathfrak{g},$$

где $\mathcal{O}_{\lambda+\delta}$ — орбита коприсоединенного представления, проходящая через точку $\lambda+\delta \in \mathfrak{t}^* \subseteq \mathfrak{g}^*$ (вложение определяется формулой Киллинга), а $\mu_{\lambda+\delta}$ — инвариантная мера на орбите с полной массой $d_\lambda = d_\pi = \dim \pi$.

Мы нормируем меры Хаара $dg$ на $G$ и $dt$ на $T$ так, чтобы они имели полную массу $1$. Соответственно мы нормируем меру $dX$ на $\mathfrak{g}$ так, что если $U$ — окрестность нуля в $\mathfrak{g}$, на которой экспоненциальное отображение инъективно, то для $f \in C^\infty(T)$ справедливо равенство

$$\int_U f(\exp X)\,|j(X)|^2 dX = \int_{\exp U} f(g)\,dg\,.$$

Аналогично, лебегова мера $dH$ на $\mathfrak{t}$ нормируется условием: для окрестности $V$ нуля в $\mathfrak{t}$, на которой экспоненциальное отображение инъективно, и для $f \in C^\infty(T)$ мы имеем

$$\int_V f(\exp H)\,dH = \int_{\exp V} f(t)\,dt\,.$$

При такой нормировке формула интегрирования Вейля на $\mathfrak{g}$ принимает вид

$$\int_{\mathfrak{g}} \varphi(X)\,dX = \int_{\mathfrak{t}_+} \prod_{\alpha\in R_+} \alpha(H)^2 \int_G \varphi(g{\cdot}H)\,dg\,dH,$$

где $g{\cdot}H$ означает $\mathrm{Ad}(g)H$. На группе $G$ формула Вейля имеет вид

$$\int_G f(g)\,dg = \frac{1}{|W|}\int_T |\Delta(t)|^2 \int_G f(g{\cdot}t)\,dg\,dt,$$

где $g{\cdot}t$ означает $gtg^{-1}$ и

$$|\Delta(\exp H)|^2 = |j(H)|^2 \prod_{\alpha\in R_+} |\alpha(H)|^2.$$

Если $\varphi \in C^\infty(\mathfrak{g})$, положим

$$\varphi^G(X) = \int_G \varphi(g{\cdot}X)\,dg$$

и, аналогично, для $f \in C^\infty(G)$ положим

$$f^G(g') = \int_G f(g{\cdot}g')\,dg = \int_G f(gg'g^{-1})\,dg\,.$$

Отображение $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ покрывает всю группу, но не является взаимно однозначным. Оно не регулярно именно в тех точках $X \in \mathfrak{g}$, где $j(X) = 0$.

Пусть $E_G = \exp^{-1}(e)$. Тогда $E_G$ $G$-инвариантно и $E_G \cap \mathfrak{t} = \Gamma$ является решеткой

$$\Gamma = \{H \in \mathfrak{t} \mid \lambda(H) \in 2\pi\mathbb{Z} \ \ \forall \lambda \in \Lambda\}.$$

Заметим, что $E_G$ является дискретным множеством орбит присоединенного действия. Пусть $\Gamma_+ = \{H \in \Gamma \mid \alpha(H) \geqslant 0 \ \forall \alpha \in R_+\}$.

Если $g = \exp H$ и $\alpha(H) \notin 2\pi\mathbb{Z}$ для всех $\alpha \in R_+$, то $\exp^{-1}(g) = H + \Gamma$ — дискретное множество точек. Для произвольного $g = \exp H$, $H \in \mathfrak{t}$, рассмотрим

$$\{\alpha \in R_+ \mid \alpha(H) \in 2\pi\mathbb{Z}\} = L\,.$$

Тогда $\mathfrak{g}_L = \mathfrak{t} \oplus \sum_{\alpha \in L} \mathfrak{g}_\alpha$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$. Пусть $G_L \subseteq G$ — соответствующая подгруппа; далее, $E_{G_L} = \exp^{-1}(e) \cap \mathfrak{g}_L$ — дискретное множество $G_L$-орбит в $\mathfrak{g}_L$ и

$$\exp^{-1}(g) = H + E_{G_L}.$$

## §2. Обертывающее отображение

Перейдем к основному определению. Пусть $\nu$ — обобщенная функция с компактным носителем на $\mathfrak{g}$. Для любой функции $f \in C^\infty(G)$ функция $j\widetilde{f}$ — ограниченная $C^\infty$-функция на $\mathfrak{g}$. Положим

$$(\Phi(\nu), f) = (\nu, j\widetilde{f}) \tag{1}$$

и назовем $\Phi(\nu)$ *оберткой* обобщенной функции $\nu$. Это обобщенная функция на $G$. Формула (1) дает также определение обертки для других типов обобщенных функций на $\mathfrak{g}$. Особый интерес представляет случай $\nu = \varphi(X)\,dX$, где $\varphi$ принадлежит $S(\mathfrak{g})$, пространству Шварца алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Предложение. *Если $\nu \in L^1(\mathfrak{g})$, то (1) определяет заряд $\Phi(\nu)$ на $G$. Кроме того,*

$$\|\Phi(\nu)\|_{M(G)} \leqslant \|\nu\|_1.$$

Доказательство. Предположим, что $f_i \in C^\infty(G)$ и $f_i \to 0$ равномерно на $G$. Тогда

$$\langle \Phi(\nu), f_i\rangle = \int_{\mathfrak{g}} \nu(X) j(X) \widetilde{f}_i(X)\,dX \to 0.$$

Таким образом, $\Phi(\nu)$ — заряд. Далее, для $f \in C^\infty(G)$

$$\left| \int_{\mathfrak{g}} \nu(X) j(X) \widetilde{f}(X)\,dX \right| \leqslant \|f\|_\infty \|\nu\|_1,$$

откуда следует искомое неравенство. $\square$

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in S(\mathfrak{g})$ есть $G$-инвариантная функция. Тогда $\Phi(j\varphi)$ является $G$-инвариантной $C^\infty$-функцией на $G$, задаваемой на $T$ формулой*

$$\Phi(j\varphi)(\exp H) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(H + \gamma) \qquad \forall H \in \mathfrak{t}.$$

Доказательство. Заметим сначала, что формула почти очевидна, если $H$ — регулярная точка экспоненциального отображения. Пусть $\Psi$ есть $G$-инвариантная $C^\infty$-функция на $G$, заданная на $T$ формулой $\Psi(\exp H) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi(H + \gamma)$.

Для $h \in C^\infty(G)$

$$\begin{aligned}(\Phi(j\varphi), h) = (j\varphi, j\widetilde{h}) &= \int_{\mathfrak{g}} j^2(X)\varphi(X)\widetilde{h}(X)\,dX \\ &= \int_{\mathfrak{t}_+} \prod_{\alpha\in R_+} \alpha^2(H)\, j^2(H)\,\varphi(H) \int_G \widetilde{h}(g\cdot H)\,dg\,dH \\ &= \int_{\mathfrak{t}_+} |\Delta(\exp H)|^2\varphi(H)(\widetilde{h})^G(H)\,dH \\ &= \frac{1}{|W|}\int_{\mathfrak{t}} |\Delta(\exp H)|^2\varphi(H)\widetilde{(h^G)}(H)\,dH\,.\end{aligned}$$

Если $\mathfrak{t}_\Gamma \subseteq \mathfrak{t}$ — фундаментальная область для $\Gamma$ в $\mathfrak{t}$, то последнее выражение равно

$$\begin{aligned}\frac{1}{|W|}\int_{\mathfrak{t}_\Gamma} |\Delta(\exp H)|^2\widetilde{(h^G)}(H)\sum_{\gamma\in\Gamma}\varphi(H+\gamma)\,dH &= \frac{1}{|W|}\int_T |\Delta(t)|^2 h^G(t)\,\Psi(t)\,dt \\ &= \int_G h(g)\,\Psi(g)\,dg\,. \quad \square\end{aligned}$$

Из теоремы 1 и предложения мы выводим

Следствие. *Если $\nu \in L^1(\mathfrak{g})$ является $G$-инвариантной функцией, то* $\Phi(\nu) \in L^1(G)$.

Теорема 2. *Пусть $\mu$, $\nu$ суть $G$-инвариантные обобщенные функции с компактным носителем на $\mathfrak{g}$ или $G$-инвариантные суммируемые функции. Тогда*

$$\Phi(\mu * \nu) = \Phi(\mu) * \Phi(\nu),$$

*где свертка слева берется на $\mathfrak{g}$, а справа — на $G$.*

Доказательство. Пусть $\pi \in \widehat{G}$ имеет старший вес $\lambda \in \Lambda_+$. Преобразование Фурье в точке $\pi$ является скалярным оператором $c_\pi I_\pi$, где

$$c_\pi = d_\pi^{-1}\langle \Phi(\mu), \chi_\lambda\rangle = d_\pi^{-1}\langle \mu, j\widetilde{\chi}_\lambda\rangle\,.$$

Применение формулы Кириллова для характеров дает

$$c_\pi = \left\langle \mu, \int_G e^{ig(\lambda+\delta)(\,\cdot\,)}dg \right\rangle$$

а из $G$-инвариантности $\mu$ следует, что

$$c_\pi = \langle \mu, e^{i(\lambda+\delta)(\,\cdot\,)}\rangle = \mu^\wedge(\lambda+\delta)\,.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}(\Phi(\mu*\nu))^\wedge(\pi) &= (\mu*\nu)^\wedge(\lambda+\delta)\,I_\pi = \mu^\wedge(\lambda+\delta)\,\nu^\wedge(\lambda+\delta)\,I_\pi \\ &= (\Phi(\mu))^\wedge(\lambda+\delta)(\Phi(\nu))^\wedge(\lambda+\delta)\,I_\pi = (\Phi(\mu)*\Phi(\nu))^\wedge(\pi),\end{aligned}$$

откуда следует теорема. $\square$

## §3. Приложения

**1. Теорема Пуассона–Планшереля для компактных групп в формулировке М. Вернь.** Пусть $\varphi \in S(\mathfrak{g})$. По теореме 1 $\Phi(j\varphi^G) = \psi$ является $C^\infty$-функцией на $G$, для которой

$$\psi(e) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\varphi^G(\gamma).$$

Для $\gamma \in \Gamma$ пусть $\mathcal{U}_\gamma$ означает присоединенную орбиту $\gamma$, а $d\nu_\gamma$ — $G$-инвариантную вероятностную меру на $\mathcal{U}_\gamma$.

Согласно общей (абстрактной) теореме Планшереля

$$\psi(e) = \sum_{\pi\in\widehat{G}} d_\pi(\Phi(j\varphi^G), \chi_\pi) = \sum_{\pi\in\widehat{G}} d_\pi \int_{\mathfrak{g}} j(X)\varphi^G(X)j(X)\widetilde{\chi}_\pi(X)\,dX$$
$$= \sum_{\pi\in\widehat{G}} d_\pi \int_{\mathfrak{g}} j(X)\varphi(X)j(X)\widehat{\chi}_\pi(X)\,dX = \sum_{\lambda\in\Lambda_+} d_\lambda \int_{\mathcal{O}_{\lambda+\delta}} (j\varphi)^\wedge(\beta)\,d\mu_{\lambda+\delta}(\beta),$$

где мы использовали формулу Кириллова. Соединяя вместе обе формулы, получаем

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_+} m_\gamma \int_{\mathcal{U}_\gamma} \varphi(X)\,d\nu_\lambda(X) = \sum_{\lambda\in\Lambda_+} d_\lambda \int_{\mathcal{O}_{\lambda+\delta}} (j\varphi)^\wedge(\beta)\,d\mu_{\lambda+\delta}(\beta)\,.$$

где $m_\gamma = \#|W\cdot\gamma|$. Это — формула М. Вернь. Отметим, что ее нормировка мер отличается от нашей.

**2. Присоединенные орбиты и классы сопряженных элементов.** Теорема 2 показывает, как сводить вопросы, связанные со сверткой центральных мер или обобщенных функций на группе, к аналогичным вопросам о коммутативной свертке на $\mathfrak{g}$. Алгебраическая структура присоединенных орбит, порождающая абелеву гипергруппу, изучалась и вычислялась явно в работе [2]. Поскольку полученные там результаты слишком громоздки, чтобы формулировать их здесь, мы отметим только, что применение теоремы 2 позволяет на основе этих результатов полностью вычислить структуру гипергруппы, порожденной классами сопряженных элементов. Это замечание проясняет аналогию между двумя операциями свертки, отмеченную в [1].

В качестве иллюстрации рассмотрим простой пример. Пусть $\mathfrak{g} = su(2)$. Если

$$\mathfrak{t} = \left\{ X_\theta = \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\},$$

то положительный корень $\alpha$ имеет вид $\alpha(X_\theta) = 2\theta$, а $\Lambda \subseteq \mathfrak{t}^*$ — решетка, порожденная элементом $\alpha/2 = \lambda$. Кроме того, $\Gamma = \{X_\theta \mid \theta \in 2\pi\mathbb{Z}\}$. Для $\theta \geqslant 0$ пусть $\mathcal{O}_\theta$ — сфера, проходящая через точку $X_\theta$ и снабженная инвариантной мерой $\mu_\theta$ с полной массой $\theta$. Тогда простым упражнением по анализу является доказательства равенства

$$\mu_\theta * \mu_{\theta'} = \int_{|\theta-\theta'|}^{\theta+\theta'} \mu_{\theta''}\,d\theta'', \qquad \theta, \theta' \geqslant 0\,.$$

Мы видим также, что $j(X_\theta) = \sin\theta/\theta$. Классами сопряженных элементов будут $\{C_\theta = \exp(\mathcal{O}_\theta) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$. Пусть $\nu_\theta = \Phi(\mu_\theta)$ для $\theta \geqslant 0$. Тогда $\nu_\theta(G) = \sin\theta$ и

$$\nu_{\theta+\pi} = -\nu_\theta\,.$$

Теорема 2 дает

$$\nu_\theta * \nu_{\theta'} = \Phi(\mu_\theta * \mu_{\theta'}) = \int_{|\theta-\theta'|}^{\theta+\theta'} \nu_{\theta''}\,d\theta''.$$

Если $\alpha \equiv |\theta - \theta'| \pmod\pi$ и $\beta \equiv \theta + \theta' \pmod\pi$, где $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \pi$, то

$$\nu_\theta * \nu_{\theta'} = \varepsilon \int_{\min(\alpha,\beta)}^{\max(\alpha,\beta)} \nu_{\theta''}\,d\theta'',$$

где $\varepsilon = \operatorname{sgn}(\beta - \alpha)$. Это дает формулу для свертки классов сопряженных элементов в $SU(2)$.

**3. Гипотеза Томпсона.** Мы докажем следующее утверждение, которое обобщает гипотезу Томпсона [8] для $G = U(n)$.

Теорема. *Пусть $G$ — компактная группа Ли, $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$, $\mathcal{O}_i = G \cdot X_i$ — присоединенная орбита, проходящая через $X_i$, а $C_i = G \cdot \exp X_i$ — класс сопряженных элементов, содержащий $\exp X_i$, $i = 1, 2$. Тогда*

$$C_1 C_2 \subseteq \exp(\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2).$$

Доказательство. Заметим сначала, что для $X_1$ и $X_2$ из достаточно малой окрестности нуля в $\mathfrak{g}$ эта теорема была доказана Вилдбергером в [11], где на самом деле было показано, что имеет место равенство.

В случае $j(X_i) \neq 0$, $i = 1, 2$, теорема следует непосредственно из теоремы 2. Чтобы разобрать общий случай, введем $G$-инвариантную метрику $d$ на $\mathfrak{g}$, и пусть $U_i^n$ означает шар радиуса $1/n$ в $\mathfrak{t}$ с центром $X_i$. Тогда $V_i^n = G \cdot U_i^n$ будет замкнутым $G$-инвариантным подмножеством в $\mathfrak{g}$ для $i = 1, 2$.

Выберем неотрицательную $G$-инвариантную функцию $\varphi_i^n \in C^\infty(\mathfrak{g})$ с носителем в $V_i^n$, положительную на $X_i$, $i = 1, 2$.

Тогда, согласно теореме 1, $\Phi(j\varphi_i^n) = \psi_i^n$ будет $G$-инвариантной неотрицательной $C^\infty$-функцией на $G$ с носителем, содержащим $C_i$.

Теперь по теореме 2

$$C_1 C_2 \subseteq \operatorname{supp}(\psi_1^n * \psi_2^n) = \operatorname{supp} \Phi(j\varphi_1^n * j\varphi_2^n) \subseteq \exp(V_1^n + V_2^n).$$

Поскольку $V_1^{n+1} + V_2^{n+1} \subseteq V_1^n + V_2^n$ для всех $n$,

$$C_1 C_2 \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} \exp(V_1^n + V_2^n) = \exp\left(\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} (V_1^n + V_2^n)\right) = \exp(\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2).$$

. Последнее равенство следует из того, что $V_i^n$ компактны в $\mathfrak{g}$ и

$$d(V_i^n, \mathcal{O}_i) = \max_{Z \in V_i^n} \min_{W \in \mathcal{O}_i} d(Z, W) \leqslant 1/n. \quad \square$$

**4. Формулы Хариш–Чандры и изоморфизм Дюфло.** Алгебра $G$-инвариантных обобщенных функций на $\mathfrak{g}$ с носителем в $0$ относительно свертки на $\mathfrak{g}$ естественно отождествляется с алгеброй $I(\mathfrak{g})$ $G$-инвариантных многочленов на $\mathfrak{g}^*$. Аналогично, алгебра $G$-инвариантных функций на $G$ с носителем в $e$ относительно групповой свертки естественно отождествляется с центром $Z(\mathfrak{g})$ универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$. Из теоремы 2 следует, что $\Phi\colon I(\mathfrak{g}) \to Z(\mathfrak{g})$ — изоморфизм алгебр. Этот изоморфизм играет важную роль в работах Хариш–Чандры. Известно также, что этот изоморфизм имеет место для произвольных групп Ли (см. Дюфло [3]). Это говорит в пользу нашего предположения, что теорема 2 является в некотором смысле универсальной формулой, справедливой для всех групп Ли.

Другим интересным частным случаем теоремы 2 является случай, когда $\mu \in I(\mathfrak{g})$, а $\nu$ — любая $G$-инвариантная обобщенная функция; мы получаем тогда формулу Хариш–Чандры, связывающую $G$-инвариантные дифференциальные операторы на $G$ и на $\mathfrak{g}$ (см. Варадараджан [9]). Формула Хариш–Чандры, доказана хотя и в гораздо более трудном случае общей полупростой группы Ли, но только в достаточно малой окрестности нуля в $\mathfrak{g}$ (где экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом). Наша формула показывает, что, по крайней мере в случае компактной группы, формула Хариш–Чандры справедлива на всем пространстве $\mathfrak{g}$. Было бы интересно выяснить, верно ли это для некомпактных групп.

**5. Другие направления.** В [7] Рагозин показал, что $n$-я сверточная степень непрерывной центральной меры на связной компактной группе размерности $n$ будет абсолютно непрерывной. Это можно вывести из наших результатов вместе с [2]. На самом деле можно показать, что уже $\ell$-я сверточная степень ($\ell = \operatorname{rank} G$) будет абсолютно непрерывной. Этому будет посвящена часть нашей будущей статьи.

Отметим, наконец, что теорема 2 дает основу для нового подхода к определению и исследованию двойственного объекта $\widehat{G}$ к группе $G$, предложенного Вилдбергером в [12]. Как показано в этой работе, гармонический анализ на группе $G$ тесно связан с коммутативным гармоническим анализом на гипергруппе классов сопряженных элементов $\mathcal{C}(G)$, который в случае компактной группы $G$ по существу эквивалентен гармоническому анализу на гипергруппе присоединенных орбит в силу теоремы 2.

Другими словами, обычное описание $\widehat{G}$ в терминах старших весов (или, эквивалентно, целочисленных коприсоединенных орбит) можно получить из теоремы 2, используя только общие рассуждения и факты обычного анализа Фурье. На этом пути не требуется также и формула Кириллова для характеров.

Мы отсылаем читателя к [12] за подробностями, а также по поводу приложений к другим классам групп.

## Литература


1. *Березин Ф. А., Гельфанд И. М.* Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях // Труды ММО. – 1956.– Т. 5. – С. 311–351.
2. *Dooley A. H., Repka J., Wildberger N. J.* Sums of adjoint orbits. – Готовится к печати.
3. *Duflo M.* Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. – 1977. – V. 10. – P. 265–288.
4. *Frenkel I.* Частное сообщение.
5. *Kashiwara M., Vergne M.* The Campbell–Hausdorff formula and invariant hyperfuntions // Invent. Math. – 1978. – V. 47. – P. 249–272.
6. *Кириллов А. А.* Характеры унитарных представлений групп Ли. Редукционные теоремы // Функц. анализ и прил. – 1969. – Т. 3, вып. 1 – С. 36–47.
7. *Ragozin D. L.* Central measures on compact semi-simple Lie groups // J. Functional Anal. – 1972. – V. 10. – P. 212–229.
8. *Thompson R.* Author vs referee: A case history for middle level mathematicians // Amer. Math. Monthly. – 1983. – V. 90, No. 10. – P. 661–668.
9. *Varadarajan V. S.* Harmonic analysis on real reductive groups. – LNM 576, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
10. *Vergne M.* A Plancherel formula without group representations. In: Operator Algebras and Group Representations, II. – 1980. – Neptune. – P. 217–226.
11. *Wildberger N. J.* On a relationship between agjoint orbits and conjugacy classes of a Lie group // Canad. Math. Bull. – 1990. – V. 33, No. 3. – P. 297–304.
12. *Wildberger N. J.* Hypergroups and harmonic analysis // Proc. Centre Math. Anal. (ANU). – 1992. – V. 29. – P. 238–253.


School of Mathematics
University of N.S.W.
Kensington, Australia

Поступило в редакцию
1 ноября 1992 г.