Н. Кехайопулу, И. С. Понизовский, О слабо простых идеалах частично упорядоченных полугрупп, *Алгебра и анализ*, 2002, том 14, выпуск 4, 54–62

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 4

О СЛАБО ПРОСТЫХ ИДЕАЛАХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУПП

© Н. Кехайопулу, И. С. Понизовский

Доказываются некоторые свойства слабо простых и слабо полупростых идеалов частично упорядоченных полугрупп. В частности, выясняется, когда слабо простой идеал подполугруппы является пересечением этой полугруппы с некоторым слабо простым идеалом всей группы, а также доказывается, что всякий слабо полупростой идеал полугруппы является пересечением слабо простых идеалов.

Понятия слабо простого и слабо полупростого идеалов полугруппы являются полугрупповыми аналогами фундаментальных для теории колец понятий первичного и полупервичного идеалов (см., например, [1, гл. 26]). Целью работы является показать, что эта аналогия не только чисто формальная: аналоги некоторых важных свойств первичных и полупервичных идеалов колец оказываются справедливыми и для полугрупп. При этом мы будем работать в чуть более общей ситуации полугрупп с дополнительной структурой — частичным порядком; всякая полугруппа может рассматриваться как частично упорядоченная полугруппа с тривиальным порядком.

Напомним (см., например, [2, гл. X]), что частично упорядоченной полугруппой называется полугруппа S, на которой введено отношение частичного порядка $\leqslant$, такое что для любых элементов $a, b, c \in S$ из неравенства $a \leqslant b$ следует, что $ac \leqslant bc$, $ca \leqslant cb$. Непустое подмножество A частично упорядоченной полугруппы S называется идеалом S, если 1) $AS \subseteq A$, $SA \subseteq A$, 2) из того, что $a \in A$, $b \in S$, $b \leqslant a$, следует, что $b \in A$ [3].

§1. Слабо простые идеалы

1. В этом параграфе мы доказываем следующее утверждение: если S — частично упорядоченная полугруппа, T — подполугруппа S и P_1 — слабо простой идеал T, то слабо простой идеал P полугруппы S, такой что $P \cap T = P_1$, существует тогда и только тогда, когда существует идеал I полугруппы S,

---

Эта работа частично поддержана РФФИ, грант 98-01-00825.

такой что $I \cap T = P_1$. Отсюда следует, что если S — частично упорядоченная полугруппа, T — идеал S и P_1 — слабо простой идеал T, то существует слабо простой идеал P полугруппы S, такой что $P \cap T = P_1$. В частности, если P_1 — собственное подмножество T, то не существует идеала P_2 полугруппы S, который собственно содержал бы P и пересечение которого с T равнялось бы P_1.

Если $(S, ., \leqslant)$ — частично упорядоченная полугруппа, то подмножество T полугруппы S называется слабо простым, если для всех идеалов A, B полугруппы S, таких что $AB \subseteq T$, будет $A \subseteq T$ или $B \subseteq T$.

Мы будем использовать следующее обозначение. Пусть $H \subseteq S$, тогда мы полагаем $(H] := \{t \in S \mid t \leqslant h$ для некоторого $h \in H\}$. Отметим, что если I — идеал S, то $(aSb] \subseteq I$ тогда и только тогда, когда $aSb \subseteq I$.

Лемма 1 [3, теорема]. *Пусть S — частично упорядоченная полугруппа. Идеал I полугруппы S является слабо простым тогда и только тогда, когда из того, что $aSb \subseteq I$ для некоторых элементов $a, b \in S$, следует, что $a \in I$ или $b \in I$.* •

Для удобства будем обозначать через S^1 полугруппу, получающуюся из полугруппы S внешним присоединением единицы e. Таким образом, $S^1 = S \cup \{e\}$, $e \notin S$ и $ea = ae := a$ для всех $a \in S$.

Теорема 1. *Пусть S— частично упорядоченная полугруппа, T — подполугруппа S и P_1 — слабо простой идеал T. Предположим, что существует идеал I полугруппы S, такой что $I \cap T = P_1$. Тогда существует и слабо простой идеал P полугруппы S, такой что $P \cap T = P_1$.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{A}$ всех таких идеалов I полугруппы S, что $I \cap T = P_1$. Множество $\mathcal{A}$ частично упорядочено отношением включения; по предположению, оно непусто. Пусть $\mathcal{B}$ — какая-то цепь в $\mathcal{A}$. Множество $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ принадлежит $\mathcal{A}$ и является для $\mathcal{B}$ верхней границей. Действительно, множество $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ является идеалом S и

$$\left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\right) \cap T = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} (B \cap T) = P_1.$$

По лемме Цорна, в множестве $\mathcal{A}$ существуют максимальные элементы; пусть P — один из них. Поскольку $P \in \mathcal{A}$, P — идеал полугруппы S и $P \cap T = P_1$. Остается показать, что P — слабо простой идеал S. В самом деле, пусть $a, b \in S$, $aSb \subseteq P$; надо убедиться, что $a \in P$ или $b \in P$. Пусть $a \notin P$, $b \notin P$; рассмотрим множества $I_1 := P \cup I(a)$ и $I_2 := P \cup I(b)$. Тогда $P \subsetneqq I_1$ и $P \subsetneqq I_2$

(так как $a \in I_1$ и $a \notin P$, $b \in I_2$ и $b \notin P$). Но P — максимальный элемент множества $\mathcal{A}$; следовательно, $I_1 \notin \mathcal{A}$. Ясно, что I_1 — идеал полугруппы S, поэтому $I_1 \cap T \neq P_1$. Аналогично, $I_2 \cap T \neq P_1$. Далее, имеем

$$P_1 \neq I_1 \cap T = (P \cup I(a)) \cap T = (P \cap T) \cup (I(a) \cap T) = P_1 \cup (I(a) \cap T),$$

откуда видно, что $I(a) \cap T \neq P_1$. Пусть $c \in I(a) \cap T$, $c \notin P_1$. Поскольку $c \in I(a) = (a \cup Sa \cup aS \cup SaS]$, существуют такие элементы $x, y \in S^1$, что $c \leqslant xay$. Подобным же образом находим элементы $d \in T$, $d \notin P_1$ и $s, t \in S^1$, такие что $d \leqslant sbt$. Но T — подполугруппа S, а $c, d \in T$, и потому $cTd \subseteq T$. Более того, $cTd \subseteq P$. Действительно, пусть $k \in T$; тогда

$$\begin{aligned} ckd &\leqslant xayksbt \\ &\in S^1aS^1SS^1bS^1 \subseteq S^1(aSb)S^1 \text{ (так как } S^1SS^1 = S) \\ &\subseteq S^1PS^1 \subseteq P \text{ (так как } P \text{ — идеал } S). \end{aligned}$$

Но P — идеал S, и потому $ckd \in P$. Следовательно, $cTd \subseteq P \cap T = P_1$. Поскольку T — полугруппа, P_1 — слабо простой идеал T and $c, d \in T$, мы теперь получаем по лемме 1, что $c \in P_1$ или $d \in P_1$. Но это противоречит выбору элементов c, d.

Следствие 1. *Пусть S — частично упорядоченная полугруппа, T — подполугруппа S и P_1 — слабо простой идеал T. Слабо простой идеал P полугруппы S, такой что $P \cap T = P_1$, существует тогда и только тогда, когда существует хотя бы какой-то идеал I полугруппы S, такой что $I \cap T = P_1$.*

Лемма 2. *Пусть $(S, ., \leqslant)$ — частично упорядоченная полугруппа, A — идеал S и B — слабо простой идеал A. Тогда B — идеал S.*

Доказательство. Поскольку A — идеал S, A является подполугруппой S. Пусть $a \in A$, $b \in B$, $s \in S$; тогда $sbas \in SAS \subseteq A$, так как A — идеал S, и $sbasb \in AB \subseteq B$, так как B — идеал A. Из того, что B — слабо простой идеал A, следует, что $sb \in B$. Таким образом, $BS \subseteq B$, и аналогично показывается, что $SB \subseteq B$.

Для завершения доказательства того, что B — идеал *частично упорядоченной* полугруппы S, остается проверить, что если $b \in B$, $s \in S$ и $s \leqslant b$, то $s \in B$. Действительно, $s \leqslant b$ для элемента b, принадлежащего идеалу $A \supseteq B$ полугруппы S, и потому $s \in A$; поскольку $s \leqslant b \in B$, а B — идеал A, получаем, что $s \in B$.

Следствие 2. *Пусть S — частично упорядоченная полугруппа, T — идеал S, а P_1 — слабо простой идеал T. Тогда существует слабо простой идеал P полугруппы S, такой что $P \cap T = P_1$.*

Доказательство. По лемме 2 P_1 является идеалом S. Но P_1 — идеал T, т.е. $P_1 \subseteq T$, и потому $P_1 \cap T = P_1$. Поскольку T — подполугруппа S, по теореме 1 существует слабо простой идеал P полугруппы S, такой что $P \cap T = P_1$.

Предложение 1. *Пусть S — частично упорядоченная полугруппа, T — идеал S, а P_1 — слабо простой идеал T, такой что $P_1 \subsetneqq T$. Тогда любой слабо простой идеал P полугруппы S, такой что $P_1 = P \cap T$, является максимальным в множестве идеалов полугруппы S, пересечение которых с T равно P_1.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что по следствию 2 хотя бы один слабо простой идеал P полугруппы S, такой что $P \cap T = P_1$, действительно существует.

Пусть, вопреки нашему утверждению, P_2 — такой идеал S, что $P \subsetneqq P_2$ и $P_2 \cap T = P_1$; мы покажем, что $T \subseteq P_1$, и тем самым получим противоречие с посылкой предложения.

Пусть $x \in T$; выберем элемент $a \in P_2$, не принадлежащий P. Мы имеем: $xSa \subseteq SP_2 \subseteq P_2$, $xSa \subseteq TS \subseteq T$, и потому

$$xSa \subseteq P_2 \cap T = P_1 = P \cap T \subseteq P.$$

Далее, поскольку P — слабо простой идеал S, по лемме 1 получаем, что $x \in P$ или $a \in P$. Но по нашему выбору $a \notin P$; значит, $x \in P$. Поскольку $x \in T$, находим, что $x \in P \cap T = P_1$, так что $x \in P_1$.

§2. Слабо полупростые идеалы

В этом параграфе мы изучаем слабо простые и слабо полупростые идеалы частично упорядоченных полугрупп, используя m-системы. В частности, мы доказываем, что непустое подмножество частично упорядоченной полугруппы S является слабо полупростым идеалом S тогда и только тогда, когда I — пересечение слабо простых идеалов S.

Подмножество T частично упорядоченной полугруппы $(S, \cdot, \leqslant)$ называется слабо полупростым, если из того, что квадрат A^2 идеала A полугруппы S содержится в T следует, что $A \subseteq T$ [3]. Идеал I полугруппы S называется собственным, если $I \neq S$.

Непустое подмножество A частично упорядоченной полугруппы $(S, \cdot, \leqslant)$ называется m-системой в S, если для любых $a, b \in A$ существуют $c \in A$ и $x \in S$, такие что $c \leqslant axb$. Эквивалентное определение: для любых $a, b \in A$ существует элемент $c \in A$, такой что $c \in (aSb]$ [4].

Лемма 3. *Пусть S — частично упорядоченная полугруппа, $I \subseteq S$, M — m-система в S, $I \cap M = \varnothing$, и пусть $\mathcal{A}$ — множество всех m-систем M' в S, таких что $M \subseteq M'$, $I \cap M' = \varnothing$. В множестве $\mathcal{A}$ существует максимальный относительно включения элемент M^*.*

Доказательство. Поскольку $M \in \mathcal{A}$, частично упорядоченное включением множество $\mathcal{A}$ непусто; поэтому, по лемме Цорна, достаточно доказать, что любая цепь $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$ ограничена сверху. Убедимся, что $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ — верхняя граница цепи $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$. Поскольку все множества из цепи $\mathcal{B}$ содержатся в объединении, нам надо только проверить, что $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ принадлежит $\mathcal{A}$. Ясно, что $M \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \neq \varnothing$, $(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B) \cap I = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} (B \cap I) = \varnothing$, и потому остается доказать, что $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ является m-системой в $\mathcal{A}$.

Пусть $a, b \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$; надо найти такие элементы $c \in \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, $x \in S$, что $c \leqslant axb$. Пусть $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ таковы, что $a \in B_1$, $b \in B_2$. Поскольку $\mathcal{B}$ — цепь, $B_1 \subseteq B_2$ или $B_2 \subseteq B_1$. Пусть, например, $B_1 \subseteq B_2$. Тогда $a, b \in B_2$. Но $B_2 \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, и потому B_2 — m-система в S. Следовательно, существуют $c \in B_2 \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ и $x \in S$, такие что $c \leqslant axb$. Итак, $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ — m-система в $\mathcal{A}$.

Лемма 4 [4, предложение 1]. *Пусть S — частично упорядоченная полугруппа и I — идеал полугруппы S. Тогда*

A) *Если идеал I слабо простой и $S \setminus I \neq \varnothing$, то $S \setminus I$ — m-система.*

B) *Если $S \setminus I$ — m-система, то идеал I слабо простой.* •

Лемма 5. *Пусть S — частично упорядоченная полугруппа, I — идеал S, M — m-система в S, $I \cap M = \varnothing$, $\mathcal{A}$ — множество всех m-систем M' в S, таких что $M \subseteq M'$, $I \cap M' = \varnothing$, и пусть M^* — максимальный относительно включения элемент множества $\mathcal{A}$ (существующий по лемме 3). Тогда множество $S \setminus M^*$ — слабо простой идеал полугруппы S. Более того, множество $S \setminus M^*$ — минимальный относительно включения элемент множества $\mathcal{W}$ слабо простых идеалов полугруппы S, содержащих I.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}$ — частично упорядоченное относительно включения множество идеалов полугруппы S, содержащих I и не пересекающихся с M^*. Поскольку $M^* \in \mathcal{A}$, пересечение $I \cap M^*$ пусто, и $I \in \mathcal{P}$; значит, множество $\mathcal{P}$ непусто. Если $\mathcal{B}$ — цепь в $\mathcal{P}$, то очевидно, множество $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ является идеалом полугруппы S и содержит идеал I; кроме того,

$$\left(\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B\right)\cap M^* = \bigcup_{B\in\mathcal{B}}(B\cap M^*) = \varnothing.$$

Таким образом, множество $\bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} B$ принадлежит $\mathcal{P}$ и является верхней границей $\mathcal{B}$ в $\mathcal{P}$. По лемме Цорна, в частично упорядоченном множестве $\mathcal{P}$ существует максимальный элемент Q.

Докажем, что Q — слабо простой идеал S. Действительно, пусть $a,b\in S$, $aSb\subseteq Q$; покажем, что $a\in Q$ или $b\in Q$. Пусть $a,b\notin Q$. Рассмотрим множества $A=Q\cup I(a)$, $B=Q\cup I(b)$, где $I(a)$, $I(b)$ — идеалы S, порожденные a и b. Поскольку $Q\subseteq A$, $a\in A$, $a\notin Q$, получаем, что $Q\subsetneqq A$, и аналогично $Q\subsetneqq B$. Но Q — максимальный элемент множества $\mathcal{P}$, поэтому $A,B\notin\mathcal{P}$. Множества A,B — идеалы S, содержащие I, и единственной причиной, почему они не попадают в $\mathcal{P}$, может быть только то, что $A\cap M^*\neq\varnothing$ и $B\cap M^*\neq\varnothing$. Пусть $c\in A\cap M^*$, $d\in B\cap M^*$. Поскольку M^* является m-системой и $c,d\in M^*$, существуют $t\in M^*$, $x\in S$, такие что $t\leqslant cxd$. Имеем теперь

$$c\in A\cap M^*=(Q\cup I(a))\cap M^*=(Q\cap M^*)\cup(I(a)\cap M^*)=I(a)\cap M^*,$$

потому что пересечение множества $Q\in\mathcal{P}$ с M^* пусто. Но тогда

$$c\in I(a)=(a\cup Sa\cup aS\cup SaS],$$

так что существуют $u,v\in S^1$, для которых $c\leqslant uav$. Аналогично, $d\in I(b)$, и существуют $z,w\in S^1$, для которых $d\leqslant zbw$. Соединяя все эти неравенства, получаем, что $t\leqslant cxd\leqslant uavxzbw$. Но $vxz\in S^1SS^1=S$, $avxzb\in aSb\subseteq Q$ по предположению, $uavxzbw\in S^1QS^1\subseteq Q$, потому что Q — идеал S. По определению идеала частично упорядоченной полугруппы, элемент $t\leqslant uavxzbw\in Q$ тоже принадлежит Q. Итак, $t\in Q\cap M^*$, т.е. $Q\cap M^*\neq\varnothing$, что невозможно для идеала $Q\in\mathcal{P}$.

Покажем теперь, что множество $S\setminus Q\supseteq M^*$ принадлежит $\mathcal{A}$. В самом деле, множество S не может равняться Q, ибо иначе множество $S=Q$ принадлежало бы $\mathcal{P}$ и имело бы пустое пересечение с M^*, что невозможно, так как $M^*\subseteq S$ и M^* — m-система, т.е. заведомо непустое множество. Таким образом, $S\setminus Q\neq\varnothing$; поскольку Q — слабо простой идеал S, из леммы 4 следует, что множество $S\setminus Q$ является m-системой в S. Далее, поскольку $Q\in\mathcal{P}$, видим, что $Q\cap M^*=\emptyset$, и потому $M^*\subseteq S\setminus Q$; но M^*, как и любое множество из $\mathcal{A}$, содержит M, и тем самым мы показали, что $M\subseteq S\setminus Q$. Наконец, $I\subseteq Q$, поскольку $Q\in\mathcal{P}$, и потому $I\cap S\setminus Q=\varnothing$.

Но по определению, M^* — максимальный элемент $\mathcal{A}$; поэтому из утверждения предыдущего абзаца следует, что $S \setminus Q = M^*$. Следовательно, $S \setminus M^* = Q$ является, как мы видели выше, слабо простым идеалом полугруппы S.

Остается показать, что $S \setminus M^*$ — минимальный элемент множества $\mathcal{W}$. Пусть $P \in \mathcal{W}$, $P \subseteq S \setminus M^*$; покажем, что $P = S \setminus M^*$. Для этого мы докажем, что $S \setminus P \in \mathcal{A}$; поскольку $S \setminus P \supseteq M^*$, а M^* — максимальный элемент множества $\mathcal{A}$, это будет означать, что $S \setminus P = M^*$, т.е. $P = S \setminus M^*$.

Выше мы показали, что $Q = S \setminus M^*$ и $Q \neq S$, поэтому $S \setminus M^* \neq S$. Тем более $P \subseteq S \setminus M^* \neq S$, и потому множество $S \setminus P$ непусто. По определению множества $\mathcal{W}$, P является слабо простым идеалом S; тогда, по лемме 4, $S \setminus P$ является m-системой в S. Далее, $M \subseteq M^* \subseteq S \setminus P$. Наконец, поскольку $I \subseteq P$, множество $S \setminus P$ содержится в $S \setminus I$, и потому $(S \setminus P) \cap I = \varnothing$. Итак, $S \setminus P \in \mathcal{A}$.

Лемма 6 [4, замечание 4]. *Пусть S — частично упорядоченная полугруппа. Идеал I полугруппы S является слабо полупростым тогда и только тогда, когда из того, что $aS \subseteq I$ для некоторого элемента $a \in S$, следует, что $a \in I$ или $b \in I$.* •

Заметим, что, поскольку I — идеал S, включение $(aSa] \subseteq I$ выполняется тогда и только тогда $aSa \subseteq I$.

Лемма 7. *Пусть S — частично упорядоченная полугруппа, I — слабо полупростой идеал S, $\mathcal{W}$ — множество слабо простых идеалов S, содержащих I, и пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех минимальных относительно включения элементов множества $\mathcal{W}$. Тогда $I = \bigcap\limits_{A \in \mathfrak{M}} A$.*

Доказательство. Утверждение тривиально, если $I = S$: тогда $\mathcal{W} = \mathfrak{M} = \{S\}$. Пусть теперь $I \neq S$; тогда $S \setminus I \neq \varnothing$. Выберем элемент $d \in S$, не принадлежащий I. Поскольку идеал I слабо полупростой и $d \notin I$, из леммы 6 следует, что $dSd \nsubseteq I$. Поэтому существует такой элемент $a_1 \in S$, что $da_1d \notin I$; положим $c_2 := da_1d$. Но I — слабо полупростой идеал S и $c_2 \notin I$, поэтому $c_2Sc_2 \nsubseteq I$. Следовательно, существует такой элемент $a_2 \in S$, что $c_2a_2c_2 \notin I$; положим $c_3 := c_2a_2c_2$, и так далее.

Положим еще $c_1 = d$ и покажем, что множество

$$M_d = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\}$$

является m-системой в S. Действительно, множество M_d непусто, потому что $d = c_1 \in M_d$. Пусть $c_n, c_m \in M_d$; покажем, что существуют такие элементы $c \in M_d$ и $x \in S$, что $c \leqslant c_nxc_m$. Если $n = m$, то для элементов $c_{n+1} \in M_d$ и

$a_n \in S$ мы имеем: $c_{n+1} \leqslant c_{n+1} = c_n a_n c_n$. Пусть теперь $m > n$; тогда

$$\begin{aligned} c_{m+1} &= c_m a_m c_m = c_{m-1} a_{m-1} c_{m-1} a_m c_m = c_{m-2} a_{m-2} c_{m-2} a_{m-1} c_{m-1} a_m c_m \\ &= c_n a_n c_n \dots c_{m-2} a_{m-2} c_{m-2} a_{m-1} c_{m-1} a_m c_m, \end{aligned}$$

и мы имеем нужное соотношение $c \leqslant c_n x c_m$ при

$$c = c_{m+1} \in M_d, \quad x = a_n c_n \dots c_{m-2} a_{m-2} c_{m-2} a_{m-1} c_{m-1} a_m \in S.$$

Наконец, если $n > m$, то

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_n a_n c_n = c_n a_n c_{n-1} a_{n-1} c_{n-1} = c_n a_n c_{n-1} a_{n-1} c_{n-2} a_{n-2} c_{n-2} \\ &= c_n a_n c_{n-1} a_{n-1} c_{n-2} a_{n-2} c_{n-2} \dots c_m a_m c_m, \end{aligned}$$

и соотношение $c \leqslant c_n x c_m$ получается при

$$c = c_{n+1} \in M_d, \quad x = a_n c_{n-1} a_{n-1} c_{n-2} a_{n-2} c_{n-2} \dots c_m a_m \in S.$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}_d$ всех m-систем в полугруппе S, которые содержат M_d и пересечение которых с I пусто. Это множество непусто, потому что оно содержит m-систему M_d: $I \cap M_d = \varnothing$, так как $c_i \notin I$ для всех $i = 1, 2, \dots$.

По лемме 3, в множестве $\mathfrak{M}_d$ существует максимальный элемент M_d^*. По лемме 5, $S \setminus M_d^* \in \mathfrak{M}$. Покажем, что $I = \bigcap\limits_{A \in \mathfrak{M}} A$. Действительно, если $A \in \mathfrak{M}$, то $A \in W$, и потому $I \subseteq A$. Таким образом,

$$I \subseteq \bigcap_{A \in \mathfrak{M}} A \subseteq \bigcap_{d \in S \setminus I} S \setminus M_d^*.$$

Если бы существовал элемент $x \in S$, который принадлежал бы $x \in S \setminus M_d^*$ для всех $d \in S \setminus I$, но не принадлежал бы I, то, поскольку, очевидно, $x \in M_x$, а $M_x^* \in \mathfrak{M}_x$, мы имели бы: $x \in M_x \subseteq M_x^*$, т.е. $x \notin S \setminus M_x^*$ в противоречие с предположением.

Теорема 2. *Пусть S — частично упорядоченная полугруппа. Собственное подмножество I полугруппы S тогда и только тогда является слабо полупростым идеалом S, когда I является пересечением слабо простых идеалов S.*

Доказательство. Необходимость следует из леммы 7. Достаточность очевидна: каждый слабо простой идеал S является слабо полупростым идеалом, а пересечение непустого множества слабо полупростых идеалов S — снова слабо полупростой идеал S.

Список литературы

[1] Faith C., *Algebra. II. Ring theory*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 191, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976.

[2] Fuchs L., *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press, Oxford etc., 1963; Пер. на рус. яз., Мир, М., 1965.

[3] Kehayopulu N., *On weakly prime ideals of ordered semigroups*, Math. Japon. **35** (1990), no. 6, 1051–1056.

[4] Kehayopulu N., *m-systems and n-systems in ordered semigroups*, Preprint (в печати).

Поступило 20 апреля 2002 г.