Пример 1. Оператор A_j является расширением по Фридрихсу оператора $\widetilde{A}_j$, $\operatorname{ord} B_j \leqslant m/2$ $(j = 1, \dots, n)$.

Пример 2. Ω — ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса, $D(A_j) \subset H^m(\Omega)$ $(j = 1, \dots, n)$, $A_j = A_j^* \geqslant 0$ (или $D(A_j^{1/2}) \subset H^{m/2}(\Omega)$, но $\operatorname{ord} B_j \leqslant m/2$).

Отметим, что в случае дифференциальных операторов пример 2 охватывает самосопряженные расширения, которые задаются с помощью условий Шапиро–Лопатинского (см. [10]).

В примере 1 для обоснования формулы (1) использованы результаты статьи [11].

Литература

1. *Козлов С. М.* // ДАН СССР. – 1983. – Т. 268, №4. – С. 789–793. **2.** *Бойматов К. Х.* // ДАН СССР. – 1991. – Т. 316, №1. – С. 14–18. **3.** *Бойматов К. Х.* // ДАН СССР. – 1991. – Т. 317, №2. – С. 271–275. **4.** *Бойматов К. Х.* // ДАН СССР. – 1991. – Т. 319, №5. – С. 1048–1052. **5.** *Бойматов К. Х., Костюченко А. Г.* // Труды семинара им. И. Г. Петровского. – 1988. – №13. – С. 3–18. **6.** *Дрожжинов Ю. В., Завьялов Б. И.* // Матем. сб. – 1989. – Т. 180, №2. – С. 1234–1258. **7.** *Егоров Ю. В., Шубин М. А.* // Итоги науки и техники. Фундаментальные направления. – Т. 31, М.: ВИНИТИ, 1988, С. 3–125. **8.** *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – Т. 14, М.: ВИНИТИ, 1977, С. 5–58. **9.** *Розенблюм Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А.* // Итоги науки и техники. Фундаментальные направления. – Т. 64, М.: ВИНИТИ, 1989, С. 5–247. **10.** *Егоров Ю. В., Шубин М. А.* // Итоги науки и техники. Фундаментальные направления. – Т. 30, М.: ВИНИТИ, 1988, С. 5–263. **11.** *Бойматов К. Х.* // ДАН СССР. – 1990. – Т. 311, №1. – С. 14–18. **12.** *Левендорский З. С.* // Труды ММО. – 1989. – Т. 52. – С. 34–57.

Математический институт с ВЦ
АН Республики Таджикистан

Поступило в редакцию
24 апреля 1990 г.
В переработанном виде
16 апреля 1992 г.

УДК 517.5

Проективные представления группы токов $\mathrm{SU}(1,1)^X$

© 1993. И. М. Гельфанд, М. И. Граев

0. Через G^X, где G — топологическая локально компактная группа, а X — топологическое пространство с непрерывной конечной мерой dx, мы обозначаем группу всех измеримых отображений $f\colon X \to G$ с поточечным умножением: $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$. В [3] (см. также [1]) каждому представлению группы G движениями вещественного гильбертова пространства были отнесены проективные унитарные представления группы G^X. С помощью этой конструкции для случая, когда $G = \mathrm{SU}(1,1)$ — группа комплексных матриц

$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix}$ с определителем $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$, были построены неприводимые унитарные представления группы G^X.

В этой статье вместо представлений группы G движениями вещественного гильбертова пространства используются ее представления движениями комплексного гильбертова пространства. В случае $G = \mathrm{SU}(1,1)$ имеется две серии таких неприводимых представлений, см. п. 2. По ним строятся две новые серии неприводимых унитарных представлений группы G^X, которые, в отличие от [1], являются проективными представлениями. Эти представления можно трактовать как квадратные корни из точных представлений, построенных в [1]. Существование этих представлений было отмечено в [1], однако их явная конструкция там не была проведена. Аналогичные серии проективных представлений для группы токов $\mathrm{SU}(n,1)^X$ при $n > 1$ будут описаны в другой статье.

1. Изложим (ср. [3]) общую конструкцию проективных унитарных представлений группы G^X, где G — произвольная локально компактная группа. Пусть задано представление группы G движениями комплексного гильбертова пространства H, т.е. аффинными преобразованиями вида

$$A(g)\xi = T(g)\xi + b(g), \qquad \xi \in H,$$

где $b(g) \in H$, а $T(g)$ — линейный унитарный оператор. Условие, что операторы $A(g)$ образуют представление группы G, т.е. $A(g_1g_2) = A(g_1)A(g_2)$ для любых $g_1, g_2 \in G$, эквивалентно условию, что $T(g_1g_2) = T(g_1)T(g_2)$, а $b\colon G \to H$ удовлетворяет соотношению

$$b(g_1g_2) = b(g_1) + T(g_1)b(g_2).$$

Если существует вектор $\xi_0 \in H$, неподвижный относительно операторов $A(g)$, то представление $A(g)$ эквивалентно линейному представлению $T(g)$, $A(g) = CT(g)C^{-1}$, где C — оператор сдвига: $C\xi = \xi + \xi_0$. В последующих конструкциях важны лишь представления, не обладающие неподвижным вектором ξ_0. Отметим, что для произвольной группы G таких представлений может не существовать.

Введем гильбертово пространство H^X измеримых отображений $\xi\colon X \to H$ с нормой $\|\xi\|^2 = \int_X \|\xi(x)\|^2\,dx$. Представлению $A(g)$ группы G соответствует серия представлений $A_s^X(\tilde g)$ группы G^X движениями в H^X:

$$A_s^X(\tilde g)\xi = T^X(\tilde g)\xi + sb^X(\tilde g), \qquad \tilde g \in G^X,$$

где $(T^X(\tilde g)\xi)(x) = T(g(x))\xi(x)$, $(sb^X(\tilde g))(x) = s(x)b(g(x))$ и $s = s(x)$ — произвольная ограниченная функция на X, играющая роль параметра.

По определению отвечающие $A(g)$ проективные унитарные представления $U_s(\tilde g)$ группы G^X действуют в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^nH^X$, где $S^0H^X = \mathbb{C}$, а S^nH^X при $n > 0$ есть n-я симметризованная тензорная степень H^X с нормой $\|\xi \otimes \ldots \otimes \xi\|^2 = n!\|\xi\|^2$. Отметим, что $\mathcal{H}$ содержит, в частности, векторы вида

$$e^\xi = 1 \oplus \xi \oplus \frac{1}{2!}(\xi \otimes \xi) \oplus \ldots, \qquad \xi \in H^X,$$

причем $\langle e^\xi, e^\eta\rangle = e^{\langle\xi,\eta\rangle}$ для любых $\xi,\eta \in H^X$. Чтобы задать операторы представления U_s, достаточно задать их действие на мономы из S^nH^X, $n = 0,1,\dots$. Воспользуемся тем, что на всюду плотном подмножестве в $\mathcal{H}$, включающем в себя мономы из S^nH^X, $n=0,1,\dots$, и векторы e^ξ, $\xi\in H^X$, определена естественная структура коммутативного кольца с единицей. С использованием этой кольцевой структуры операторы $U_s(\tilde g)$ задаются следующими формулами:

$$U_s(\tilde g)\xi_1\dots\xi_n = \lambda(\tilde g)\,e^{sb^X(\tilde g)}\prod_{i=1}^n(T^X(\tilde g)\xi_i - \langle T^X(\tilde g)\xi_i, sb^X(\tilde g)\rangle 1), \qquad \xi_i\in H^X,$$

где $\lambda(\tilde g) = \exp(-\|sb^X(\tilde g)\|^2/2)$. Таким образом, $U_s(\tilde g)$ есть композиция трех операторов: оператора $\xi_1\dots\xi_n \mapsto \prod_{i=1}^n(T^X(\tilde g)\xi_i)$, оператора $\xi_1\dots\xi_n\mapsto \prod_{i=1}^n(\xi_i - \langle\xi_i,\eta\rangle 1)$, где $\eta = sb^X(\tilde g)$, и оператора умножения на $\lambda(\tilde g)\,e^{sb^X(\tilde g)}$.

2. Назовем неприводимое представление $A(g)$ группы G движениями комплексного гильбертова пространства H *особым*, если в H не существует векторов, неподвижных относительно операторов $A(g)$. В случае $G=\mathrm{SU}(1,1)$ имеется две серии особых представлений. Приведем две эквивалентные реализации этих представлений.

1-*я серия,* 1-*я модель.* Представления действуют в гильбертовом пространстве H^+; элементы пространства H^+ — функции f на окружности $|\zeta|=1$ в $\mathbb{C}$, граничные к функциям, аналитическим внутри круга $|\zeta|<1$, и удовлетворяющие условию $\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\,d\varphi = 0$, т.е. $f(\zeta) = a_1\zeta + \dots + a_n\zeta^n + \dots$. Норма в H^+:

$$\|f\|^2 = -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|1-e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}|\,f(e^{i\varphi_1})\,\overline{f(e^{i\varphi_2})}\,d\varphi_1\,d\varphi_2 = \sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}|a_n|^2.$$

Операторы представления:

$$A^+(g)f = T(g)f + sb^+(g),$$

где

$$(T(g)f)(\zeta) = f\left(\frac{\alpha\zeta+\overline\beta}{\beta\zeta+\overline\alpha}\right)|\beta\zeta+\overline\alpha|^{-2}, \qquad b^+(g) = \frac{\beta\zeta}{\beta\zeta+\overline\alpha}$$

и s — комплексный параметр.

1-*я серия,* 2-*я модель.* Представления задаются в фактор-пространстве $\widetilde H^+/H^0$, где элементы из $\widetilde H^+$ — функции f на окружности $|\zeta|=1$, граничные к функциям, аналитическим внутри круга $|\zeta|<1$, и H^0 — подпространство констант. Норма в $\widetilde H^+/H^0$:

$$\|f\|^2 = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\,d\,\overline{f(e^{i\varphi})}\,.$$

Операторы представления:

$$(\widetilde A^+(g)f)(\zeta) = f\left(\frac{\alpha\zeta+\overline\beta}{\beta\zeta+\overline\alpha}\right) + s\ln(\beta\zeta+\overline\alpha) \pmod{H^0}.$$

Переход от первой модели ко второй осуществляет сплетающий оператор P:

$$(Pf)(e^{i\varphi}) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln|1 - e^{i(\varphi-\varphi')}|\, f(e^{i\varphi'})\, d\varphi'.$$

2-*я серия.* Представления задаются в пространстве H^- (или $\widetilde{H}^-/H^0$) функций, комплексно-сопряженных функциям из H^+ (соответственно из $\widetilde{H}^+/H^0$). Формулы для операторов представлений $A^-(g)$ ($\widetilde{A}^-(g)$) получаются из формул для $A^+(g)$ ($\widetilde{A}^+(g)$) заменой $b^+(g)$ на $b^-(g) = \overline{b^+(g)}$ и $\ln(\beta\zeta + \overline{\alpha})$ на $\ln(\overline{\beta}\,\overline{\zeta} + \alpha)$.

3. Обозначим через U_s^+ и U_s^- проективные унитарные представления группы $\mathrm{SU}(1,1)^X$, полученные из изометрических представлений $A^+(g)$, $A^-(g)$ группы $\mathrm{SU}(1,1)$ по описанной в п. 1 конструкции.

Предложение. $U_s^\pm(\tilde g_1)U_s^\pm(\tilde g_2) = e^{ic_s^\pm(\tilde g_1,\tilde g_2)}U_s^\pm(\tilde g_1\tilde g_2)$, *где*

$$c_s^+(\tilde g_1,\tilde g_2) = -c_s^-(\tilde g_1,\tilde g_2) = \int_X |s(x)|^2 \arg\left(\frac{\alpha(g_1(x)\,g_2(x))}{\alpha(g_1(x))\,\alpha(g_2(x))}\right)dx$$

($\alpha(g)$ — *элемент матрицы* g, $g = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \beta(g) \\ \overline{\beta(g)} & \overline{\alpha(g)} \end{pmatrix}$).

Теорема. *Если X — топологическое пространство без изолированных точек, то представления $U_{s_1}^+$, $U_{s_2}^-$ и их тензорное произведение $U_{s_1}^+ \otimes U_{s_2}^-$, где* $\operatorname{supp} s_1 = \operatorname{supp} s_2 = X$, *являются неприводимыми.*

Замечания. 1°. Тензорные произведения $U_{s_1}^+ \otimes U_{s_2}^-$ при $s_1 = s_2$ эквивалентны точным представлениям группы $\mathrm{SU}(1,1)^X$, построенным в [1]. Таким образом, представления U_s^+ и U_s^- можно трактовать как квадратные корни из представлений, определенных в [1].

2°. Тензорные произведения $U_{s_1}^+ \otimes U_{s_2}^+$ и $U_{s_1}^- \otimes U_{s_2}^-$ приводимы. Разложение таких представлений на неприводимые см. в [3].

4. Если X состоит из одной точки, т.е. $G^X = G$, то проективное представление U_s^+ группы $\mathrm{SU}(1,1)$, построенное по ее изометрическому представлению A^+, распадается в дискретную прямую сумму неприводимых представлений. Каждое слагаемое этой суммы входит с конечной кратностью и содержит вектор наинизшего веса относительно максимальной компактной подгруппы $K \subset G$. Аналогичное утверждение имеет место для представлений U_s^-. Если $|s|^2$ — целое число, то представления $U_s^\pm$ проективно эквивалентны точным представлениям группы G.

Литература

1. *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* // УМН. – 1973. – Т. 28, вып. 5. – С. 83–128. **2.** *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* // Функц. анализ и его прил. – 1974. – Т. 8, вып. 3. – С. 67–68. **3.** *Gelfand I. M., Graev M. I., Vershik A. M.* Models of representations of current groups // In: Representations of Lie groups and Lie algebras. – Budapest: Akademiai Kiado, 1985.

Научно-исследовательский институт
системных исследований РАН

Поступило в редакцию
31 мая 1993 г.