А. К. Толпыго, О когомологиях параболических алгебр Ли,
Матем. заметки, 1972, том 12, выпуск 3, 251–255

https://www.mathnet.ru/mzm9875

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 12, № 3 (1972), 251—255

УДК 512.4

О КОГОМОЛОГИЯХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ АЛГЕБР ЛИ

А. К. Толпыго

Если $\mathfrak{p}$ — параболическая подалгебра полупростой алгебры, то когомологии $\mathfrak{p}$ в присоединенном представлении тривиальны. Библ. 5 назв.

Пусть $\mathfrak{p}$ — параболическая алгебра Ли над C, т. е. алгебра, изоморфная параболической подалгебре некоторой полупростой алгебры, P — ее присоединенное представление.

Целью этой работы является доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого* $n \geqslant 0$ $H^n(\mathfrak{p}, P) = 0$.

В частности, для $n = 2$ это означает, что любая параболическая алгебра жесткая (см. [1, 2]). Это особенно интересно для борелевских алгебр, так как, насколько мне известно, примеры жестких разрешимых алгебр до сих пор не изучались. (Для $n = 1$ это значит, все их дифференцирования внутренние.)

На протяжении всей работы мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$\mathfrak{g}$ — фиксированная полупростая алгебра над C,

$\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра,

$\mathfrak{b}$ — ее борелевская подалгебра, $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{h}$,

$\mathfrak{p}$, $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$ — фиксированная параболическая подалгебра,

P (соответственно G) — пространство присоединенного представления $\mathfrak{p}$ (соответственно $\mathfrak{g}$); оператор, соответствующий в этих представлениях элементу x, мы обозначаем $\mathrm{ad}\, x$ или просто x,

$\mathfrak{n}$ — нильрадикал $\mathfrak{p}$,

$\mathfrak{r}$ — редуктивная подалгебра $\mathfrak{p}$; $\mathfrak{p}$ разлагается как линейное пространство в сумму $\mathfrak{r}+\mathfrak{n}$ так, что $\mathfrak{r}$ можно отождествлять с фактор-алгеброй $\mathfrak{p}/\mathfrak{n}$,

$\widetilde{\mathfrak{n}}$ — нильпотентная подалгебра $\mathfrak{g}$, дополнительная к $\mathfrak{p}$ и натянутая на корневые векторы; пространства $\mathfrak{n}$ и $\widetilde{\mathfrak{n}}$ двойственны относительно формы Киллинга, которую мы будем обозначать $\langle , \rangle$, $\widetilde{\mathfrak{p}}=\mathfrak{r}+\widetilde{\mathfrak{n}}$.

Произвольные элементы из $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{n}$, $\widetilde{\mathfrak{p}}$ мы будем обозначать соответственно через g, p, r, n, $\widetilde{p}$.

1. Поскольку $\mathfrak{n}$ — идеал в $\mathfrak{p}$, для любого представления V алгебры $\mathfrak{p}$ имеет место спектральная последовательность (см. [3]):

$$E_2^{ij}=H^i(\mathfrak{r}, H^j(\mathfrak{r}, V))\to H^n(\mathfrak{p}, V).$$

Мы покажем, что для $V=P$ $E_2^{ij}=0$, откуда, конечно, следует теорема.

По теореме 10 из [3], если W — $\mathfrak{r}$-модуль и $W^{\mathfrak{r}}=0$, то $H^i(\mathfrak{r}, W)=0$ для всех $i\geqslant 0$. Отсюда ясно, что достаточно изучать только $\mathfrak{r}$-инварианты модуля $H^i(\mathfrak{n}, P)$. Поскольку представление $\mathfrak{r}$ в P и в $\mathfrak{n}$, а стало быть, и в $C^i(\mathfrak{n}, P)$ вполне приводимо, модуль H^i можно определить как дополнительный подмодуль к B^i в Z^i, а подмодуль $(H^i)^{\mathfrak{r}}$ — как дополнительный подмодуль к $(B^i)^{\mathfrak{r}}$ в $(Z^i)^{\mathfrak{r}}$. Тем самым задача сведена к изучению когомологий комплекса $C_0=C(\mathfrak{n}, P)^{\mathfrak{r}}$. Точнее, доказана

ЛЕММА 1. *Если $H^i(C_0)=0$ для всех $i\geqslant 0$, то и $H^n(\mathfrak{p}, P)=0$ для всех $n\geqslant 0$.*

Остается вычислить когомологии комплекса C_0.

2. Пусть $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}+\mathfrak{h}+\widetilde{\mathfrak{m}}$ — разложение $\mathfrak{g}$ в сумму картановской и двух нильпотентных подалгебр, причем $\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{n}$, $\widetilde{\mathfrak{m}}\supseteq\widetilde{\mathfrak{n}}$. Алгебры $\mathfrak{m}$ и $\widetilde{\mathfrak{m}}$ порождаются корневыми векторами; пусть $\{e_\alpha\}$ — базис из них в $\mathfrak{m}$ и $\{f_\alpha\}$ — двойственный относительно формы Киллинга базис в $\widetilde{\mathfrak{m}}$. Тогда, если $\{h_i\}$ — ортогональный базис в $\mathfrak{h}$, то двойственным к базису $\{e_\alpha, h_i, f_\alpha\}$ будет базис $\{f_\alpha, h_i, e_\alpha\}$. Произвольный элемент первого базиса мы будем обозначать u_i, а соответствующий ему элемент второго — u^i. Хорошо известно, что оператор $\Sigma\, \mathrm{ad}\, u^i\, \mathrm{ad}\, u_i = \Gamma$ равен E на G. Кроме того (см., например, [4],

лемма 11), если $k : C^i(\mathfrak{g}, G) \to C^{i-1}(\mathfrak{g}, G)$ — оператор гомотопии, определенный равенством

$$(k\varphi)(g_1, \ldots, g_{i-1}) = \sum u^i \varphi(u_i, g_1, \ldots, g_{i-1}),$$

то $kd + dk = \Gamma = E$ на $C^i(\mathfrak{g}, G)$. Оператор k также коммутирует с действием $\mathfrak{g}$ в $C = \oplus C^i(\mathfrak{g}, G)$.

Чтобы использовать эти факты, мы вложим комплекс C_0 в C. Для этого заметим, что естественный изоморфизм линейных пространств $\mathfrak{n} \approx \mathfrak{p}/\mathfrak{r} \approx \mathfrak{g}/\widetilde{\mathfrak{p}}$ позволяет рассматривать i-линейные функции на $\mathfrak{n}$ как функции на $\mathfrak{p}$ или на $\mathfrak{g}$, полагая, что получающаяся функция $\overline{\varphi}$ на $\mathfrak{p}$, соответственно $\hat{\varphi}$ на $\mathfrak{g}$, обращается в 0, если хоть один ее аргумент принадлежит $\widetilde{\mathfrak{p}}$. Изучим теперь получающиеся продолжения φ нулем.

ЛЕММА 2. *Пусть* $\varphi \in C^i(\mathfrak{n}, P)$, $\overline{\varphi}$ — ее *продолжение нулем на* $\mathfrak{r}$. $\overline{\varphi} \in Z^i(\mathfrak{p}, P)$ *тогда и только тогда* $\varphi \in Z^i(C_0)$.

Из формулы дифференциала видно, что $(d\overline{\varphi})(r_1, r_2, p_1, \ldots, p_{i-1}) \equiv 0$, причем используется только то, что $\mathfrak{r}$ — подалгебра. С другой стороны, ясно, что если $\overline{\varphi}$ — коцикл, то и φ — коцикл. Остается рассмотреть $(d\overline{\varphi})(r_1, n_1, \ldots, n_i)$. Но в формуле оператора d члены, в которых r_1 — один из аргументов, вновь равны 0, и остается только

$$(d\overline{\varphi})(r_1, n_1, \ldots, n_i) = \sum_{k=1}^{i} (-1)^k \varphi([r_1, n_k], n_1, \ldots$$

$$\ldots, \hat{n}_k, \ldots, n_i) + r_1\varphi(n_1, \ldots, n_k) = (r\varphi)(n_1, \ldots, n_k).$$

Итак:

$(d\overline{\varphi})(r_1, r_2, p_1, \ldots, p_{i-1}) = 0$ всегда;

$(d\overline{\varphi})(n_1, n_2, \ldots, n_{i+1}) = 0$ тогда и только тогда, когда φ — коцикл;

$(d\overline{\varphi})(r_1, n_1, \ldots, n_i) = 0$ тогда и только тогда, когда $(r\varphi) = 0$ для всех $r \in \mathfrak{r}$. Лемма доказана.

3. Теперь рассмотрим комплекс $\hat{C} = \operatorname{Im} C_0 \subset C$.

ЛЕММА 3. а) *Если* $\varphi \in C^i(\mathfrak{g}, G)$ *и для всех* $r \in \mathfrak{r}$ $(r\varphi) = 0$, *то* $\varphi|_{\mathfrak{n}} \in C_0$.

б) *Если, кроме того, для всех* $\widetilde{p} \in \widetilde{\mathfrak{p}}$ $\varphi(\widetilde{p}, \ldots) = 0$, *то* $\varphi \in \hat{C}$.

Чтобы доказать б), надо найти для данной φ функцию $\psi \in C_0$ такую, что $\hat{\psi} = \varphi$. Пусть а) уже доказано; тогда ясно, что в качестве ψ можно взять $\varphi|_{\mathfrak{n}}$, и б) следует из а).

Докажем теперь а). Если $\varphi \in C^i(\mathfrak{g}, G)$, то $\varphi|_{\mathfrak{n}} \in C^i(\mathfrak{n}, G)$. Выберем в $\mathfrak{n}$ базис из корневых векторов e_α. Поскольку $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$, для произвольного $h \in \mathfrak{h}$ имеем

$$0 = (h\varphi)(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_i}) =$$

$$= [h, \varphi(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha i})] - \sum_{k=1}^{i} \varphi(e_{\alpha_1}, \ldots, [h, e_{\alpha_k}], \ldots, e_{\alpha_i}) =$$

$$= [h, \varphi(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_i})] - \sum_k \alpha_k(h) \cdot \varphi(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_i}),$$

т. е. $\varphi(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_i})$ — корневой вектор с весом $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i$, $\varphi(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_i}) = C_{\alpha_1 \ldots \alpha_i} e_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_i}$.

Но тогда $\varphi|_{\mathfrak{n}} \in C^i(\mathfrak{n}, P)$, поскольку $e_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_i} \in \mathfrak{p}$ (или равен 0, если $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i$ — не корень). Теперь уже очевидно, что $\varphi|_{\mathfrak{n}} \in C_0$, что требовалось доказать.

Мы знаем, что операторы k и d коммутируют с действием $\mathfrak{g}$ на C. Кроме того,

$$(k\varphi)(\tilde{p}, \ldots) = -\sum u^i \psi(\tilde{p}, u_i, \ldots).$$

Отсюда следует

ЛЕММА 4. *Если* $\psi \in \hat{C}$, *то* $h\psi \in \hat{C}$, *и* $d(h\psi)|_{\mathfrak{n}} \in C_0$.

4. Итак, мы можем определить отображение $C_0 \to B_0$, сопоставляющее ψ функцию $d(h\hat{\psi})|_{\mathfrak{n}}$. Его ограничение на Z_0 обозначим через $\tilde{\Gamma}$.

ЛЕММА 5. Γ *невырождено.*

Мы знаем, что $dk + kd = E$ в C. Отсюда для всех $\varphi \in Z_0$ $\tilde{\Gamma}_\varphi = (E - hd)\hat{\varphi}$. Распишем правую часть:

$$(E - kd)(\hat{\varphi})(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_i}) = \sum u^i u_i \varphi(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_i}) -$$

$$- \sum u^i (d\hat{\varphi})(u_i, e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_i}).$$

Члены во второй сумме обращаются в 0, когда $u_i \in \mathfrak{b}$, и равны $e_\alpha (f_\alpha \varphi)(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_i})$, когда $u_i = f_\alpha$, $u^i = e_\alpha$. Таким образом,

$$\tilde{\Gamma}(\varphi)(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_i}) = \sum_{\alpha, i} (e_\alpha f_\alpha + f_\alpha e_\alpha + h_i^2) \varphi(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_i}) -$$

$$- \sum_\alpha e_\alpha f_\alpha \varphi(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_i}) - \sum_\alpha \sum_k e_\alpha \varphi(e_{\alpha_1}, \ldots, [f_\alpha, e_{\alpha_k}], \ldots, e_{\alpha_i}).$$

Остается рассмотреть наименьший набор корней $(\alpha_1, \ldots \ldots, \alpha_i)$ такой, что $\varphi(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_i}) \neq 0$. Тогда $\varphi(e_{\alpha_1}, \ldots \ldots, [f_\alpha, e_{\alpha_k}], \ldots, e_{\alpha_i}) = 0$, так как $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k - \alpha_1, \ldots \ldots, \alpha_i) < (\alpha_1, \ldots, \alpha_i)$. Стало быть, для этого набора

$$\widetilde{\Gamma}\varphi(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_i}) = \left(\sum f_\alpha e_\alpha + \sum h_i^2\right)\varphi(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_i}) =$$
$$= e_{\alpha_1 \ldots \alpha_i}\left(\sum [f_\alpha [e_\alpha, e_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_i}]] + \sum [h_i [h_i, e_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_i}]]\right).$$

По предположению, $C_{\alpha_1 \ldots \alpha_i} \neq 0$, и доказательство леммы будет завершено, если мы покажем, что стоящий в скобках вектор не равен 0. Но известно [5], что если $\langle e_\alpha, f_\alpha \rangle = 1$, то

$$[f_\alpha [e_\alpha e_\beta]] = \langle \alpha, \alpha \rangle \frac{(q+1) r}{2} e_\beta,$$

где $q, r \geqslant 0$ и

$$\sum h_i^2 e_\beta = \sum \beta (h_i)^2 e_\beta = \langle \beta, \beta \rangle e_\beta.$$

Поскольку $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$, $\langle \beta, \beta \rangle > 0$, лемма доказана.

Но она означает, что $\dim Z_0^i \leqslant \dim B_0^i$, что возможно лишь при $H_0^i = 0$. Следовательно, $H^n(\mathfrak{p}, P) = 0$, что и требовалось.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 28.IV.1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Nijenhuis A., Richardson R. W., Cohomology and deformations in graded Lie algebras, Bulletin of American Mathematical Society, 72 (1966), 1—29.

[2] Nijenhuis A., Richardson R. W., Commutative algebra cohomology and deformations of Lie and associative algebras, Journal of Algebra 9, № 1 (1968), 42—53.

[3] Hochshild J. P., Serre Cohomology of Lie algebras, Ann Math., 57, № 3 (1953), 591—603.

[4] Ariband F., Une nouvelle demonstration d'un theoreme de R. Bott et B. Kostant, Bull. Soc. Math. France 95 (1967), 205—242.

[5] Джекобсон Н., Алгебры Ли. М., 1964.