S. K. Karepanov, Nonperturbative vacuum energy density in two-dimensional scalar models, *TMF*, 1984, Volume 60, Number 1, 72–86

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 60, № 1
июль, 1984

НЕПЕРТУРБАТИВНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ ВАКУУМА В ДВУМЕРНЫХ СКАЛЯРНЫХ МОДЕЛЯХ

Карепанов С. К.

Получена равномерная по константе связи g и полю оценка сверху эффективного потенциала для двумерной скалярной теории поля с произвольным самодействием. Доказано «несуществование» моделей $:\cos\alpha\varphi:$ и $:\varphi^{2N}\exp\alpha\varphi:$ при $\alpha^2\geqslant 8\pi$. Найдены точные асимптотики по g плотности энергии вакуума для $P(\varphi)_2$ и модели Хёэг-Крона $:\exp\alpha\varphi:$, а также полного пропагатора при нулевом импульсе.

В квантовой теории поля (КТП) все более актуальной становится проблема разработки методов расчета без использования теории возмущения (ТВ) в том или ином виде. Понятно, что плоха не сама ТВ, а неудовлетворительно то, что в большинстве случаев ее применение математически строго необосновано. С одной стороны, это связано с отсутствием строго доказательства существования самой КТП, а с другой стороны, с отсутствием доказательства применимости ТВ к конкретным моделям. Кроме того, ТВ имманентно связана с «малым» параметром и непригодна для «сильных» случаев.

Цель данной работы заключается в развитии строгих непертурбативных методов применительно к функциональным интегралам двумерной локальной скалярной теории поля с самодействием. Работа является развитием методов получения точных равномерных оценок сверху и снизу плотности энергии вакуума (ПЭВ) нелокальных и неполиномиальных теорий [1—2]. О точности этих оценок говорит тот факт, что оценки сверху и снизу в важном случае сильной константы связи совпадают с точностью до коэффициента для всех исследованных потенциалов и ультрафиолетовых (УФ) поведений нелокального пропагатора. В случае же экспоненциального взаимодействия получена точная асимптотика.

Как известно, в рамках конструктивной КТП доказано существование евклидова поля для ряда двумерных моделей $P(\varphi)_2$ [3], $:\exp\alpha\varphi:$ [4], $:\cos\alpha\varphi:$ [5] в конечном объеме при снятии УФ-обрезания. На основании этого имеет математический смысл вакуумное среднее S-матрицы в евклидовом объеме V:

$$(1)\qquad S_V(g)=\left\langle \exp\left(-\int\limits_V d^2x\mathscr{H}_{\text{int}}\right)\right\rangle_m,$$

где $\langle\ldots\rangle_m$ — математическое ожидание по гауссовскому свободному полю с массой m. Гамильтониан взаимодействия $\mathscr{H}_{\text{int}}$ берется в нормально упорядоченной форме, что достаточно для устранения УФ-расходимостей. Объемные расходимости устраняются вычитанием из гамильтониана энергии вакуума, которая описывает эффект поляризации вакуума и имеет линейную по V главную асимптотику [3]. Таким образом, для вышеуказанных моделей ПЭВ конечна и определяется как предел

$$E(g)=-\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\ln S_V(g). \tag{2}$$

На основе достаточно точного равномерного по g вариационного неравенства найдены оценки E сверху при $g\to\infty$ для ряда потенциалов. Кроме того, найдены точные асимптотики E для моделей φ^{2N} и $\exp\alpha\varphi$, согласующиеся как с оценкой снизу Нельсона [3] (эта довольно грубая оценка, насколько нам известно, является единственным опубликованным результатом подобного рода при $g\to\infty$), так и с нашей оценкой сверху. Дается точное доказательство анонсированного в [6] результата (полученного в приближении Рэлея – Ритца) о том, что модель $:(\cos\alpha\varphi-1):_2$ $(m^2\neq0)$ не имеет основного состояния при $\alpha^2\geqslant8\pi$. Показано также, что основное состояние отсутствует при $\alpha^2\geqslant8\pi$ и у модели $\varphi^{2N}\exp\alpha\varphi$. Метод почти непосредственно распространяется на случай $d=3$ (также суперперенормированная теория), а также для изучения эффективного потенциала в физически интересном случае моделей при конечных температурах.

1. ОЦЕНКА $E(g)$ СВЕРХУ

Достаточно точные оценки ПЭВ двумерных скалярных моделей можно получить на основании неравенства, полученного Ефимовым [1]. В частности, из него следует справедливость при произвольных μ^2 и $\varphi_0{}^2$ следующего неравенства:

$$E(g)\leqslant\frac{1}{8\pi}\left(\mu^2-m^2-m^2\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right)+\frac{1}{2}m^2\varphi_0{}^2+ \tag{3}$$
$$+g\frac{1}{V}\int\limits_V d^2x\langle N_m(\mathscr{H}_{\rm int}(\varphi+\varphi_0))\rangle_\mu\equiv E^+(g,\mu^2,\varphi_0).$$

Будем искать наилучшую оценку E варьированием по μ^2 и φ_0:

$$E\leqslant E^+(g)=\min_{\mu^2,\varphi_0}E^+(g,\mu^2,\varphi_0).$$

Для вычисления последнего члена в (3) удобно использовать формализм перехода от нормального упорядочения N_m к нормальному упорядочению N_μ [6]. Из теоремы Вика следует, что

$$N_m(\exp(i\beta\varphi))=\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{\beta^2/8\pi}N_\mu(\exp(i\beta\varphi)). \tag{4}$$

Кроме того, нам потребуется следующее соотношение:

$$\langle N_m(F(\varphi))\rangle_m=N_m(F(\varphi))|_{\varphi=0}, \tag{5}$$

вытекающее из формулы Фейнмана – Каца – Нельсона [3].

Ниже мы рассмотрим минимизирующие процедуры для ряда характерных потенциалов взаимодействия в пределе сильной константы связи, т. е. при $g/m^2\to\infty$.

Случай А. $U_{\text{int}} = N_m(\varphi^{2N})$. С помощью (4) получаем

$$N_m(\varphi^{2N}) = \left(\frac{1}{8\pi}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right)^N N_\mu\left(H_{2N}\left(\varphi\Big/\sqrt{\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\mu^2}{m^2}}\right)\right),$$

где $H_{2N}(x)$ — полином Эрмита $2N$-й степени.

Из (5) следует, что

$$\frac{E^+}{m^2} = \min_{A,\varphi_0}\left\{\Phi(A) + \frac{1}{2}\varphi_0{}^2 + \frac{g}{m^2}\left(\frac{1}{8\pi}\ln A\right)^N H_{2N}\left(\frac{\varphi_0}{\sqrt{\frac{1}{2\pi}\ln A}}\right)\right\},$$

здесь и далее введены обозначения $A \equiv \mu^2/m^2$ и $\Phi = {}^1/{}_8\pi(A - \ln A - 1)$. При $g/m^2 \to \infty$ минимум по φ_0 определяется последним членом, причем при $A \to \infty$. Делая замену переменной $x = \varphi_0\Big/\sqrt{\frac{1}{2\pi}\ln A}$ и вводя обозначение $\min\limits_x H_{2N}(x) = -|H_{2N}(c_N)| = -M_N$, получаем

$$\frac{E^+}{m^2} \simeq \min_A\left\{\Phi(A) + c_N{}^2\frac{1}{4\pi}\ln A - M_N\frac{g}{m^2}\left(\frac{1}{8\pi}\ln A\right)^N\right\}.$$

Отсюда имеем при $g/m^2 \to \infty$

$$\frac{E^+}{m^2} \simeq -M_N\frac{g}{m^2}\left(\frac{1}{8\pi}\ln\frac{g}{m^2}\right)^N\left\{1 + O\left(\frac{\ln\ln(g/m^2)}{\ln(g/m^2)}\right)\right\}.$$

В частности, $M_2 = 24$ и полученная асимптотика совпадает с результатом [1]. Кроме того, сравнивая с нижней оценкой ПЭВ $P(\varphi)_2$ [3], заключаем, что

$$\lim_{g/m^2\to\infty} E(g)/g(\ln(g/m^2))^N = -|\text{const}|.$$

Неопределенность константы связана с довольно грубой оценкой снизу, что, в свою очередь, следует из невозможности улучшить оценки гиперсжимаемости. Однако ниже будет показано, как можно получить **точное** значение неизвестной пока константы.

Случай Б. $U_{\text{int}} = N_m(\varphi^{2N}\exp(\alpha\varphi))$. Представляя U_{int} как

$$U_{\text{int}} = \frac{d^{2N}}{d\alpha^{2N}}(N_m(\exp(\alpha\beta))),$$

из (4) и (5) получаем

$$U_{\text{int}} = \left(\frac{1}{8\pi}\ln A\right)^N N_\mu\left[H_{2N}\left(\left(\frac{\alpha}{4\pi}\ln A - \varphi\right)\Big/\sqrt{\frac{1}{2\pi}\ln A}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\pi}\ln A + \alpha\varphi\right)\right].$$

Таким образом, имеем

$$\frac{E^+}{m^2} = \min_{A,\varphi_0}\left\{\Phi(A) + \frac{1}{2}\varphi_0{}^2 + \frac{g}{m^2}\left(\frac{1}{8\pi}\ln A\right)^N\times\right.$$
$$\left.\times H_{2N}\left(\left(\frac{\alpha}{4\pi}\ln A - \varphi\right)\Big/\sqrt{\frac{1}{2\pi}\ln A}\right)\exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\pi}\ln A - \alpha\varphi\right)\right\}.$$

Обозначая $\omega=\alpha\sqrt{\frac{1}{2\pi}\ln A}$, получаем при $g/m^2\to\infty$ уравнение на минимум:

$$H_{2N}'(c)-\omega H_{2N}(c)=0 \qquad \left(c=\left(\frac{\alpha}{4\pi}\ln A-\varphi_0\right)\Big/\sqrt{\frac{1}{2\pi}\ln A}\right).$$

Минимум при $\omega\to\infty$ приближается к самому крайнему отрицательному корню $H_{2N}(c)$. Полагая при $g/m^2\to\infty$

$$M_N(\alpha)=\begin{cases}\left.\dfrac{|H_{2N}(c)|}{\alpha}\right|_{c=c_N(\infty)}, & \alpha\neq 0.\\ H_{2N}(c_N(0)), & \alpha=0,\end{cases}$$

$$\theta(\alpha)=\begin{cases}1, & \alpha\neq 0,\\ 0, & \alpha=0,\end{cases}$$

получаем

$$\frac{E^+}{m^2}\simeq\min_A\left\{\Phi(A)-\frac{g}{m^2}\frac{1}{2^{\theta(\alpha)}}\left(\frac{1}{8\pi}\ln A\right)^{N-\theta(\alpha)/2}M_N(\alpha)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(\frac{\alpha^2}{8\pi}\ln A+\alpha|c_N(\alpha)|\sqrt{\frac{1}{2\pi}\ln A}\right)\right\}.$$

При $\alpha^2/8\pi\geqslant 1$ минимум по A не существует. $E(g)$ не ограничена снизу, и, следовательно, у модели нет основного состояния, по крайней мере, при $\alpha^2/8\pi\geqslant 1$. Таким образом, при $\alpha^2/8\pi<1$ с учетом только двух главных членов в логарифмическом разложении

$$\frac{E^+}{m^2}\simeq-\left(\frac{g}{m^2}\right)^{8\pi/(8\pi-\alpha^2)}\exp\left\{\frac{8\pi\alpha|c_N(\alpha)|}{8\pi-\alpha^2}\sqrt{\frac{4}{8\pi-\alpha^2}\ln\frac{g}{m^2}}\left[1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+O\left(\frac{\ln\ln(g/m^2)}{\sqrt{\ln(g/m^2)}}\right)\right]\right\}.$$

При $\alpha=0$ имеем $E^+=-M_N(0)g\left(\frac{1}{8\pi}\ln\frac{g}{m^2}\right)^N$, что совпадает со случаем А.

Случай В. $U_{\text{int}}=N_m(1/(1+\lambda\varphi^2))$ $(\lambda>0)$. С помощью разложения U_{int} по полиномам Эрмита получаем

$$N_m\left(\frac{1}{1+\lambda\varphi^2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{\lambda}{8\pi}\ln A\right)^k N_\mu\left(H_{2k}\left(\varphi\Big/\sqrt{\frac{1}{2\pi}\ln A}\right)\right)=$$

$$=N_\mu\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dt\exp(-t^2/2)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1+\dfrac{\lambda}{2}\left(\varphi^2-\dfrac{t^2}{4\pi}\ln A\right)}{\left[1+\dfrac{\lambda}{2}\left(\varphi^2-\dfrac{t^2}{4\pi}\ln A\right)\right]^2+\lambda^2\varphi^2\dfrac{t^2}{4\pi}\ln A}\right)$$

Отсюда находим, что

$$\frac{E^+}{m^2}=\min_{A,\varphi_0}\left\{\Phi(A)+\frac{1}{2}\varphi_0^2+\frac{g}{m^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dt\exp(-t^2/2)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1+\frac{\lambda}{2}\left(\varphi_0^2-\frac{t^2}{4\pi}\ln A\right)}{\left[1+\frac{\lambda}{2}\left(\varphi_0^2-\frac{t^2}{4\pi}\ln A\right)\right]^2+\lambda^2\varphi_0^2t^2\frac{1}{4\pi}\ln A}\right\}.$$

Можно показать, что последний член при любых μ^2 и φ_0 строго положителен (т. е. взаимодействие в случае В строго отталкивающее), а при $\varphi_0>{}^2/_3\lambda$ монотонно убывает.

Таким образом, минимум по φ_0 при $g/m^2\to\infty$ будет при $\varphi_0\to 0$ и $A\to\infty$, т. е. когда происходит «втягивание» в эффективную область интегрирования отрицательной впадины. Итак,

$$\frac{E^+}{m^2}=\min_A\left\{\Phi(A)+\frac{g}{m^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dt\frac{\exp(-t^2/2)}{1-(\lambda t^2/8\pi)\ln A}\right\}=$$

$$=\min_A\left\{\Phi(A)+\frac{2\sqrt{\pi}\,g/m^2}{\lambda(^1/_4\pi)\ln A}\sum_{k=0}\frac{1}{\Gamma(k+^1/_2)}\left(-\left[\lambda\frac{1}{4\pi}\ln A\right]^{-1}\right)^k\right\}.$$

При $g/m^2\to\infty$ имеем окончательно

$$\frac{E^+}{m^2}\simeq\frac{8}{\pi\lambda}\frac{g}{m^2}\frac{1}{\ln(g/m^2)}\left\{1+O\left(\frac{\ln(g/m^2)\ln\ln(g/m^2)}{g/m^2}\right)\right\}.$$

Случай Г. $U_{\text{int}}=N_m(\exp(\alpha\varphi))$. При этом условии

$$\frac{E^+}{m^2}=\min_{A,\varphi_0}\left\{\Phi(A)+\frac{1}{2}\varphi_0^2+\frac{g}{m^2}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\pi}\ln A+\alpha\varphi_0\right)\right\}.$$

Уравнение на минимум по φ_0 есть

$$\varphi_0+\alpha\frac{g}{m^2}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{8\pi}\ln A+\alpha\varphi_0\right)=0.$$

Полагая $x=-\alpha\varphi_0$, получаем эквивалентное уравнение

$$x=\alpha^2\frac{g}{m^2}\exp\left(-x-\frac{\alpha^2}{8\pi}\ln A\right). \tag{6}$$

Решение этого уравнения всегда имеется при $x>0$. Таким образом, получаем

$$\frac{E^+}{m^2}=\min_A\left\{\Phi(A)+\frac{x^2}{2\alpha^2}+\frac{x}{\alpha^2}\right\}=\min_A\bar{E}(A).$$

Здесь функция $x=x(A)$ определяется из уравнения (6). Из (6) находим, что

$$\frac{d\bar{E}}{dA}=\frac{1}{8}+\frac{1}{\alpha^2}(1+x)\frac{dx}{dA}=\frac{1}{8}-\frac{x}{8\pi}\frac{1}{A}.$$

Поэтому $A=x(A)/8\pi$, и опять из (6) следует уравнение уже относительно A. Обращая зависимость $x=x(A)$, получаем

$$\frac{E^+}{m^2}\simeq\frac{1}{8\pi}\left(\frac{x}{\pi}-1-\frac{1}{\pi}\ln x\right)+\frac{x^2}{2\alpha^2}+\frac{x}{\alpha^2},$$

где x определяется из уравнения $x\exp(x)=\alpha^2\frac{g}{m^2}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{-\alpha^2/8\pi}$. Это уравнение имеет решение при любом α^2 и g/m^2, и, в частности, при $g/m^2\to\infty$ находим, что $x\simeq\ln(g/m^2)$. Поэтому окончательно получаем следующую асимптотику:

$$\frac{E^+}{m^2}\simeq\frac{1}{2\alpha^2}\ln^2\left(\frac{g}{m^2}\right)\left\{1+O\left(\frac{\ln\ln(g/m^2)}{\ln(g/m^2)}\right)\right\}.$$

В случае взаимодействия $U_{\text{int}}=(\exp\alpha\varphi-1)$ получаем аддитивную поправку порядка $-g/m^2$, и таким образом, находим, что $E^+/m^2=-g/m^2$ при $g/m^2\to\infty$.

Для взаимодействия $U_{\text{int}}=(\exp\alpha\varphi-1-\alpha\varphi)$ имеем

$$\frac{E^+}{m^2}=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{y}{2}-\ln\left(1+\frac{y}{2}\right)\right]+\frac{1}{2\alpha^2}y^2+\frac{1}{\alpha^2}y-\left(\frac{g}{m^2}\right)^2\frac{\alpha^2}{2}-\frac{g}{m^2},$$

где y находится из уравнения

$$y\exp(y)=\frac{g}{m^2}\alpha^2\exp\left(\alpha\frac{g}{m^2}\right)\left(1+\frac{y}{2}\right)^{-\alpha^2/8\pi}.$$

Решение этого уравнения всегда существует, и, в частности, при $g/m^2\to\infty$

$$\frac{E^+}{m^2}\simeq-\frac{\alpha^2}{8\pi}\frac{g}{m^2}\ln\left(\alpha^2\frac{g}{m^2}\right)(1+O(1/\ln(g/m^2))).$$

Случай Д. $U_{\text{int}}=N_m(\exp\alpha\varphi^2)$ $(\alpha\geqslant0)$. Очевидно, что справедливо следующее равенство:

$$N_m(\exp\alpha\varphi^2)=N_m\left(\int_{-\infty}^{+\infty}dt\exp(-t^2/2-2\sqrt{\alpha}\,\varphi t)\right)=$$

$$=N_\mu\left(\exp\left(\frac{4\alpha^2\varphi^2}{1+(\alpha/2\pi)\ln A}\right)\right)\Big/\sqrt{1+\frac{\alpha}{2\pi}\ln A}.$$

Отсюда, в свою очередь, получаем представление

$$\frac{E^+}{m^2}=\min_{A,\varphi_0}\left\{\Phi(A)+\frac{1}{2}\varphi_0{}^2+\right.$$

$$\left.+\frac{g}{m^2}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\ln A\right)^{-1/2}\exp\left(\frac{4\alpha^2\varphi_0{}^2}{1+(\alpha/2\pi)\ln A}\right)\right\}.$$

Минимум по φ_0 будет при $\varphi_0=0$, и далее стандартным образом имеем асимптотику

$$\frac{E^+}{m^2}\simeq\frac{g}{m^2}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\ln\frac{g}{m^2}\right)^{-1/2}\left(1+O\left(\frac{g}{m^2}\left(\ln\frac{g}{m^2}\right)^{-1/4}\right)\right).$$

Случай Е. $U^{(\pm)}_{\text{int}}=\pm N_m(\cos\beta\varphi-1)$. Рассмотрим сначала просто $\pm N_m(\cos\beta\varphi)$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{E^{+}_{(\pm)}}{m^2}=\min_{A,\varphi_0}\left\{\Phi(A)+\frac{1}{2}\varphi_0^2\pm\frac{g}{m^2}\cos\beta\varphi_0\exp\left(\frac{\beta^2}{8\pi}\ln A\right)\right\}.$$

Уравнение на минимум по φ_0 есть

$$\varphi_0\mp\frac{g}{m^2}\beta\sin\beta\varphi_0\cdot A^{\beta^2/8\pi}=0.$$

Для $U^{(-)}_{\text{int}}$ минимум будет при $\varphi_0=0$, а для $U^{(+)}_{\text{int}}$ точка минимума определяется из уравнения

$$\varphi_0=\frac{g}{m^2}\beta\sin\beta\varphi_0A^{\beta^2/8\pi}, \tag{7}$$

в котором она является вторым решением $\varphi_0\neq0$. Решения (7) существуют только при $\frac{g}{m^2}\beta A^{\beta^2/8\pi}>1$ и их количество увеличивается с ростом этой величины. Итак, получаем

$$\frac{E^{+}_{(-)}}{m^2}=\min_{A}\left\{\Phi(A)-\frac{g}{m^2}A^{\beta^2/8\pi}\right\}.$$

При $\beta^2/8\pi\geqslant1$ минимум у этого выражения отсутствует, т. е. $E_{(-)}$ не ограничена снизу и модель, таким образом, не существует, по крайней мере, при $\beta^2/8\pi\geqslant1$. Это утверждение совпадает с полученным в приближении среднего поля Колеманом [6]. Однако вполне очевидно, что доказательство Колемана о несуществовании случая Е при $\beta^2/8\pi\geqslant1$ не убедительно, т. к., строго говоря, автором доказывается «несуществование» приближения среднего поля, а не самой модели. Итак, при $\beta^2/8\pi<1$ имеем

$$A\simeq\left(\beta\frac{g}{m^2}\right)^{8\pi/(8\pi-\beta^2)}\quad\text{и}\quad\frac{E^{+}_{(-)}}{m^2}|\simeq-\frac{8\pi-\beta^2}{8\pi\beta^2}\left(\beta^2\frac{g}{m^2}\right)^{8\pi/(8\pi-\beta^2)}.$$

Для $E^{+}_{(+)}$ получаем систему уравнений

$$A-1=\frac{g}{m^2}\beta^2A^{\beta^2/8\pi}(-\cos y), \tag{8}$$

$$\frac{y}{\sin y}=\frac{g}{m^2}\beta^2\left(1-\frac{y\cos y}{\sin y}\right)^{\beta^2/8\pi}\qquad(y=\beta\varphi_0). \tag{9}$$

Так как правая и левая части (9) в интервале $(0,\pi)$ являются монотонно возрастающими функциями y, то при конечных β^2 и $g/m^2\to\infty$ для существования решения (9) необходимо, чтобы функция $y/\sin y$ возрастала при $y\to\pi$ быстрее, чем правая часть (9). Так как $y/\sin y\simeq\pi/(\pi-y)$ при $y\to\pi$ и $(1-y\operatorname{ctg}y)^{\beta^2/8\pi}\simeq(\pi/(\pi-y))^{\beta^2/8\pi}$, то получаем с необходимостью ограничение $\beta^2/8\pi<1$. В противном же случае минимум опять не существует, т. к. член $\cos\beta\varphi_0A^{\beta^2/8\pi}$ при $\cos\beta\varphi_0<0$ делает E при $A\to\infty$ неограниченной отрицательной величиной. Итак, при $g/m^2\to\infty$ имеем $y\simeq$

$\simeq\pi(1-(\beta^2 g/m^2)^{-8\pi/(8\pi-\beta^2)})$ и из (8) получаем $A\simeq(\beta^2 g/m^2)^{8\pi/(8\pi-\beta^2)}$. Поэтому

$$\frac{E^{+}_{(+)}}{m^2}\simeq-\frac{8\pi-\beta^2}{8\pi\beta^2}\left(\beta^2\frac{g}{m^2}\right)^{8\pi/(8\pi-\beta^2)}.$$

При $U_{\rm int}=\pm(\cos\beta\varphi-1)$ возникает аддитивная добавка $\mp g/m^2$, являющаяся величиной следующего порядка малости при $g/m^2\to\infty$.

Случай Ж. $U_{\rm int}=N_m(\cos\beta\sqrt{\varphi})$. Сначала получим представление произвольного $U_{\rm int}(\varphi)$ с порядком роста по φ не выше 2 в нормально упорядоченном виде.

Положим, что

$$U_{\rm int}=\sum_{k=0}^{\infty}u_k\varphi^k.$$

Отсюда имеем

$$N_m(U_{\rm int}(\varphi))=\sum_{k=0}^{\infty}u_kN_m(\varphi^k)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}u_k\left(\frac{1}{8\pi}\ln A\right)^{k/2}N_\mu\left(H_k\left(\varphi\Big/\sqrt{\frac{1}{2\pi}\ln A}\right)\right).$$

Применяя известное представление

$$H_k(x)=\sqrt{\frac{2^{k-1}}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x\sqrt{2}+it)^k\exp(-t^2/2)\,dt,$$

пересуммируем ряд и в результате получим требуемое выражение

$$N_m(U_{\rm int})=N_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\exp(-t^2/2)\,U_{\rm int}\left(\varphi+it\sqrt{\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\mu^2}{m^2}}\right)\right).$$

Отсюда видно, что сходимость интеграла обеспечивается, если порядок роста $U_{\rm int}$ не выше 2. Это более сильное утверждение, чем в работе [7]. В этой работе допустимый порядок ограничен единицей на основе того, что для определения нормального упорядочения $U_{\rm int}$ использовалось преобразование Фурье. Наше представление является обобщением преобразования Фурье на класс функций с порядком роста не выше 2 [8]. Подобный же вывод сделан на основе анализа рядов в [9]. Итак, для случая Ж имеем представление

$$N_m(\cos\beta\sqrt{\varphi})=N_\mu\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}dt\exp(-t^2/2)\times\right.$$

$$\times\cos\left(\beta\sqrt{\frac{\varphi}{2}}\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{t^2}{\varphi^2}\frac{1}{4\pi}\ln A}}\right)\times$$

$$\left.\times\operatorname{ch}\left(\beta\sqrt{\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{t^2}{\varphi^2}\frac{1}{4\pi}\ln A}-1}\right)\right).$$

Следовательно,

$$\frac{E^+}{m^2}=\min_{A,\,\varphi_0}\left\{\Phi(A)+\frac{1}{2}\varphi_0^2+\frac{g}{m^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dt\exp(-t^2/2)\times\right.$$
$$\times\cos\left(\beta\sqrt{\frac{\varphi_0}{2}}\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{t^2}{\varphi_0^2}\Delta}}\right)\times$$
$$\left.\times\operatorname{ch}\left(\beta\sqrt{\frac{\varphi_0}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{t^2}{\varphi_0^2}\Delta}-1}\right)\right\},$$
$$\Delta\equiv(1/4\pi)\ln A,$$

и основной вклад при $g/m^2\to\infty$ в минимум по φ_0 будут давать интегралы

$$I^{(\pm)}=\frac{|\varphi_0|}{2\sqrt{\Delta}}\int_0^\infty dt\exp\left(-\frac{t^2\varphi_0^2}{2\Delta}+\beta\sqrt{\frac{|\varphi_0|}{2}}\sqrt{\sqrt{1+t^2}\mp1}\right)\times$$
$$\times\cos\left(\beta\sqrt{\frac{|\varphi_0|}{2}}\sqrt{\sqrt{1+t^2}\pm1}\right)$$

соответственно при $\varphi_0\gtrless0$. При любом φ_0 экспоненты имеют при $\Delta\to\infty$ пикообразный характер и, следовательно, основной вклад в минимальные интегралы $I^{(\pm)}$ будет в окрестностях этих пиков при наложении на них впадин косинусоид. Максимальная степень роста $|I^{(\pm)}|\sim\exp(b_{(\pm)}\Delta^{1/3})$ обеспечивается при $\varphi_0=(\alpha_0(\Delta)\sqrt{2}\beta\Delta)^{2/3}$, где $\alpha_0=\alpha_0(\Delta)$ — некоторая ограниченная функция. Функцию $\alpha_0(\Delta)$ и ее асимптотику находим из требования их ограниченности, максимальности коэффициента $b_{(\pm)}$ и совпадения пика экспоненты со впадиной косинусоиды при возрастании Δ. Итак,

$$\min I^{(\pm)}\simeq-\exp(b_{(\pm)}\Delta^{1/3}(1+O(\ln\Delta/\Delta^{1/3}))),$$

где $b_{(+)}={}^3/_8\beta^{4/3}$ и $b_{(-)}=2^{-2/3}\beta^{4/3}$, и окончательно имеем оценку

$$\frac{E^+}{m^2}\simeq\left[\frac{b_{(-)}}{(4\pi)^{1/3}}-1\right]\frac{g}{m^2}\times$$
$$\times\exp\left\{b_{(-)}\left(\frac{1}{4\pi}\ln\frac{g}{m^2}\right)^{1/3}\left(1+O\left(\frac{\ln\ln(g/m^2)}{\ln^{1/3}(g/m^2)}\right)\right)\right\}$$

с точностью до двух главных членов лагорифмического разложения при $g/m^2\to\infty$.

2. НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ $:\varphi_2^{2N}:$

Покажем теперь, как можно находить **точные** асимптотики. Оказывается, выполняется следующая

Теорема 1. *Для модели* $:\varphi_2^4:$ *справедлив предел*

$$\lim_{g/m^2\to\infty}E(g,m^2)/g\ln^2(g/m^2)=-3/8\pi^2.$$

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая техническая

Лемма

$$I=\frac{1}{V}\ln\left\langle \exp\left(-\frac{1}{2}(m_1^2-m_2^2)\int_V d^2x\,(N_{m_1}(\varphi^2)-N_{m_2}(\varphi^2))\right)\right\rangle_{m_2}=$$
$$=\frac{1}{4\pi}(m_2^2-m_1^2).$$

Доказательство леммы заключается в прямом расчете I с введением промежуточного УФ-обрезания одинакового как в числителе, так и в знаменателе.

Итак, рассмотрим модель, описываемую гамильтонианом

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\left(\dot\varphi^2+\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\right)+\frac{m^2}{2}\varphi^2+gN_m(\varphi^4).$$

Перейдем от нормального упорядочения по массе m к нормальному упорядочению по массе $\mu\neq m$. Имеем по теореме Вика

$$N_m(\varphi^4)=N_\mu(\varphi^4)-6\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\mu^2}{m^2}N_\mu(\varphi^2)+3\left(\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right)^2.$$

Таким образом, эффективно возникает новый массовый член $\frac{1}{2}\Big(m^2-$ $-\frac{3}{\pi}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\Big)\varphi^2$, и поэтому мы перейдем в (1) к свободному полю, соответствующему этой новой массе. Учитывая изменение нормировки в (1) согласно лемме, мы получаем тождество, справедливое при любом μ^2,

$$E(g,m^2,m^2)=E\left(g,m^2-\frac{3}{\pi}g\ln\frac{\mu^2}{m^2},\mu^2\right)+$$
$$+3g\left(\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right)^2+\frac{3}{4\pi^2}g\ln\frac{\mu^2}{m^2}. \tag{10}$$

Здесь второй аргумент в E обозначает массу $\mathscr{H}$, а третий — массу, по которой произведено нормальное упорядочение взаимодействия. Очевидно, что интересующая нас величина определяется равенством $E(g,\ m^2)\equiv$ $\equiv E(g,\ m^2,\ m^2)$. Сдвинем теперь переменную поля $\varphi(x)$ в (1) на постоянную величину φ_0, т. е. $\varphi\to\varphi+\varphi_0$, и зафиксируем φ_0 таким образом, чтобы в сдвинутом гамильтониане отсутствовал линейный член:

$$4g\varphi_0^2=\left(-m^2+\frac{3}{\pi}g\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right).$$

При этом новый массовый член будет равен

$$\frac{M^2}{2}\varphi^2\equiv\left(m^2-\frac{3}{\pi}g\ln\frac{\mu^2}{m^2}+12g\varphi_0^2\right)\frac{\varphi^2}{2}.$$

Опять переходим к новой свободной массе в (1) с помощью леммы и получаем тождество

$$E(g,m^2,m^2)=E'(g,M^2,\mu^2)+3g\left(\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right)^2+$$
$$+\frac{3}{4\pi}M^2+\frac{3}{4\pi^2}g\ln\frac{\mu^2}{m^2}-\left(m^2-\frac{3}{\pi}g\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right)\frac{\varphi_0^2}{2}+g\varphi_0^4,$$

где E' — ПЭВ для гамильтониана

$$\mathscr{H}' = \frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\right) + \frac{M^2}{2}\varphi^2 + gN_\mu(\varphi^4) + 4g\varphi_0 N_\mu(\varphi^3).$$

Чтобы получить «нормальную» теорию, т. е. нормальное упорядочение по той же самой массе, которая стоит в свободном гамильтониане (иными словами, массе свободного гауссовского поля, по которому определяется взаимодействующее поле после последнего преобразования), необходимо зафиксировать произвол μ^2 следующим условием $M^2=\mu^2$, т. е.

(11) $$\frac{\mu^2}{2} = \frac{3}{\pi} g \ln \frac{\mu^2}{m^2} - m^2.$$

Таким образом,

$$E(g, m^2) = E'(g, M^2) + \frac{3}{4\pi^2} g \ln \frac{\mu^2}{m^2} + \frac{m^2\mu^2}{16g} + \frac{m^4}{16g} - \frac{3}{8\pi} m^2 \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \frac{3}{8\pi^2} g \ln^2\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right).$$

Решая (11) при $g/m^2 \to \infty$, получаем, что $\mu^2 \simeq \frac{6}{\pi} g \ln(g/m^2)$. Гамильтониан $\mathscr{H}'$ при $g/m^2 \to \infty$ имеет эффективную константу связи $g_{\text{eff}} \sim 1/\ln(g/m^2)$, поэтому на основании оценки [3] $E \geqslant -c g_{\text{eff}}^2$, справедливой при любых g_{eff}, можно утверждать, что $\lim\limits_{g/m^2 \to \infty} E'(g, M^2) = 0$. Следовательно, и

$$E(g, m^2) \simeq -\frac{3}{8\pi^2} g \ln^2 \frac{g}{m^2} \quad \text{или} \quad \lim_{g/m^2 \to \infty} E(g, m^2)/g \ln^2 \frac{g}{m^2} = -\frac{3}{8\pi^2}.$$

С л е д с т в и е 1. Для модели $:\varphi_2^{2N}:$ или более общего полиномиального взаимодействия типа $U_{\text{int}} = \varphi^{2N} + a_1\varphi^{2N-1} + \ldots + a_{2N}$ справедливо

$$\lim_{g/m^2 \to \infty} E(g, m^2)/g \ln^N (g/m^2) = -M_N/(8\pi)^N,$$

где постоянная M_N определена в разделе 1.

Доказательство теоремы непосредственно обобщается на данный случай, при этом в пределе $g/m^2 \to \infty$ имеем $\varphi_0 \simeq \sqrt{\frac{c_N^2}{2\pi} \ln(g/m^2)}$, где c_N — точка абсолютного минимума полинома Эрмита $H_{2N}(x)$.

С л е д с т в и е 2. Для полного пропагатора G модели φ_2^4 при нулевом импульсе справедливо равенство

$$\lim_{g/m^2 \to \infty} G(g, m^2)/\ln(g/m^2) = 3/4\pi.$$

Полный пропагатор при нулевом импульсе определяется выражением

$$G(g, m^2) = \frac{\int \mathscr{D}\varphi \left(\frac{1}{V}\int\limits_V \varphi^2\right) \exp\left(-\int\limits_V \mathscr{H} d^2x\right)}{\int \mathscr{D}\varphi \exp\left(-\int\limits_V \mathscr{H} d^2x\right)} \equiv \left\langle \frac{1}{V}\int\limits_V \varphi^2 \right\rangle_{g, m^2}.$$

Проводя те же самые преобразования $\mathscr{H}$, имеем тождество

$$G(g, m^2) = G'(g, \mu^2) + \varphi_0 \left\langle \frac{1}{V} \int\limits_V \varphi \right\rangle_{g,h,\mu^2} + \varphi_0^2,$$

где $G'(g, \mu^2)$ — пропагатор для гамильтониана $\mathscr{H}'$. При $g/m^2 \to \infty$ пропагатор G' можно раскладывать в ряд по малой константе g_{eff}, и, следовательно, при $g/m^2 \to \infty$ имеем $G' \to 0$. Далее, $\left\langle \frac{1}{V} \int\limits_V \varphi \right\rangle_{g,h,\mu^2}$ есть вакуумное среднее от пространственно-усредненного поля гамильтониана $\mathscr{H}'$. При $g/m^2 \to \infty$ основное состояние будет характеризоваться условием $\langle\varphi\rangle \to 0$. Таким образом, $G(g, m^2) \simeq \varphi_0^2$ при $g/m^2 \to \infty$ и $\lim\limits_{g/m^2 \to \infty} G/\ln(g/m^2) = 3/4\pi$. Отсюда получаем также асимптотику физической массы теории

$$\tilde{m}^2_{\text{физ. безразм}} = G^{-1}(g, m^2) \simeq \left(\frac{3}{4\pi} \ln \frac{g}{m^2} \right)^{-1}.$$

Проведенный анализ без особого труда распространяется и на полные функции Грина (с нулевыми импульсами) более высоких порядков.

Если в случае модели φ^4 для определения точных асимптотик ПЭВ мы использовали спонтанное нарушение симметрии при $g/m^2 \to \infty$, что дало возможность связать «сильную» теорию (старый вакуум) со «слабой» (новый вакуум), то в случае модели Хёэг-Крона [4] необходимо применять несколько иные методы.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть* $\mathscr{H}_{\text{int}} = \lambda : (\exp \beta\varphi - \beta\varphi):$, *тогда при* $\beta^2 < 4\pi$:

1) $\exp(-\int g(x) \mathscr{H}_{\text{int}} d^2x) \in L^p(Q_N, d\mu_0)$ *для широкого класса* $g(x)$ *и для всех* $p < \infty$;

2) $\lim\limits_{/m_\alpha \to} E/\lambda \ln(\lambda/m^2) = -\omega^2$, *где* ω^2 — *некоторая зависящая от* β^2 *постоянная.*

Доказательство. Получим оценку E снизу (сверху нам уже известна) с помощью модернизации метода Нельсона, развитого для модели $P(\varphi)_2$ [3]. Будем следовать тем же, за некоторым исключением, обозначениям и определениям, что и в [3]. Сначала докажем основную лемму.

Лемма 2. *Пусть*

$$V \equiv U(g) = \int g(x) : (\exp \beta\varphi - \beta\varphi) : d^2x,$$

где $g \in L^1 \cap L^{1+\varepsilon}(\mathbf{R}^2)$ *при некотором* ε *и* $g \geqslant 0$. *Тогда при некоторых* c_2 *и* c_3, *зависящих, вообще говоря, от* g *и* $\alpha > 0$,

$$\mu_0\{q \mid V(g) \leqslant -c_2 \ln K\} \leqslant c_3 \exp(-\alpha K)$$

для всех достаточно больших K *и* $\beta^2 < 4\pi$.

Доказательство. Положим

$$V_\Lambda = \int g(x) : (\exp \beta\varphi_\Lambda - \beta\varphi_\Lambda) : d^2x,$$

где φ_Λ — регуляризованное поле:

$$\varphi_\Lambda(x) = \int h_\Lambda(x-y) \varphi(y) d^2y.$$

Функцию h_Λ возьмем в более удобном, чем в [3], виде, а именно [1]

$$(12)\qquad h_\Lambda(x-y)=\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\exp(ik(x-y))\,\frac{\Lambda^2-1}{\Lambda^2+k^2}.$$

При этом $h_\Lambda(x)\to\delta(x)$ при $\Lambda^2\to\infty$. Отсюда имеем [1]

$$(13)\qquad \begin{aligned} &D_{1,\Lambda}(x)\equiv\langle\varphi_\Lambda(x)\varphi(0)\rangle=\frac{1}{2\pi}[K_0(t)-K_0(\Lambda t)],\qquad t=\sqrt{x^2},\\ &D_{2,\Lambda}(x)\equiv\\ &\equiv\langle\varphi_\Lambda(x)\varphi_\Lambda(0)\rangle=\frac{1}{2\pi}\left[K_0(t)-K_0(\Lambda t)-\left(1-\frac{1}{\Lambda^2}\right)\frac{\Lambda t}{2}K_1(\Lambda t)\right].\end{aligned}$$

Из (12) получаем

$$V_\Lambda\geqslant\|g\|_1\left(1-\frac{\beta^2}{4\pi}\ln\ln\Lambda\right)\geqslant 1-c_2\ln\ln\Lambda$$

при соответствующем выборе c_2. Теперь, если $V(q)\leqslant -c^2\ln\ln\Lambda$, то $|(V_\Lambda-V)|\geqslant 1$, поэтому $\mu_0\{q|V(q)\leqslant -c_2\ln\ln\Lambda\}\leqslant\mu_0\{q||V_\Lambda-V|\geqslant 1\}\leqslant$ $\leqslant\int|V_\Lambda-V\|^p d\mu_0\equiv\Delta_p$. Последнее неравенство справедливо при любом p и является следствием неравенства Чебышева [10] (этот момент нигде не отмечается, хотя и широко используется, см. например [3]). В случае $:\varphi_2{}^{2N}:$ далее обычно следуют оценки гиперсжимаемости Δ_p и минимизация по p при $\Lambda\to\infty$. Если попытаться разложить $V_\Lambda-V$ в ряд и применить эти оценки к членам разложения, то в результате получится растущая по Λ оценка при $p>2$. Ограничимся поэтому случаем $p=2$. Именно из-за этого частотного выбора возникает ограничение $\beta^2<4\pi$, и возможно, что при оценке с произвольным p это ограничение исчезнет. Итак, получаем

$$\begin{aligned}\Delta_2=\int|V-V_\Lambda|^2 d\mu_0=\int d^2x\,g(x)\int d^2y\,g(y)\,\{\exp(\beta^2D(x-y))-\\ -\beta^2D(x-y)-2[\exp(\beta^2D_{1,\Lambda}(x-y))-\beta^2D_{1,\Lambda}(x-y)]+\\ +\exp(\beta^2D_{2,\Lambda}(x-y))-\beta^2D_{2,\Lambda}(x-y)\}.\end{aligned}$$

Из (13) имеем при $\Lambda\to\infty$ асимптотику $\Delta_2\simeq c_3\Lambda^{-\alpha}$. Здесь $c_3>0$ и $\alpha>0$ при $\beta^2<4\pi$. Отсюда получаем оценку

$$\mu_0\{q|V(q)\leqslant -c_2\ln\ln\Lambda\}\leqslant c_3\Lambda^{-\alpha}$$

и, полагая $K=\ln\Lambda$, получаем, что

$$\mu_0\{q|V(q)\leqslant -c_2\ln K\}\leqslant c_3\exp(-\alpha K).$$

Из последнего неравенства вытекает справедливость двух важных для дальнейшего доказательства утверждений:

а) $\int\exp(-pU(g))d\mu_0<\infty$ при любом $p>0$ (аналог теоремы V.7 [3]);

б) $\ln[\|\exp(-\lambda U(g))\|_1]\leqslant c\lambda\ln\lambda$ при достаточно большом λ ($m^2=1$) (аналог теоремы V.8 [3]). Доказательство утверждений «а» и «б» совпадает с доказательством теорем V.7 и V.8 соответственно при $n=1$ и $\alpha=1$, поэтому мы его опускаем. Кроме того, для рассматриваемого $\mathscr{H}_{\rm int}$ остается в силе симметрия Нельсона (следствие ковариантности φ и евклидовой инвариантности $d\mu_0$) и с учетом утверждения «а» справедливы также оценки теорем V.10, V.11, V.12, VI.2 из [3]. Вследствие всего вышесказанного пространственное обрезание снимается, т. е. $E(\lambda)=\lim_{V\to\infty} E_V(\lambda)$ и $E(\lambda)\geqslant -c\lambda\ln(\lambda/m^2)$ (теорема VI.2 [3]). Необходимо еще раз подчеркнуть, что справедливость данных результатов в значительной степени следует из леммы 2 и утверждения «а».

Теперь, сравнивая с оценкой сверху, мы можем получить асимптотику при $\lambda/m^2\to\infty$:

$$E(\lambda, m^2)\simeq -\omega^2\lambda\ln(\lambda/m^2).$$

С помощью теоремы 2 несложно найти **точную** асимптотику ПЭВ модели Хёэг-Крона $g{:}\exp\alpha\varphi{:}$ [4] при $\alpha^2<4\pi$. Данное взаимодействие является чисто отталкивающим, поэтому автоматически $\exp(-U)\in L^\infty$. В связи с этим фактом аналога леммы 2 не существует, и получить оценку методами Нельсона не представляется возможным. Однако, используя инвариантность меры $d\mu_0$ относительно сдвигов, можно показать, что модель $g{:}\exp\alpha\varphi{:}$ при $g/m^2\to\infty$ эквивалентна модели $\tilde g{:}(\exp\alpha\varphi-\alpha\varphi){:}$ с $\tilde g=(m^2/\alpha^2)\ln(g/m^2)$. В самом деле, гамильтониан

$$\mathscr{H}=\frac{1}{2}\left(\dot\varphi^2+\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\right)+\frac{m^2}{2}\varphi^2+g{:}\exp\rho\varphi{:}$$

эквивалентен сдвинутому на постоянное поле φ_0 гамильтониану

$$\mathscr{H}'=\mathscr{H}_0+\frac{m^2}{2}\varphi^2+m^2\varphi_0\varphi+g:\exp\alpha(\varphi+\varphi_0):+\frac{m^2}{2}\varphi_0^2.$$

Значение φ_0 определим из условия отсутствия линейного по φ члена, т. е. $\alpha g\exp\alpha\varphi_0+m^2\varphi_0=0$. При $g/m^2\to\infty$ отсюда получаем, что $\varphi_0\simeq -(1/\alpha)\ln(g/m^2)$, и поэтому при $g/m^2\to\infty$ имеем гамильтониан

$$\mathscr{H}\simeq\mathscr{H}_0+\frac{m^2}{2}\varphi^2+\frac{m^2}{\alpha^2}\ln\frac{g}{m^2}:(\exp\alpha\varphi-\alpha\varphi):+\frac{m^2}{2\alpha^2}\ln^2\frac{g}{m^2}.$$

Таким образом,

$$E(g, m^2)=E'(\tilde g, m^2)+\frac{m^2}{2\alpha^2}\ln^2\frac{g}{m^2},$$

где E' — ПЭВ модели $:\exp\alpha\varphi-\alpha\varphi:$. В теореме 2 доказано, что при $\tilde g/m^2\to\infty$ и $\alpha^2<4\pi$ справедливо представление

$$E'\simeq -\omega^2\tilde g\ln(\tilde g/m^2).$$

Поэтому при $g/m^2\to\infty$ получаем асимптотику

$$E\simeq -\omega^2\ln(g/m^2)\ln\ln(g/m^2)+\frac{m^2}{2\alpha^2}\ln^2(g/m^2),$$

и, следовательно, справедлива

Теорема 3. *Пусть* $\mathscr{H}_{\text{int}}=g{:}\exp\alpha\varphi{:}$, *тогда*

$$\lim_{g/m^2\to\infty}\frac{E(g, m^2)}{\ln^2(g, m^2)}=\frac{m^2}{2\alpha^2}\quad \textit{при}\quad \alpha^2<4\pi.$$

Я выражаю искреннюю признательность и огромную благодарность доктору физико-математических наук Г. В. Ефимову за постановку задачи и неоценимую помощь, которую он оказал в процессе работы. Я также благодарен профессору В. П. Шелесту за поддержку и внимание.

Литература

[1] *Efimov G. V.*— Commun. Math. Phys., 1979, *65*, № 1, 15—44.
[2] *Efimov G. V.*— Commun. Math. Phys., 1977, *57*, № 5, 235—255.
[3] *Саймон Б.* Модель $P(\varphi)_2$ эвклидовой квантовой теории поля. М.: Мир, 1976. 357 с.
[4] *Albeverio S., Hoegh-Krohn R.* In: «Quantum Fields — Algebras, Processes», ed. by Streit L. N. Y.: Academic Press, 1980. 331 p.
[5] *Frolich J.*— Commun. Math. Phys., 1976, *47*, № 5, 233—253.
[6] *Coleman S.*— Phys. Rev., 1975, *D11*, № 9, 2088—2098.
[7] *Carey A. L., Lohe M. A., O'Brien D. M.*— Commun. Math. Phys., 1981, *82*, № 3, 191—210.
[8] *Mcshane E. J.*— Bull. Amer. Math. Soc., 1963, *69*, № 3, 597—611.
[9] *Ефимов Г. В.* Нелокальные взаимодействия квантованных полей. М.: Наука, 1977. 366 с.
[10] *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.

Всесоюзный научно-исследовательский
центр по изучению свойств
поверхности и вакуума

Поступила в редакцию
8.IV.1983 г.

NONPERTURBATIVE VACUUM ENERGY DENSITY IN TWO-DIMENSIONAL SCALAR MODELS

Karepanov S. K.

The upper bound of the effective potential in two-dimensional scalar field theory with an arbitrary self-interaction is derived which is uniform with respect to the field and coupling constant g. It is proved exactly that models $:\cos\alpha\varphi:$ and $:\varphi^{2N}\exp\alpha\varphi:$ do not exist for $\alpha^2\geqslant 8\pi$. Exact vacuum energy density asymptotics in g are found for $P(\varphi)_2$ and Hoegh — Krohn's model $:\exp\alpha\varphi:$ as well as for the full propagator at zero momentum.