В. П. Хавин, Разделение особенностей аналитических функций с сохранением ограниченности, *Алгебра и анализ*, 2004, том 16, выпуск 1, 293–319

Алгебра и анализ
Том 16 (2004), вып. 1

Посвящается Михаилу Шлемовичу Бирману
в связи с его 75-летием

РАЗДЕЛЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С СОХРАНЕНИЕМ ОГРАНИЧЕННОСТИ

© В. П. ХАВИН

Работа посвящена следующему вопросу: для каких пар (O_1, O_2) открытых подмножеств комплексной плоскости оператор

$$J : (f_1, f_2) \mapsto (f_1 + f_2)|(O_1 \cap O_2),$$

действующий из $H^\infty(O_1) \times H^\infty(O_2)$ в $H^\infty(O_1 \cap O_2)$, сюръективен? В первой части указан метод построения пар, не обладающих этим свойством; во второй для некоторых классов пар (O_1, O_2) в явной форме построен правый обратный оператор по отношению к J. Работа продолжает исследование, начатое в [10, 11].

Введение

Пусть O — открытое подмножество расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$. Пространство всех функций, голоморфных в O, мы будем обозначать символом $\mathrm{Hol}(O)$, а $H^\infty(O)$ будет обозначать пространство всех *ограниченных* функций $f \in \mathrm{Hol}(O)$.

Пусть S_1, S_2 — относительно замкнутые подмножества множества O, $S := S_1 \cup S_2$. Предположим, что любая функция $f \in H^\infty(O \setminus S)$ совпадает в $O \setminus S$ с $f_1 + f_2$, где $f_j \in H^\infty(O \setminus S_j)$, $j = 1, 2$. Тогда мы будем называть пару (S_1, S_2) *разделимой в* O.

Иногда мы будем говорить, что пара (K_1, K_2) замкнутых подмножеств плоскости $\mathbb{C}$ (не обязательно содержащихся в O) *разделима* в O, имея в виду, что в O разделима пара $(K_1 \cap O, K_2 \cap O)$.

Цель этой статьи — поиск *геометрических* критериев разделимости.

Задачу такого типа решает хорошо известная в теории приближений лемма А. Рот „о сращивании“ (“Alice Roth's Fusion Lemma”, [4, 5, 6]). Проблема разделимости появляется и в связи с задачами интерполяции ограниченными аналитическими функциями в многомерных областях [15, 14]. Проблема разделимости, как нам кажется, представляет и самостоятельный интерес.

Ключевые слова: ограниченная аналитическая функция, потенциал Коши, плоский континуум, разделение особенностей.

Переходя к дополнениям $G_j = O\setminus S_j$, $j = 1, 2$, $G = O\setminus S$, ее можно сформулировать так: *описать пары открытых множеств* (G_1, G_2) $(G_j \subset \widehat{\mathbb{C}})$, *для которых любая функция* $f \in H^\infty(G)$, $G := G_1 \cap G_2$, *разлагается в* G *в сумму* $f_1 + f_2$, *где* $f_j \in H^\infty(G_j)$.

В такой редакции и в связи с упоминавшимися задачами интерполяции ограниченными функциями в полидиске проблему разделимости рассмотрел в 1983 г. П. Л. Поляков [15]. В его работе для $G_1 = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $G_2 = \{|z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$ доказано, что любая функция f из $H^\infty(G)$ совпадает в G с суммой $f_1 + f_2$, где функция f_j аналитична в G_j и ограничена в $G_j \cap \{|z| < 1/2\}$, $j = 1, 2$.

В систематической форме задача разделимости была рассмотрена в статьях [10] и [11]; настоящая работа служит их продолжением.

Прежде чем переходить к обзору результатов статей [10] и [11], отметим, что если в определении разделимых пар отказаться от *ограниченности функций*, сохранив только их аналитичность, то мы придем к гораздо более простому и давно решенному вопросу. Им впервые занимался Пуанкаре [13] в ходе его дискуссии с Борелем о понятии аналитического продолжения (об этом см. [16, гл. 3, §21]). Пуанкаре показал (с помощью весьма изящной конструкции), что любая функция $f \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ есть сумма сужений на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ двух функций, аналитических соответственно в $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ и $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ (заметим, что пара (S_1, S_2), где $S_1 = [-1, 1]$, $S_2 = \mathbb{R} \setminus S_1$, не разделима в $\mathbb{C}$ [10]). Впоследствии разделением особенностей (произвольных) аналитических функций занимался Фреше [3]. Полное решение задачи получил Ароншайн [1]. Его результат таков: *для любых открытых множеств* G_1, $G_2 \subset \widehat{\mathbb{C}}$ любая функция $f \in \operatorname{Hol}(G_1 \cap G_2)$ *представима в виде суммы функций, аналитических соответственно в* G_1 *и* G_2. В настоящее время работы [13, 3, 1] прочно (и не вполне справедливо) забыты, а теорема Ароншайна (без упоминания его имени) в монографиях [2, с. 225] и [18] появляется как малоинтересная иллюстрация пучковых $\overline{\partial}$-подходов. Различным аспектам разделения особенностей аналитических функций в духе работ [13, 3, 1] посвящены работы [8, 9, 12, 7].

Возвращаясь к нашей теме, мы можем сказать теперь, что настоящая работа (как и статьи [10, 11]) посвящена некоторому количественному аспекту теоремы Ароншайна: считая функцию $f \in \operatorname{Hol}(O \setminus S)$ ограниченной, мы хотим найти условия геометрического характера, при которых элементы f_1, f_2 ароншайновского разложения функции f можно всегда (т.е. для *любой* ограниченной функции f) считать ограниченными (соответственно в $O \setminus S_1$ и $O \setminus S_2$).

Проблема разделимости носит в известном смысле *локальный* характер. Пусть $O \subset \mathbb{C}$ — ограниченное открытое множество, K_1 и K_2 замкнуты в $\widehat{\mathbb{C}}$, $k := K_1 \cap K_2$, v — открытая (и сколь угодно малая) окрестность множества k; положим, $k_j = \operatorname{Clos}(v \cap K_j)$, $j = 1, 2$. Используя известный в теории приближений оператор Витушкина [19, 4], нетрудно доказать следующую локализационную теорему [10, с. 156]: *если пара* (k_1, k_2) *разделима в* O, *то в* O *разделима и пара* (K_1, K_2). Таким образом, за разделимость пары (K_1, K_2) отвечают лишь „ростки" множеств K_1, K_2 вблизи k. В настоящей работе (как и в [10] и [11]) основное внимание уделено случаю *конечного* k, который легко сводится к $k = \{0\}$.

Заметим, что если K_1 и K_2 компактны в $\mathbb{C}$ и $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, то разделимость пары (K_1, K_2) в $\mathbb{C}$ сразу следует из интегральной формулы Коши. Не столь очевиден более общий случай, когда $K_1 \setminus k$, $K_2 \setminus k$ находятся на положительном расстоянии — и в этом случае пара (K_1, K_2) разделима в $\mathbb{C}$ (это утверждение есть вариант упомянутой выше леммы А. Рот, [10, с. 157]).

Свойство пары (K_1, K_2) быть разделимой в O конформно инвариантно в том смысле, что пара $(\varphi(K_1), \varphi(K_2))$ остается разделимой в $\varphi(O)$ при любом конформном гомеоморфизме φ множества O. Это замечание оправдывает интерес к разделимости в случае некоторых „модельных" троек (K_1, K_2, O). Особое внимание будет уделено ниже разделению пар (K_1, K_2) в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ := \{\operatorname{Im} z > 0\}$.

Как уже сказано, мы будем в основном заниматься множествами K_1 и K_2, „встречающимися" в одной точке ($k = \{0\}$). В [10] показано, что если эта встреча происходит *трансверсально*, то пара (K_1, K_2) *почти* разделима в $\mathbb{C}$. Приведем точную формулировку.

Компактное множество $\varkappa \subset \mathbb{C}$ назовем *регулярным*, если

(a) $\varkappa \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \cdots \cup \Gamma_N$, где Γ_j — простые компактные спрямляемые дуги, причем множества $\Gamma_j \setminus \{0\}$ попарно не пересекаются, и

(b) $s(\varkappa \cap r\mathbb{D}) = O(r)$, $r \to 0$, где $\mathbb{D}$ — открытый единичный круг, а s обозначает длину.

Чтобы сформулировать результат о почти разделимости трансверсально встречающихся множеств [10, теорема 4.2], рассмотрим луч $\mathcal{L} := \{p + te^{i\psi} : t \geqslant 0\}$, начинающийся в точке $p \in \mathbb{C}$, и угол $l_\delta := \{e^{i\varphi} : \varphi \in \mathbb{R}, |\varphi| \leqslant \delta\}$, $\delta > 0$. Обозначим через $A(\mathcal{L}, \delta) := p + e^{i\psi} l_\delta$ угол с вершиной p, биссектрисой $\mathcal{L}$ и раствором 2δ. Будем называть луч $\mathcal{L}$ *касательным к множеству E в точке p*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\sigma > 0$, что $E \cap \mathbb{D}(p, \sigma) \subset A(\mathcal{L}, \varepsilon)$ (здесь $\mathbb{D}(p, \sigma) := p + \sigma\mathbb{D}$).

Рассмотрим теперь такое семейство $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_N\}$ компактных множеств, что $0 \in \gamma_j$, $j = 1, \ldots, N$, а разности $\gamma_j \setminus \{0\}$ попарно дизъюнктны. Предположим, что γ_j имеет касательный луч $\mathcal{L}_j$ в начале, причем $\mathcal{L}_i \neq \mathcal{L}_j$ при $i \neq j$ (т.е. γ_i и γ_j встречаются *трансверсально* в начале координат), а ростки множеств γ_j в начале *регулярны*, т.е. при некотором $\Delta > 0$ регулярны все множества $\gamma_j \cap \{|z| \leqslant \Delta\}$.

Этим условиям удовлетворяет, например, любое семейство Γ простых гладких дуг, исходящих из начала и попарно образующих ненулевые углы. Допуская некоторую вольность (путая „дугу" с ее уравнением), можно сказать, что γ_j суть взаимно-однозначные комплексные функции класса $C^1([0,1])$, причем $\gamma_j(0) = 0$, γ_j' не обращается в нуль, а отношения $\gamma_j'(0)/\gamma_i'(0)$ не бывают положительными при $i \neq j$ (трансверсальность).

Возвращаясь от *дуг* γ_j к общей ситуации, рассмотрим такой компактный круговой сектор Σ с вершиной в начале, что

$$\Sigma \cap (\gamma_j \setminus \{0\}) = \varnothing, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Теорема 0.1. *Для любой функции $f \in H^\infty(\mathbb{C} \setminus (\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_N))$ найдутся такие функции $f_j \in H^\infty(\mathbb{C} \setminus (\gamma_j \cup \Sigma))$, $j = 1, \ldots, N$, что*

$$f = f_1 + f_2 + \cdots + f_N \quad \text{в } \mathbb{C} \setminus (\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_N \cup \Sigma). \tag{$*$}$$

Формула $(*)$ „почти разделяет" особенности функции f с сохранением ограниченности. При этом происходит некоторое (сколь угодно малое) увеличение множества особенностей функции f_j по сравнению с желаемым: вместо γ_j множеством особенностей слагаемого f_j в $(*)$ оказывается $\gamma_j \cup \Sigma$, где Σ — малый круговой сектор, не имеющий общих точек с множеством $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_N$ в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Простые примеры показывают, что отбросить сектор Σ и сделать функции f_j элементами пространства $H^\infty(\mathbb{C}\setminus\gamma_j)$, вообще говоря, невозможно. Однако формула (*) все же дает *полное* разделение особенностей (с сохранением ограниченности) в некоторых *областях*. Так, например, пользуясь ею, нетрудно показать, что оператор $(f_1, f_2) \mapsto (f_1 + f_2)|G$, действующий из $H^\infty(G_1) \times H^\infty(G_2)$ в $H^\infty(G)$ $(G := G_1 \cap G_2)$, сюръективен, если, скажем, G_1, G_2 — два круга; разумеется, это верно и для гораздо более общих пар областей, лишь бы, образуя „луночку" G, их границы пересекались *трансверсально* ([10, с. 165]; см. также рис. 4 в п. 3.4.3 в конце §I.4 настоящей статьи).

Отметим, что при некоторых дополнительных условиях гладкости, налагаемых на множества γ_j в теореме 0.1, сектор Σ можно заменить меньшим множеством (скажем, сколь угодно коротким отрезком с концом в начале, не пересекающимся с $\gamma_j \setminus \{0\}$, $j = 1, \ldots, N$ [10, с. 166–169].

Условие трансверсальности в теореме 0.1 существенно. Пусть две гладких простых компактных дуги γ_1, γ_2 лежат в области O, за исключением их общего конца p, лежащего на границе ∂O области O, причем $\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap O = \varnothing$, а в точке p дуги γ_1 и γ_2 имеют общую касательную. Разделение таких пар есть основная тема этой статьи (в отличие от статьи [10], целиком посвященной „трансверсальным" парам); касательные пары рассмотрены (с помощью иных средств) и в работе [11], о которой будет подробнее сказано ниже.

Мы увидим, в частности, что разделимость дуг γ_1 и γ_2, о которых только что говорилось, зависит от соотношения скорости их взаимного касания в точке p и скорости их приближения к границе ∂O при стремлении к p.

В первой части нашей статьи будет предложен общий метод построения неразделимых пар в данной области. В том числе будут описаны некоторые неразделимые пары *дуг*, касательно встречающихся в граничной точке.

Разделимая пара (S_1, S_2) множеств может быть „хорошо" или „плохо" разделима в O. В §I.1 мы определяем величину $b(S_1, S_2, O)$, улавливающую „качество разделимости"; эта величина (называемая „разделимостью пары (S_1, S_2) в O") тем меньше, чем лучше разделимы S_1 и S_2; равенство $b(S_1, S_2, O) = +\infty$ по определению означает, что пара (S_1, S_2) не разделима в O.

Основной результат первой части — теорема 1 в §I.3. Она доставляет нижнюю оценку разделимости $b(K_1, K_2, O)$ дизъюнктных континуумов в O через метрические характеристики их размеров и близости. В §I.1–I.2 подготавливаются и формулировка, и доказательство теоремы 1.

Из теоремы 1 выводится теорема 2, описывающая некоторые неразделимые пары множеств. Ее иллюстрируют конкретные примеры неразделимых в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ пар дуг с общей касательной в начале (теоремы 3 и 4). Полученные в теоремах 3 и 4 достаточные условия неразделимости дуг класса $C^{1+\varepsilon}$ отличаются от условий, одновременно необходимых и достаточных (они были получены в [11]) некоторым логарифмическим множителем. Из [11] следует, что $\log y$ в нашей формуле (32) можно отбросить, а функцию $l(x)$ в (35) считать *произвольной* бесконечно малой (при $x \to 0$), не требуя, чтобы $l(x) = o(1/|\log\varphi_1(x)|)$. Эти (излишние) логарифмические множители — плата за общность теорем 2 и 3, применимых не только к парам гладких дуг, как в [11].

Во второй части доказана разделимость некоторых пар дуг в $\mathbb{C}_+$, имеющих общий касательный луч $[0, +\infty)$ в начале. Основной результат второй части — теорема 5

— дает простое достаточное условие разделимости таких пар в $\mathbb{C}_+$. Оно совпадает с необходимым (найденным в [11] с помощью иной техники — см. обсуждение в п. 2.4 первой части) и имеет простой геометрический смысл: гиперболическая ширина коридора, стенками которого служат наши дуги, должна быть отделена от нуля. Вторая часть завершается некоторыми конкретными примерами, из которых отметим здесь лишь пример 4, относящийся к „паре Пуанкаре" (S_+, S_-) $(S_+ = [0, +\infty], S_-(-[\infty, 0])$, о которой говорилось в начале Введения. Она неразделима в $\mathbb{C}$, однако из теорем 5 и 5' следует, что любая функция $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ совпадает в $\mathbb{C}_+$ с $f_+ + f_-$, где $f_\pm \in H^\infty(\mathbb{C} \setminus S_\pm)$.

Эта статья тесно связана с [10] и [11]. Ее результаты в некоторых отношениях уступают результатам работы [11], а в других отношениях улучшают их. „Отрицательные" результаты первой части (о неразделимых парах), т.е. теоремы 2 и 3, относятся к гораздо более общим множествам, чем соответствующие „отрицательные" результаты в [11], где речь идет только о *дугах* (и притом в отличие от данной работы класса $C^{1+\varepsilon}$) в $\mathbb{C}_+$, что и позволяет избавиться от логарифмов в наших формулах (32) и (35). Возможно, однако, что в классе рассмотренных нами правильных континуумов оценки разделимости, полученные в теореме 1, окажутся точными.

В отношении „положительных" результатов (т.е. достаточных условий разделимости в $\mathbb{C}_+$) в [11] достигнут значительный прогресс — и в трансверсальной, и в касательной ситуации критерии разделимости, полученные в [11], применимы к гораздо более общим классам множеств, чем в [10] и в настоящей работе. Это удалось в результате использования глубоких теорем Б. Берндтссона об ограниченных решениях $\bar\partial$-проблемы в $\mathbb{C}_+$. Однако в задаче разделения особенностей интересен не только сам факт разделимости пары (S_1, S_2), но и линейный оператор $f \mapsto (f_1, f_2)$ $(f \in H^\infty(O \setminus S), f_j \in H^\infty(O \setminus S_j))$, осуществляющий разделение. В [10] была предложена естественная, явная и очень простая конструкция такого оператора (ее неформальному обсуждению посвящен п. 1.3 в §II.1), не требующая обращения к $\bar\partial$-проблеме. Эта конструкция, появившаяся в „трансверсальной" статье [10], работает и в „касательной" ситуации теоремы 5.

То, что простой оператор расщепления, построенный в [10], применим к разделению *касательных пар* множеств, — это новый результат, не содержащийся в [11]. Кроме элементарности и простоты, наш оператор имеет еще одно достоинство: он применим к разделению особенностей с сохранением непрерывности вплоть до границы, как показано в [20].

Благодарности. Первый вариант этой работы был написан во время двух визитов автора в университет Трондхейма (NTNU) в 1998 и 2001 г. г. Автор благодарен университету за гостеприимство и отличные рабочие условия. Автор признателен А. Х. Нерсесяну за многочисленные полезные обсуждения.

I. ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Главные результаты этой части — теоремы 1 и 2 в §I.3 — сопровождаются несколькими примерами (в том же параграфе). Первые два параграфа посвящены технической подготовке доказательства теоремы 1.

§I.1. Разделимость пары множеств и равномерное приближение аналитическими функциями с заданными особенностями

В этом параграфе через O мы будем обозначать открытое множество в $\mathbb{C}$, а через S_1, S_2 — его относительно замкнутые подмножества;

$$S := S_1 \cup S_2, \quad s := S_1 \cap S_2.$$

1.1. Разделимость пары (S_1, S_2) (определение).

Лемма 1. *Если пара (S_1, S_2) разделима в O, то существует такое число $c = c(S_1, S_2, O) \geqslant 0$, что любую функцию $f \in H^\infty(O \setminus S)$ можно представить в $O \setminus S$ в виде*

$$f = f_1 + f_2, \quad f_j \in H^\infty(O \setminus S_j), \quad \text{где } \|f_j\|_{\infty, O\setminus S_j} \leqslant c\|f\|_{\infty, O\setminus S}, \ j = 1, 2. \tag{1}$$

Доказательство. Линейный оператор $(f_1, f_2) \mapsto (f_1 + f_2)|(O \setminus S)$, действующий из банахова пространства $H^\infty(O \setminus S_1) \oplus H^\infty(O \setminus S_2)$ в банахово пространство $H^\infty(O \setminus S)$, по предположению сюръективен, и утверждение леммы следует из теоремы Банаха. •

По теореме Монтеля infimum констант c, участвующих в (1), есть их минимум. Мы будем называть этот минимум *разделимостью пары* (S_1, S_2) *в* O и обозначать через $b(S_1, S_2, O)$. Если пара (S_1, S_2) не разделима в O, то по определению полагаем $b(S_1, S_2, O) = +\infty$.

Основная цель §1–2 — оценить снизу разделимость некоторых пар через метрические характеристики близости их элементов.

1.2. Некоторые нижние оценки разделимости. С функцией φ из пространства $\mathrm{Hol}(O \setminus S_1)$ свяжем ее наилучшее равномерное приближение функциями из $\mathrm{Hol}(O \setminus S_2)$, т.е. величину

$$d(\varphi, O, S_2) := \inf \|\varphi - h\|_{\infty, O\setminus S},$$

где infimum берется по всем $h \in \mathrm{Hol}(O \setminus S_2)$; через $d(\varphi, O)$ мы будем обозначать $d(\varphi, O, \varnothing)$. Следующая лемма оценивает разделимость пары (S_1, S_2) через наилучшие приближения функциями с заданными особенностями.

Лемма 2. *Для любой функции $\Phi \in \mathrm{Hol}(O \setminus S_1)$ верна оценка*

$$d(\Phi, O, s) \leqslant b(S_1, S_2, O) d(\Phi, O, S_2).$$

Доказательство. Если $\delta > d(\Phi, O, S_2)$, то найдется функция h из пространства $\mathrm{Hol}(O \setminus S_2)$ такая, что $\|\Phi - h\|_{\infty, O\setminus S} < \delta$. Тогда $\Phi - h = \varphi_1 + \varphi_2$ в $O \setminus S$, где $\varphi_j \in H^\infty(O \setminus S_j)$, $\|\varphi_j\|_{\infty, O\setminus S_j} \leqslant b(S_1, S_2, O)\delta$, $j = 1, 2$. Но

$$\varphi_1 - \Phi = -h - \varphi_2 \quad \text{в } O \setminus S,$$

и мы можем определить функцию $H \in \mathrm{Hol}(O \setminus s)$:

$$H(\zeta) = \varphi_1(\zeta) - \Phi(\zeta) \quad \text{при } \zeta \in O \setminus S_1,$$
$$H(\zeta) = -h(\zeta) - \varphi_2(\zeta) \quad \text{при } \zeta \in O \setminus S_2,$$

так что

$$d(\Phi, O, s) \leqslant \|\Phi + H\|_{\infty, O\setminus S_1} = \|\varphi_1\|_{\infty, O\setminus S_1} \leqslant b(S_1, S_2, O)\delta. \quad \bullet$$

1.3. Нижняя оценка величины $d(\varphi, g)$ для клетки g. *Клеткой* мы будем называть ограниченную жорданову область g со спрямляемой границей ∂g; через $|\partial g|$ мы будем обозначать длину границы. Пусть $\zeta \in g$. Величину

$$\rho_g(\zeta) := \frac{2\pi \operatorname{dist}(\zeta, \partial g)}{|\partial g|}$$

мы будем называть *округлостью* клетки g относительно точки ζ, которую мы часто будем называть *центром* клетки g. Легко видеть, что $\rho_g(\zeta) \leqslant 1$ (это наглядно очевидное неравенство следует из формулы $1 = (2\pi i)^{-1} \int_{\partial g} \frac{dz}{z-\zeta}$ или из изопериметрического неравенства). Округлость клетки равна единице тогда и только тогда, когда g есть круг, а ζ – его (обычный) центр.

В дальнейшем мы будем иметь дело с бесконечными семействами клеток g с отмеченными центрами ζ и с округлостями, равномерно отделенными от нуля. В простейшем случае эти клетки будут кругами с обычными центрами, так что $\rho_g(\zeta) \equiv 1$, но иногда будет удобно рассматривать и прямоугольники g, у которых отношения сторон отделены от нуля и от бесконечности (с обычными центрами).

Для некоторых функций $\varphi \in \operatorname{Hol}(g \setminus K)$, где множество $K \subset g$ компактно, наилучшее приближение $d(\varphi, g)$ функциями, аналитическими всюду в g, можно оценить снизу через $|\varphi(\zeta)|$ и $\rho_g(\zeta)$.

Лемма 3. *Пусть $\varphi \in H^\infty(\widehat{\mathbb{C}} \setminus K)$, $\varphi(\infty) = 0$, $\zeta \in g \setminus K$. Тогда*

$$\rho_g(\zeta)|\varphi(\zeta)| \leqslant 2d(\varphi, g). \tag{2}$$

Доказательство. Если $\delta > d(\varphi, g)$, то найдется такая функция $h \in \operatorname{Hol}(g)$, что $\|\varphi - h\|_{\infty, g\setminus K} < \delta$, так что $h \in H^\infty(g)$. Поэтому функция h представима в g по формуле Коши ([17]; $h(z)$ обозначает угловое граничное значение функции h в точке $z \in \partial g$):

$$h(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial g} \frac{h(z)dz}{z - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial g} \frac{h(z) - \varphi(z)}{z - \zeta} dz \quad (\zeta \in g)$$

(второе равенство следует из того, что $\varphi(\infty) = 0$). Значит, $|h(\zeta)| \leqslant (\rho_g(\zeta))^{-1}\delta$, и если $\zeta \in g \setminus K$, то

$$|\varphi(\zeta)| \leqslant |h(\zeta)| + |\varphi(\zeta) - h(\zeta)| \leqslant (\rho_g(\zeta))^{-1}\delta + \delta,$$

и результат следует из оценки $\rho_g(\zeta) \leqslant 1$. •

Следствие. *Пусть K, g, φ удовлетворяют условию леммы 3, и $A \in \partial K$. Тогда*

$$\rho_g(A)\overline{\lim}_A|\varphi| \leqslant 2d(\varphi, g). \tag{3}$$

1.4. Разделимость множеств и интерференция больших функций. Обратимся теперь к нижним оценкам разделимости пары (K_1, K_2), где множества K_1, $K_2 \subset O$ *компактны* и не пересекаются.

Лемма 4. *Пусть g — клетка в O, $K_1 \subset g$, $K_2 \subset O$; пусть множества K_1, K_2 компактны, $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, и $A \in \partial K_1$. Положим $K = K_1 \cup K_2$. Тогда для любой функции $\psi_1 \in \operatorname{Hol}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus K_1)$, исчезающей в бесконечности, и любой функции $\psi_2 \in \operatorname{Hol}(O \setminus K_2)$, для которой $\psi_1 - \psi_2 \in H^\infty(O \setminus K)$, имеем*

$$2\|\psi_1 - \psi_2\|_{\infty, O\setminus K} b(K_1, K_2, O) \geqslant \rho_g(A)\overline{\lim}_A|\psi_1|. \tag{4}$$

Доказательство. Очевидно, $\psi_1 \in H^\infty(\widehat{\mathbb{C}} \setminus K_1)$ (ограниченность функции ψ_1 следует из ограниченности функций $\psi_1 - \psi_2$ и ψ_2 вблизи K_1 и из принципа максимума). Сопоставляя (3) (где $\varphi = \psi_1$) с леммой 2, получим

$$\rho_g(A)\overline{\lim}_A|\psi_1| \leqslant 2d(\psi_1, g) \leqslant 2d(\psi_1, O) \leqslant 2b(K_1, K_2, O)d(\psi_1, O, K_2).$$

Но $d(\psi_1, O, K_2) \leqslant \|\psi_1 - \psi_2\|_{\infty, O\setminus K}$. •

Для того чтобы показать, что величина $b(K_1, K_2, O)$ большая, достаточно (по лемме 4) построить такую пару функций (ψ_1, ψ_2), что $\psi_1 \in \mathrm{Hol}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus K_1)$, $\psi_1(\infty) = 0$ и функция ψ_1 очень велика вблизи точки $A \in \partial K_1$, тогда как $\psi_2 \in \mathrm{Hol}(O \setminus K_2)$, а разность $\psi_1 - \psi_2$ равномерно весьма мала в $O \setminus K$ вследствие *интерференции* функции ψ_1, ψ_2; в таком случае удовлетворительная нижняя оценка величины $b(K_1, K_2, O)$ следует из (4) — при условии, что округлость клетки $g \subset O$, содержащей K_1, относительно A не слишком мала.

1.5. Нижняя оценка разделимости пары множеств через разделимость пары их компактных частей. Вернемся к множествам S_1, S_2, O (см. начало параграфа).

Лемма 5. *Пусть $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, а $K_j \subset S_j$ — компактные множества, $j = 1, 2$. Тогда*

$$1 + b(S_1, S_2, O) \geqslant b(K_1, K_2, O);$$

если же множества S_j не имеют внутренних точек, то

$$b(S_1, S_2, O) \geqslant b(K_1, K_2, O).$$

Доказательство. Положим $K = K_1 \cup K_2$, $S = S_1 \cup S_2$. Если $f \in H^\infty(O \setminus K)$, то $f = f_1 + f_2$ в $O \setminus S$, $f_j \in H^\infty(O \setminus S_j)$, $\|f_j\|_{\infty, O\setminus S_j} \leqslant b(S_1, S_2, O)\|f\|_{\infty, O\setminus S}$ (мы предполагаем, что пара (S_1, S_2) разделима в O), $j = 1, 2$. Функция f_j в $O \setminus S_j$ совпадает с функцией, аналитической в $O \setminus K_j$. Так, например, функции f_1 и $f - f_2$, совпадающие в $O \setminus S$, сливаются в функцию, аналитическую в $O \setminus K_1$. Если S_1 нигде не плотно в O, то $\|f_1\|_{\infty, O\setminus K_1} = \|f_1\|_{\infty, O\setminus S_1} \leqslant b(S_1, S_2, O)\|f\|_{\infty, O\setminus K}$. В общем случае $|f_1(\zeta)| \leqslant b(S_1, S_2, O)\|f\|_{\infty, O\setminus K}$ при $\zeta \in O \setminus S_1$, $|f_1(\zeta)| \leqslant |f(\zeta)| + |f_2(\zeta)| \leqslant (1 + b(S_1, S_2, O))\|f\|_{\infty, O\setminus K}$ при $\zeta \in S_1 \setminus K_1$. •

Лемма 5 подсказывает способ проверки неразделимости данной дизъюнктной пары (S_1, S_2) в O. Для этого нужно уметь строить пары (K_1, K_2) компактных частей множеств S_1, S_2 (соответственно) со сколь угодно большими величинами $b(K_1, K_2, O)$. А для этого, в свою очередь, нужны пары взаимно погашающих функций (ψ_1, ψ_2), как в лемме 4. В §I.2 мы покажем, что такие функции существуют, если множества K_1, K_2 достаточно близки друг к другу и „правильны“; кроме того, требуется существование достаточно округлой клетки $g \subset O$, накрывающей одно из них.

§I.2. Правильные континуумы; функции ψ_q

Приложения теорем этого параграфа относятся к совсем простым множествам S_1, S_2 (гладким дугам). Но наш подход применим и к гораздо более общим парам (S_1, S_2). Чтобы лучше понять суть дела, мы будем здесь исходить из предположений, более общих, чем в итоговом §I.3.

2.1. Некоторые логарифмические функции. В этом параграфе K всегда будет обозначать компактное *связное* множество в $\mathbb{C}$ (ограниченный *континуум*) со *связным* дополнением $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$.

Символом $\log$ мы будем обозначать главную ветвь логарифма: функция $\log$ определена в $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, и

$$e^{\operatorname{Re}\log\zeta} = |\zeta|, \quad \operatorname{Im}\log\zeta \in (-\pi, \pi] \quad (\zeta \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]).$$

Область $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ односвязна. Поэтому для любых A, $B \in K$, $A \neq B$, существует единственная функция $\mathcal{L}_{K,A,B} \in \operatorname{Hol}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus K)$ такая, что

$$\exp \mathcal{L}_{K,A,B}(\zeta) = \frac{B-\zeta}{A-\zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus K, \ \mathcal{L}_{K,A,B}(\infty) = 0.$$

Очевидно,

$$\mathcal{L}_{K,A,B}(\zeta) = \log \frac{B-\zeta}{A-\zeta}$$

при любом достаточно большом $|\zeta|$.

2.2. Правильные континуумы. Сформулируем два условия, которым мы подчиним континуум K.

Условие 1. *Существует такое число $T > 1$, что для любых A, $B \in K$, $A \neq B$,*

$$\mathcal{L}_{K,A,B}(\zeta) = \log \frac{B-\zeta}{A-\zeta}, \quad \textit{если } |\zeta - A| > T|B - A| \textit{ и } \zeta \notin K. \tag{5}$$

Из неравенства $|\zeta - A| > |B - A|$ следует, что $|(\zeta - A)/(\zeta - B) - 1| < 1|$, так что правая часть формулы (5) имеет смысл.

Условие 2. *Функция $\operatorname{Im} \mathcal{L}_{K,A,B}$ ограничена в $\mathbb{C} \setminus K$ равномерно относительно любых пар A, $B \in K$, $A \neq B$.*

Иначе говоря, в условии 2 мы предполагаем существование такой константы T, что

$$|\operatorname{Im} \mathcal{L}_{K,A,B}(\zeta)| \leqslant T$$

для любого $\zeta \in \mathbb{C} \setminus K$ и любых A, $B \in K$, $A \neq B$.

Определение. Если континуум K удовлетворяет условиям 1 и 2 (с одной и той же константой $T > 1$ в обоих), то мы называем его T-правильным (или правильным, если величина T не представляет интереса).

2.3. Липшицев график правилен.

Лемма 6. *Пусть K — липшицев график (по отношению к некоторому ортогональному базису в $\mathbb{R}^2$). Тогда K — правильный континуум.*

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что

$$K = \{t + if(t) : \alpha \leqslant t \leqslant \beta\},$$

где f — вещественная функция, удовлетворяющая условию $|f(t') - f(t'')| \leqslant L|t' - t''|$ при некотором $L > 0$ и любых t', $t'' \in [\alpha, \beta]$; мы будем считать, что $L > 1$.

Чтобы доказать, что K удовлетворяет условию 1 из п. 2.2, положим $A = a + if(a)$, $B = b + if(b)$, $\alpha \leqslant a < b \leqslant \beta$, $l = |B - A|$ и рассмотрим прямоугольник

$$\Pi = [a - l, a + l] \times [f(a) - Ll, f(a) + Ll],$$

содержащий график функции $f|[a-l, a+l]$, так что $K \setminus \Pi$ есть объединение не более, чем двух дуг кривой K (графиков функций $f|[\alpha, a - l)$ и $f|(a + l, \beta]$). Очевидно, множество $\widehat{\mathbb{C}} \setminus (\Pi \cap K)$ связно. Функция $z \mapsto \log \frac{B-z}{A-z}$ аналитична в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Pi$, так как $\{|z - A| \leqslant l\} \subset \Pi$, и совпадает с $\mathcal{L}_{K,A,B}$ в окрестности бесконечности, а потому всюду в $\widehat{C} \setminus (\Pi \cup K)$. Мы можем положить $T = \sqrt{1 + L^2}$, так как $\Pi \subset \{|z - A| \leqslant Tl\}$.

Обратимся к условию 2. Заметим, что

$$\mathcal{L}_{K,A,B}(\zeta) = \int_{K_{A,B}} \frac{dz}{z - \zeta}, \quad \zeta \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus K,$$

где $K_{A,B}$ есть график функции $f|[a, b]$. Действительно, правая часть J этого равенства исчезает в бесконечности, а $\exp J = (z - B)/(z - A)$ всюду в $\mathbb{C} \setminus K_{A,B}$, что легко проверяется дифференцированием. Следовательно,

$$\operatorname{Im} \mathcal{L}_{K,A,B}(\zeta) = \int_a^b \frac{f'(t)(t - x) + f(t) - y}{(t - x)^2 + (f(t) - y)^2} dt, \quad \zeta = x + iy \in \mathbb{C} \setminus K.$$

При $t \neq x$ подынтегральная функция совпадает с $(\operatorname{arctg}((f(t) - y)/(t - x)))'$, так что

$$|\operatorname{Im} \mathcal{L}_{K,A,B}(\zeta)| \leqslant 2\pi \quad \text{для любых } A, B \in K \text{ и } \zeta \notin K. \quad \bullet$$

2.4. Функции ψ_q (определение). Функции ψ, о которых говорилось в конце §I.1, будут помечены пятерками

$$q = (K, A, B, C, D),$$

где K — наш континуум, а A, B, C, D — четверка его попарно различных точек. Нам понадобятся линейные функции $\lambda_{A,B}$:

$$\lambda_{A,B} := \frac{z - A}{B - A}, \quad A, B \in \mathbb{C}, \ A \neq B.$$

Определим функции $\psi_q \in \operatorname{Hol}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus K)$:

$$\psi_q := \lambda_{A,B} \mathcal{L}_{K,A,B} + \mathcal{L}_{K,B,C} + \lambda_{C,D} \mathcal{L}_{K,C,D}, \tag{6}$$

$\psi_q(\infty) = 0$. Кроме того, положим

$$\left.\begin{aligned} \psi_q^* &:= \lambda_{A,B} \operatorname{Re} \mathcal{L}_{K,A,B} + \operatorname{Re} \mathcal{L}_{K,B,C} + \lambda_{C,D} \operatorname{Re} \mathcal{L}_{K,C,D}, \\ \psi_q^{**} &:= \psi_q - \psi_q^*. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Функции (7) определены (но не аналитичны) в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ (ψ_q^* имеет смысл даже в $\widehat{C} \setminus \{A, B, C, D\}$).

Наш выбор функций ψ_q определяется следующими соображениями. В простейшем случае, когда K есть сегмент в $\mathbb{R}$, а A, B, C, D — его точки ($A < B < C < D$), ψ_q выражается интегралом типа Коши:

$$\Psi_q(\zeta) = \int_A^D \frac{f(x)dx}{x - \zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus K,$$

где f — кусочно-линейная функция, изображенная на рис. 1.

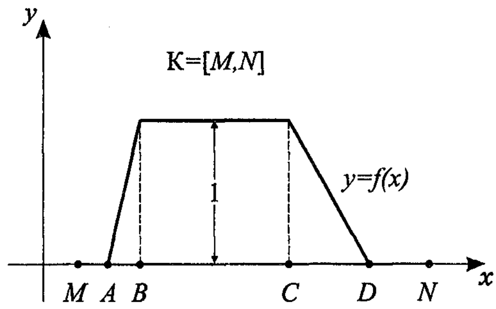

Рис. 1.

Легко видеть, что $\psi_q \in H^\infty(\widehat{\mathbb{C}} \setminus K)$, так как функция f липшицева и $f(A) = f(D) = 0$. Кроме того, $\psi_q(\infty) = 0$, и модуль $|\psi_q(A)|$ неограниченно растет, когда $B \to A$ (при неподвижных C и D). Таким образом, при $B \approx A$ функция ψ_q обладает свойствами функции ψ_1, обсуждавшейся в конце §I.1 (для $K_1 = K$). Полагая $K_2 = K + i\varepsilon$ с малым $\varepsilon > 0$, а затем $q' = (K_2, A + i\varepsilon, B + i\varepsilon, C + i\varepsilon, D + i\varepsilon)$, можно ожидать, что $\psi_{q'}$ будет играть роль „гасящей“ функции ψ_2, сбивающей рост функции ψ_1 при приближении к A, так что $|\psi_1 - \psi_2|$ станет равномерно ограниченной в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus (K_1 \cup K_2)$.

Функцию ψ_q можно было бы определить как интеграл типа Коши с трапециевидной плотностью f не только для *отрезка* K, но и для любой спрямляемой дуги. Этот путь избран в [11] — он обладает определенными преимуществами. Мы, однако, будем придерживаться определения (6), которое не содержит интегралов, и потому применимо к любым правильным континуумам K, а не только к спрямляемым дугам. Заметим, что в [11] на эти дуги приходится еще налагать дополнительные условия гладкости.

Функции ψ_q^* удобнее в работе, чем ψ_q: участвующие в них логарифмы подчиняются правилу $\log XY = \log X + \log Y$, что позволяет очень просто выразить ψ_q^* через функцию l,

$$l(\zeta) := \zeta \log|\zeta| \quad (\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}), \; l(0) := 0. \tag{8}$$

А именно,

$$\Psi_q^*(\zeta) = \frac{l(\zeta - A)}{A - B} + \frac{l(\zeta - B)}{B - A} + \frac{l(\zeta - C)}{D - C} + \frac{l(\zeta - D)}{C - D}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus K. \tag{9}$$

2.5. Предварительные оценки функций $|\psi_q|$, $|\psi_q^{**}|$. Для пятерки $q = (K, A, B, C, D)$ и числа $T > 1$ положим

$$\mathcal{D}_q := \{|z - A| > T|B - A|\} \cap \{|z - B| > T|C - B|\} \cap \{|z - C| > T|D - C|\}. \tag{10}$$

Лемма 7. *Если континуум K T-правилен, то*

(i) *функция $|\psi_q|$ ограничена в $\mathcal{D}_q \setminus K$ константой, зависящей лишь от T;*

(ii) *функция $|\psi_q^{**}|$ ограничена в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ константой, зависящей лишь от T.*

Доказательство. (i) Согласно (5),

$$\mathcal{L}_{K,B,C}(\zeta) = \log\left(1 + \frac{C - B}{B - \zeta}\right),$$

если $\zeta \in \mathcal{D}_q \setminus K$, так как $|\zeta - B| > T|B - C|$, так что модуль правой части в (6) в точке ζ не превышает числа $\max\{|\log w| : |w-1| \leqslant 1/T\}$. Если $\zeta \in \mathcal{D}_q \setminus K$, то $|\zeta - A| > T|B-A|$, и в силу (5)

$$\begin{aligned}|\lambda_{A,B}(\zeta)\mathcal{L}_{K,A,B}(\zeta)| &= \left|\frac{\zeta - A}{B-A}\log\left(1 + \frac{A-B}{\zeta - A}\right)\right| \\ &\leqslant \max\{|w\log(1+w^{-1})| : |w| \geqslant T\} =: c(T).\end{aligned} \tag{11}$$

Точно так же оценивается и третье слагаемое в (6).

(ii) Теперь мы используем условие 2 из п. 2.2. Оно обеспечивает ограниченность (константой T в $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$) модуля второго слагаемого в (7). Обратимся к первому слагаемому: если $\zeta \notin K$, $|\zeta - A| \leqslant T|B-A|$, то $|\lambda_{A,B}(\zeta)| \leqslant T$, и по условию 2 $|\lambda_{A,B}(\zeta)||\operatorname{Im}\mathcal{L}_{K,A,B}(\zeta)| \leqslant T^2$. Если $|\zeta - A| > T|B-A|$, то в силу (5)

$$|\lambda_{A,B}(\zeta)||\operatorname{Im}\mathcal{L}_{K,A,B}(\zeta)| \leqslant \left|\lambda_{A,B}(\zeta)\log\frac{\zeta - B}{\zeta - A}\right| \leqslant c(T)$$

(см. (11)). Так же оценивается и третье слагаемое в (7). •

2.6. Модуль непрерывности функции l. В следующей лемме нам понадобится такое замечание: если $M > 0$ и $0 < x < 1/e$, то

$$|l(Mx)| \leqslant M|l(x)| + M|\log M|x \leqslant (M + M|\log M|)|l(x)|, \tag{12}$$

так как $|\log x| > 1$.

Лемма 8. *Пусть $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, $|w_j| < 1/100$, $j = 1, 2$. Тогда*

$$|l(w_1) - l(w_2)| \leqslant c|l(|w_1 - w_2|)|, \tag{13}$$

где c — абсолютная постоянная.

Доказательство. Функция $x \mapsto |l(x)|$ возрастает на $[0, 1/e]$, а функция $x \mapsto |\log x|$ убывает на $(0,1]$. Кроме того, $|\log|1+u|| \leqslant 2|u|$ при $u \in \mathbb{C}$, $|u| \leqslant \frac{1}{2}$.

Пусть $|w_1| \leqslant 2|w_1 - w_2|$. Тогда $|w_2| \leqslant 3|w_1 - w_2|$ и

$$\Delta := |l(w_1) - l(w_2)| \leqslant |l(|w_1|)| + |l(|w_2|)| \leqslant 2|l(3|w_1 - w_2|)|,$$

и (13) следует из (12). Если $|w_1| > 2|w_1 - w_2|$, то

$$|w_2|\left|\log\left|\frac{w_2}{w_1}\right|\right| = |w_2|\left|\log\left|1 + \frac{w_1 - w_2}{w_2}\right|\right| \leqslant 2|w_1 - w_2|$$

и

$$\begin{aligned}\Delta = |w_1\log|w_1| - w_2\log|w_2|| &\leqslant |w_1 - w_2||\log|w_1|| + |w_2|\left|\log\frac{|w_2|}{|w_1|}\right| \\ &\leqslant |w_1 - w_2||\log(2|w_1 - w_2|)| + 2|w_1 - w_2|,\end{aligned}$$

и (13) следует из (12) и из неравенства $|w_1 - w_2| < \frac{1}{e}$ (т.е., $|\log|w_1 - w_2|| > 1$). •

2.7. Близость функций ψ_q^* и $\psi_{q'}^*$ при $q \approx q'$ (локальная оценка). Рассмотрим две пятерки

$$q = (K, A, B, C, D), \quad q' = (K', A', B', C', D'), \tag{14}$$

где K, K' — континуумы со связными дополнениями; A, B, C, $D \in K$ и A', B', C', $D' \in K'$. Точки A', B', C', D' считаются близкими к одноименным точкам без штрихов:

$$\max(|A - A'|, |B - B'|, |C - C'|, |D - D'|) < \beta, \tag{15}$$

где

$$0 < \beta < |A - B|/4. \tag{16}$$

Зафиксируем $T > 1$ и предположим, что

$$|A - C| = |A - D|/2 =: a < T/1000, \quad |A - B| < a/2. \tag{17}$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = \{|z - A| < 4T|B - A|\} \\ \cup \{|z - B| < 4T|C - B|\} \cup \{|z - C| < 4T|D - C|\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Лемма 9. *Если выполнены условия* (15)–(17), *то для* $\zeta \in \mathcal{U}$ *справедливо неравенство*

$$|\psi_q^*(\zeta) - \psi_{q'}^*(\zeta)| \leqslant C(T)\left[\frac{|l(\beta)|}{|A - B|} + \frac{|l(a)|\beta}{|A - B|^2}\right]. \tag{19}$$

Доказательство. Обозначим через m наибольшее из восьми чисел $|\zeta - A|$, $|\zeta - B|, \dots, |\zeta - A'|, \dots, |\zeta - D'|$, где $\zeta \in \mathcal{U}$. Из (15), (17) и из неравенства $|D - C| \leqslant 3a$ заключаем, что

$$m \leqslant 50Ta < 1/100. \tag{20}$$

Положим $X(\zeta) := |\psi_q^*(\zeta) - \psi_{q'}^*(\zeta)|$. Из (9), (13) и из тождества

$$\frac{l(\zeta - P)}{Q - P} - \frac{l(\zeta - P')}{Q' - P'} = \frac{l(\zeta - P) - l(\zeta - P')}{Q - P} + l(\zeta - P')\frac{(P - P') + (Q - Q')}{(Q - P)(Q' - P')}$$

получаем

$$\begin{aligned} X(\zeta) \leqslant c|l(\beta)|\left[\frac{1}{|A - B|} + \frac{1}{|D - C|}\right] + \frac{|l(\zeta - A')|2\beta}{|A - B||A' - B'|} \\ + \frac{|l(\zeta - B')| \cdot 2\beta}{|A - B||A' - B'|} + \frac{|l(\zeta - C')|2\beta}{|D - C||D' - C'|} + \frac{|l(\zeta - D')|2\beta}{|D - C||D' - C'|}. \end{aligned}$$

Но $|D - C| \geqslant 2|A - B|$, $|A' - B'| \geqslant |A - B| - 2\beta \geqslant |A - B|/2$, $|D' - C'| \geqslant |D - C| - 2\beta \geqslant 2a - a/2 \geqslant 3|A - B|/2$.

Из этих оценок и из (20) получаем (при $\zeta \in \mathcal{U}$)

$$X(\zeta) \leqslant c'\frac{|l(\beta)|}{|A - B|} + c''\frac{|l(c(T)a)|\beta}{|A - B|^2}, \tag{21}$$

где c', c'' — абсолютные постоянные; (19) следует теперь из (21) и (12). ●

2.8. Глобальная оценка функции $|\psi_q - \psi_{q'}|$ при $q \approx q'$.

Лемма 10. *Предположим, что q и q' удовлетворяют всем условиям леммы 9, а оба континуума K и K' T-правильны. Тогда при любом $\zeta \in \mathbb{C} \setminus (K \cup K')$ верна оценка*

$$|\psi_q(\zeta) - \psi_{q'}(\zeta)| \leqslant c(T)\Big[\frac{|l(\beta)|}{|A-B|} + \frac{|l(a)|\beta}{|A-B|^2} + 1\Big]. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $\zeta \in \mathcal{U} \setminus (K \cup K')$ (см. (18)). Тогда

$$|\psi_q(\zeta) - \psi_{q'}(\zeta)| \leqslant |\psi_q^*(\zeta) - \psi_{q'}^*(\zeta)| + |\psi_q^{**}(\zeta)| + |\psi_{q'}^{**}(\zeta)|, \tag{23}$$

и (22) следует из леммы 9 и леммы 7 (ii). Если $\zeta \in \mathbb{C} \setminus (\mathcal{U} \cup K \cup K')$, то ζ находится в $\mathcal{D}_{q'}$ (т.е. в дополнении объединения трех кругов с центрами A', B', C' и радиусами $T|B'-A'|$, $T|B'-C'|$, $T|D'-C'|$, см. (10)). Действительно, если $|\zeta - A'| < T|B'-A'|$, то $|\zeta - A| \leqslant |\zeta - A'| + |A' - A| < T|A'-B'| + \beta \leqslant T(|A-B| + 2\beta) + \beta < T|A-B| + 3T\beta < 4T|A-B|$, и потому $\zeta \in \mathcal{U}$; если $|\zeta - B'| < T|\mathcal{D}' - C'|$, то $|\zeta - B| < T|B-C| + 3T\beta \leqslant T|B-C| + 3T|A-B|$, но $|B-C| \geqslant |C-A| - |B-A| \geqslant a - a/2 > |B-A|$, откуда следует, что $|\zeta - T| < 4T|C-B|$, и $\zeta \in \mathcal{U}$; если $|\zeta - C'| < T|\mathcal{D}' - C'|$, то $|\zeta - C| < T|D-C| + 3T\beta \leqslant T|C-D| + 3Ta \leqslant 4T|C-D|$, так как $|C-D| \geqslant |A-D| - |A-C| = a$, и опять $\zeta \in \mathcal{U}$. Итак, если $\zeta \notin \mathcal{U} \cup K \cup K'$, то $\zeta \notin \mathcal{D}_q \cup \mathcal{D}_{q'}$, и из леммы 7, примененной к q и q', и из (23) мы заключаем, что

$$|\psi_q(\zeta) - \psi_{q'}(\zeta)| \leqslant |\psi_q^*(\zeta)| + |\psi_{q'}^*(\zeta)| + |\psi_q^{**}(\zeta)| + |\psi_{q'}^{**}(\zeta)| \leqslant \tilde{c}(T). \quad \bullet$$

§I.3. Основные теоремы. Примеры

Теперь мы готовы доказать главный технический результат первой части — нижнюю оценку величины $b(K, K', O)$ в чисто геометрических терминах. Мы предполагаем, что $K \subset g \subset O$, где g — клетка с центром $A \in \partial K$. Нижняя оценка разделимости $b(K, K', O)$ будет выражаться через округлость $\rho_g(A)$ (см. п. 1.3), „размах“ a множества K:

$$a := \frac{1}{2}\max\{|\zeta - A| : \zeta \in K\}, \tag{24}$$

и положительное число $\beta(a)$, характеризующее близость множеств K' к K:

$$\max\{\mathrm{dist}(\zeta, K') : \zeta \in K\} < \beta(a). \tag{25}$$

Предваряя точные формулировки, скажем, что величина $\beta(a)$ будет считаться пренебрежимо малой в сравнении с a:

$$\beta(a) \ll a. \tag{26}$$

Условие (26) будет уточнено в следующем пункте.

3.1. Малость величины $\beta(a)$. Буква β будет теперь обозначать *функцию*, заданную на интервале $(0, b)$.

Было бы естественно истолковать (26) как $\beta(a) = o(a)$ $(a \to 0)$, но мы не знаем, достаточно ли такое понимание для наших целей (точнее, верна ли при этом теорема 2). И, хотя результаты статьи [11] дают надежду на положительный ответ, здесь мы должны будем предположить, что

$$\beta(a) = o(a/|\log a|) \quad (a \to 0), \tag{27}$$

т.е. что
$$\beta(a) = a\varepsilon(a)/|\log a|, \quad 0 < a < b, \ \varepsilon(a) = o(1), \ a \to 0. \tag{28}$$
Отметим оценку
$$\sqrt{\varepsilon(a)}a|l(\beta(a))| = o(|l(a)|\beta(a)) \quad (a \to 0), \tag{29}$$
которая следует из равенства
$$\sqrt{\varepsilon(a)}(|\log a| + \log|\log a|) = o(|\log a|), \quad a \to 0.$$

В дальнейшем O будет обозначать область в $\mathbb{C}$; K, K', g, A, β были определены в начале параграфа и в п. 3.1.

Теорема 1. *Существуют такие положительные константы $c(T)$ и $a(\beta, T)$, что для любых T-правильных континуумов K, $K' \subset O$ и для любого числа a из интервала $(0, a(\beta, T))$, удовлетворяющего условию* (25), *выполнено неравенство*
$$b(K, K', O) \geqslant c(T)\rho_g(A)\log\frac{1}{\varepsilon(a)}. \tag{30}$$

Например, согласно лемме 6, мы можем считать K и K' липшицевыми графиками (без общих точек); в этом случае $c(T)$ будет, в конечном счете, зависеть от липшицевых констант этих графиков.

Доказательство (сведение к лемме 4). Мы выведем оценку (30) из (4) при специальном выборе функций $\psi_1 = \psi_q$, $\psi_2 = \psi_{q'}$.

Существует такая точка $D \in K$, что $|A - D| = 2a$, а по связности множества K найдется точка $C \in K$, для которой $|C - A| = a$. Если $a < a(\beta)$, то $\varepsilon(a) < 1$, и при некотором $B \in K$ имеем
$$|A - B| = a\sqrt{\varepsilon(a)}.$$
Затем мы найдем четверку A', B', C', $\mathcal{D}'$ попарно различных точек в K' так, чтобы выполнялось (15) при $\beta = \beta(a)$ (см. (25)). Очевидно, $\beta(a) = o(a\sqrt{\varepsilon(a)})$, $a \to 0$ (см. (28)). Поэтому при достаточно малом $a(\beta)$ из неравенства $0 < a < a(\beta)$ следуют (16) и (17), так что пятерки $q = (K, A, B, C, D)$ и $q' = (K', A', B', C', D')$ удовлетворяют всем условиям леммы 9, и по лемме 10 мы получаем (22) для $\zeta \in O \setminus (K \cup K')$:
$$\begin{aligned}\|\psi_q - \psi_{q'}\|_{\infty, O\setminus(K\cup K')} &\leqslant c(T)\left[\frac{|l(\beta(a))|}{a\sqrt{\varepsilon(a)}} + \frac{|l(a)|\beta(a)}{a^2\varepsilon(a)} + 1\right] \\ &< 3c(T), \quad \text{если } 0 < a < a(\beta),\end{aligned} \tag{31}$$
поскольку в силу (29) первое слагаемое в скобках в (31) меньше второго, которое равно единице (см. (28)).

С другой стороны, $\psi_q \in \mathrm{Hol}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus K)$, $\psi_q(\infty) = 0$, и при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus K$ выполнено неравенство
$$|\psi_q(\zeta)| \geqslant |\psi_q^*(\zeta)| - c'(T)$$
по лемме 7(ii). Устремляя $\zeta \in \mathbb{C} \setminus K$ к A, получим
$$\begin{aligned}|\psi_q^*(\zeta)| &\geqslant \log\frac{|C - \zeta|}{|B - \zeta|} - \frac{|\zeta - A|}{|B - A|}\log\frac{|B - \zeta|}{|A - \zeta|} - \frac{|\zeta - C|}{|C - D|}\log\frac{|\zeta - D|}{|\zeta - C|} \\ &\underset{\substack{\zeta \to A \\ \zeta \notin K}}{\longrightarrow} \log\frac{|C - A|}{|B - A|} - \frac{|A - C|}{|C - D|}\log\frac{|A - D|}{|C - A|},\end{aligned}$$

так что
$$\overline{\lim}_A|\Psi_q| \geqslant \log\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(a)}} - (\log 2)/2 - c'(T) > \frac{1}{4}\log\frac{1}{\varepsilon(a)},$$
если $0 < a < a(\beta, T)$. Теперь остается применить лемму 4 и получить (30). •

3.3. Некоторые неразделимые пары. Вновь рассмотрим относительно замкнутые множества S, S' в области O, $S' \cap S = \varnothing$, и предположим, что β удовлетворяет условию (28). Применим сказанное в конце п. 1.5 и построим два семейства континуумов $(K_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, $(K'_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, $K_\gamma \subset g_\gamma \cap S$, $K'_\gamma \subset S'$, где $(g_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ — семейство клеток в O с центрами $A_\gamma \in \partial K_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$. Положим
$$a_\gamma := \frac{1}{2}\max\{|\zeta - A_\gamma| : \zeta \in K_\gamma\}$$
(ср. с (24)). Следующий результат вытекает из теоремы 1 и леммы 5 (см. п. 1.5).

Теорема 2. *Предположим, что для некоторых $T > 1$ и $r > 0$*

(i) *при любом $\gamma \in \Gamma$ оба континуума K_γ, K'_γ T-правильны, и $\rho_{g_\gamma}(A_\gamma) \geqslant r$;*

(ii) *для любого $\gamma \in \Gamma$ пара (K, K'), где $K := K_\gamma$, $K' = K'_\gamma$, удовлетворяет условиям теоремы 1 с $g_i = g_\gamma$, $A := A_\gamma$. Тогда*
$$b(S, S', O) = +\infty,$$
так что пара (S, S') неразделима в O.

3.4. Примеры. В этом пункте будут даны конкретные примеры применения теоремы 2.

3.4.1. Пусть k — положительная функция, заданная на $(0, b)$ и такая, что
$$k(y) = o(y/|\log y|), \quad u \to 0. \tag{32}$$
Областью O будет теперь верхняя полуплоскость $\mathbb{C}_+ = \{\operatorname{Im} z > 0\}$. Рассмотрим липшицевы вещественные функции φ_1, φ_2, заданные на $[0, b]$ и удовлетворяющие неравенствам
$$-k(y) < \varphi_1(y) < \varphi_2(y) < k(y), \quad y \in [0, b], \tag{33}$$
и их графики (по отношению к оси ординат): $S_j := \{z_j(y) : 0 < y \leqslant b\}$, $j = 1, 2$, где $z_j(y) := \varphi_j(y) + iy$ (см. рис. 2).

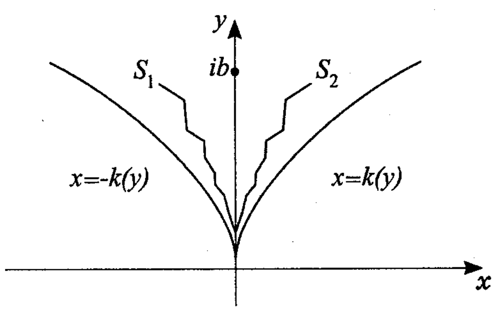

Рис. 2.

Теорема 3. *Пара (S_1, S_2) неразделима в $\mathbb{C}_+$.*

Замечание. В [11] показано, что если φ_1, $\varphi_2 \in C^{1+\varepsilon}([0,b])$, то утверждение теоремы 3 остается верным при условии $k(y) = o(y)$ $(y \to 0)$.

Доказательство. Положим $K_y := S_1 \cap \{y \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2y\}$, $K'_y := S_2 \cap \{y \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2y\}$, $g_y = (-y,y) \times (0,3y)$, $A_y := \varphi_1(y) + iy$ при $y \in (0,b]$. Очевидно,

$$y \leqslant a_y \leqslant c(L)y, \quad 0 < y \leqslant b, \tag{34}$$

где $c(L)$ зависит лишь от липшицевой константы функции φ_1. Если $\eta \in [y, 2y]$, то в силу (33)

$$\begin{aligned}|z_1(\eta) - z_2(\eta)| &= \varphi_2(\eta) - \varphi_1(\eta)\\ &\leqslant 2k(\eta) = o(y/|\log y|) = o(a_y/|\log a_y|), \quad y \to 0\end{aligned}$$

(последняя оценка следует из (34)), так что континуумы $K := K_y$, $K' := K'_y$ удовлетворяют условию (25) (где $a = a_y$), а функция β-условию (27). Континуумы K_y, K'_y T-правильны, где T зависит лишь от констант Липшица для φ_1 и φ_2 (по лемме 6); клетки g_y равномерно округлы. Остается применить теорему 2 к семействам $(K_y)_{0<y\leqslant b}$, $(K'_y)_{0<y\leqslant b}$. •

3.4.2. На этот раз наши липшицевы функции φ_1, φ_2 (заданные по-прежнему на $[0,b]$) удовлетворяют следующим условиям:

$$0 < \varphi_1(x) < \varphi_2(x), \;\; x \in (0,b]; \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0.$$

Положим $z_j(x) = x + i\varphi_j(x)$, $x \in [0,b]$, $S_j := \{z_j(x) : 0 < x \leqslant b\}$, $j = 1,2$.

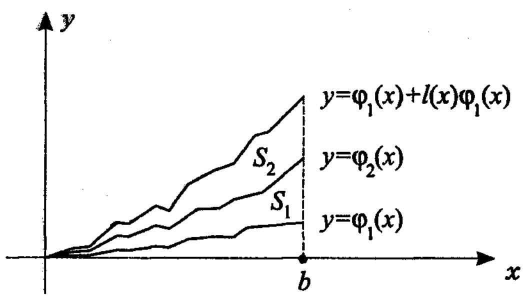

Рис. 3.

На рис. 3 изображен наиболее интересный случай, когда кривые S_1, S_2 имеют общую касательную (луч $[0,+\infty)$) в начале координат, хотя следующий результат приложим и к тому случаю, когда $\varphi'_1(0) = \varphi'_2(0) > 0$.

Теорема 4. *Пусть*

$$\varphi_2(x) - \varphi_1(x) \leqslant \varphi_1(x) l(x), \quad x \in (0,b], \tag{35}$$

где $l(x) = o(1/|\log \varphi_1(x)|)$, $x \to 0$. Тогда пара (S_1, S_2) неразделима в $\mathbb{C}_+$.

В [11] показано, что если φ_1, $\varphi_2 \in C^{1+\varepsilon}([0,b])$, то теорема 4 остается в силе при условии $l(x) = o(1)$, $x \to 0$.

Доказательство. Положим $\theta = 1/2L$, где L — липшицева константа функции φ_1, и пусть

$$\begin{aligned}
I_x &:= [x - \theta\varphi_1(x), x + \theta\varphi_1(x)],\\
K_x &:= S_1 \cap \{\operatorname{Re} z \in I_x\},\\
K'_x &:= S_2 \cap \{\operatorname{Re} z \in I_x\},\\
g_x &:= (x - 2\theta\varphi_1(x), x + 2\theta\varphi_1(x)) \times (0, 2\varphi_1(x)),\\
A_x &:= x + i\varphi_1(x), \quad x \in (0, b].
\end{aligned}$$

Очевидно, $K_x \subset g_x$, так как при $\zeta \in I_x$ имеем

$$\varphi_1(\zeta) \leqslant \varphi_1(x) + L\theta\varphi_1(x) = 3\varphi_1(x)/2.$$

Но

$$a_x^2 = \max_{\xi \in I_x}[(x-\xi)^2 + (\varphi_1(x) - \varphi_1(\xi))^2] \leqslant 5(\varphi_1(x))^2/4,$$

так что

$$\theta\varphi_1(x) \leqslant a_x \leqslant 10\varphi_1(x), \quad x \in (0, b]. \tag{36}$$

Если $\xi \in I_x$, то

$$|z_1(\xi) - z_2(\xi)| = \varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi) \leqslant \varphi_1(\xi)l(\xi) \leqslant 2\varphi_1(x)l(\xi) \leqslant 2La_x l(\xi),$$

и

$$\begin{aligned}
l(\xi) &= \frac{\varepsilon(\xi)}{|\log\varphi_1(\xi)|}\\
&\leqslant \frac{\sup\{\varepsilon(\xi) : 0 < \xi \leqslant x + \theta\varphi_1(x)\}}{|\log(\varphi_1(x)/2)|} = o\Big(\frac{1}{|\log\varphi_1(x)|}\Big) = o\Big(\frac{1}{|\log a_x|}\Big),
\end{aligned}$$

где $\varepsilon(x) = o(1)$ $(x \to 0)$; мы воспользовались оценкой $\varphi_1(\xi) \geqslant \varphi_1(x) - L\theta\varphi_1(x) = \varphi_1(x)/2$ в I_x, а также оценкой (36). Наши континуумы K_x, K'_x равномерно правильны (лемма 6), а клетки g_x равномерно округлы, и остается применить теорему 2. •

3.4.3. Рассмотрим жордановы области G_1, G_2, изображенные на рис. 4, и их пересечение G.

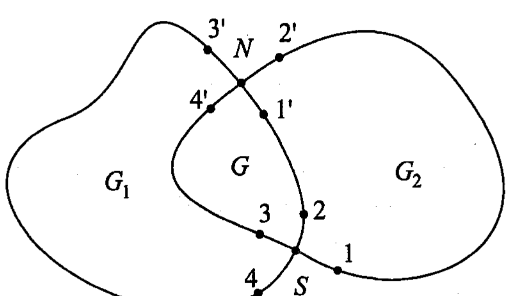

Рис. 4.

Предположим, что кривые ∂G_1, ∂G_2 кусочно-C^1-гладкие и пересекаются *трансверсально* в точках S и N, т.е. любые две из четырех дуг 1, 2, 3, 4 (соответственно 1', 2', 3', 4') образуют ненулевой угол в точке S (соответственно N). В [10] показано (пример 4.1 в п. 4.6), что для любой функции $f \in H^\infty(G)$ найдутся такие функции $f_j \in H^\infty(G_j)$, $j = 1, 2$, что

$$f = f_1 + f_2 \quad \text{в } G. \tag{37}$$

Из теорем 3 и 4 следует, что условие трансверсальности в этой ситуации не может быть опущено (вывод этого утверждения из теорем 3 и 4 проделан в [11]).

II. РАЗДЕЛИМОСТЬ КАСАТЕЛЬНЫХ ПАР

Главный результат этой части статьи — это теорема 5 в §II.2, описывающая некоторые пары, разделимые в $\mathbb{C}_+$. В ней пойдет речь о парах гладких дуг в $\mathbb{C}_+$, для которых прямая $\mathbb{R}$ служит общей касательной в начале координат. Теорема 5 противостоит как утверждение положительного характера теореме 4 первой части.

Первый параграф части II посвящен технической подготовке доказательства теоремы 5. В конце §II.2 приводятся примеры, иллюстрирующие теорему 5.

Нам понадобятся следующие обозначения: для пути $\gamma : I \to \mathbb{C}$, где $I \subset \mathbb{R}$ — некоторый интервал, мы полагаем

$$C_\gamma^F(\zeta) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(z)dz}{z-\zeta}, \qquad \zeta \in \mathbb{C}\setminus\gamma(I).$$

При этом мы предполагаем, что функция γ абсолютно непрерывна, а область задания комплексной функции F содержит траекторию $\gamma(J)$, причем функция $F\circ\gamma$ измерима по Лебегу, и

$$\int_I |F\circ\gamma||\gamma'| < +\infty.$$

Главное значение интеграла $(2\pi i)^{-1}\int_\gamma (F(z)/(z-\zeta))dz$, где $\zeta \in \gamma(I)$, будет обозначаться символом $\mathcal{C}_\gamma^F(\zeta)$; при $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\gamma(I)$ по определению $\mathcal{C}_\gamma^F(\zeta) = C_\gamma^F(\zeta)$.

Через γ_φ мы будем обозначать график вещественной функции φ, определенной на подмножестве E прямой $\mathbb{R}$; мы будем рассматривать γ_φ как *отображение*: $\gamma_\varphi(x) = x + i\varphi(x)$, $x \in E$ (т.е. как *путь*, если функция φ непрерывна, а E есть промежуток); но иногда мы будем воспринимать γ_φ как *множество* $\gamma_\varphi(E)$.

§II.1. Перенос особенностей на вспомогательную дугу

1.1. Четверка дуг γ_j, $j = -1, 0, 1, 2$. Пусть φ_1, φ_2 — неотрицательные функции, заданные на $[0, b]$, $b > 0$, причем

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_j(x) > 0 \quad \text{при } x \in (0, b],\ j = 1, 2.$$

Мы будем предполагать, что для некоторого числа $\mu > 0$ справедливо неравенство

$$\varphi_2(x) \geqslant (1+\mu)\varphi_1(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant b. \tag{38}$$

Это значит, что гиперболическое расстояние (относительно $\mathbb{C}_+$) между точками $\gamma_{\varphi_1}(x)$ и $\gamma_{\varphi_2}(x)$ отделено от нуля равномерно относительно $x \in (0, b]$. (Заметим, что как раз это условие было нарушено в теореме 4). Кроме того, нам придется использовать следующие предположения гладкости:

$$\varphi_1 \in C^{1+\varepsilon}([0,b]) \quad \text{при некотором } \varepsilon > 0,\ \varphi_1'(0) = 0,\ \varphi_2 \in C^1([0,b]). \tag{39}$$

Положим $\gamma_j := \gamma_{\varphi_j}$ $(j = 1, 2)$, $\gamma_0 := [-b, b]$, $\gamma_{-1} := \overline{\gamma_1}$.

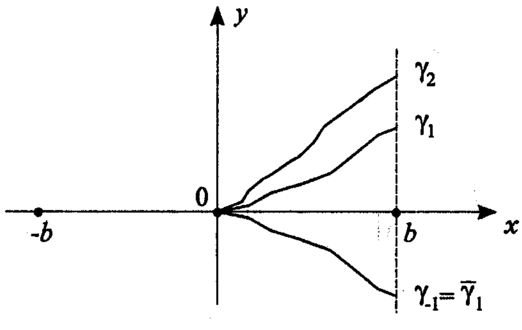

Рис. 5.

1.2. Основная лемма: формулировка и начало доказательства. Через A' мы обозначаем дополнение $\mathbb{C} \setminus A$ множества $A \subset \mathbb{C}$.

Лемма 11. *Пусть* $f \in H^\infty((\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2)')$, *где пути* γ_1, γ_2 *удовлетворяют условиям* (38) *и* (39). *Тогда найдутся такие функции* $f_j \in H^\infty((\gamma_0 \cup \gamma_j \cup \gamma_{-1})')$, $j = 1, 2$, *что*

$$f = f_1 + f_2 \quad \text{в } (\gamma_{-1} \cup \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2)'.$$

Доказательство. Можно считать, что $f(\infty) = 0$, так что

$$f = C^F_{\gamma_0} + C^F_{\gamma_1} + C^F_{\gamma_2},$$

где $F \in L^\infty(\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2, s)$ (s обозначает длину; см. лемму 4.1 в [10]). Продолжим F на γ_{-1}:

$$F(x - i\varphi_1(x)) := F(x + i\varphi_1(x)), \quad 0 < x \leqslant b,$$

и положим $C_j := C^F_{\gamma_j}$, $j = -1, 0, 1, 2$; главные значения $\mathcal{C}_j$ определяются аналогично (напомним, что $\mathcal{C}_j = C_j$ в γ_j'). Наконец, положим

$$f_1 := C_1 - C_{-1} \text{ в } (\gamma_{-1} \cup \gamma_1)', \quad f_2 := C_{-1} + C_0 + C_2 \text{ в } (\gamma_{-1} \cup \gamma_0 \cup \gamma_2)', \tag{40}$$

так что $f = f_1 + f_2$ в $(\bigcup_{j=-1}^{2} \gamma_j)'$. Нам остается доказать, что

$$f_2 \in H^\infty((\gamma_{-1} \cup \gamma_0 \cup \gamma_2)'). \tag{41}$$

Ограниченность функции f_1 в $(\gamma_{-1} \cup \gamma_1)'$ будет тогда следовать из (41) и ограниченности функции f.

1.3. Отступление. План, намеченный в п. 1.2, параллелен доказательству теорем 4.1 и 5.1 в [10]. Сначала мы грубо разбиваем потенциал Коши $C^F_{\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2} = f$ по формуле

$$f = C_1 + [C_0 + C_2],$$

которая разделяет особенности, но разрушает ограниченность. Чтобы ее восстановить, мы вводим вспомогательную дугу γ_{-1}, лежащую вне $\mathbb{C}_+$, и стараемся добиться ограниченности функций f_1 и f_2, вычитая C_{-1} из C_1 и прибавляя C_{-1} к $C_0 + C_2$; тем самым мы не создаем новых особенностей в $\mathbb{C}_+$ (а только в $\mathbb{C}'_+$), причем ограниченность суммы $f_2 = C_0 + C_2 + C_{-1}$ становится весьма правдоподобной. Действительно, заряд на γ_{-1}, создающий потенциал C_{-1}, есть точная копия исходного заряда на γ_1, порождающего C_1. Но сумма $C_0+C_2+C_1$ *была* ограниченной, а отклонения точек $\gamma_1(x)$ и $\gamma_{-1}(x)$ от соответственно $\gamma_0(x)$ и $\gamma_2(x)$ сравнимы (и примерно равны $\varphi_1(x)$) в силу (39). Иначе говоря, потенциал C_{-1} способен уравновесить рост суммы C_0+C_2 не хуже, чем C_1 — вследствие тождественности зарядов, лежащих на γ_1 и γ_{-1} и сравнимости расстояний $|\gamma_1(x)-\gamma_0(x)|$ и $|\gamma_{-1}(x)-\gamma_0(x)|$ (соответственно $|\gamma_2(x)-\gamma_1(x)|$ и $|\gamma_2(x)-\gamma_{-1}(x)|$). Приводимое ниже доказательство подтверждает эти соображения. Как и в п. 5 работы [10], доказательство будет использовать принцип максимума модуля для потенциалов Коши, но оценки будут другими и, к сожалению, потребуют от нас наложить на φ_1 дополнительное условие гладкости (см. (39)), гораздо более сильное, чем в „трансверсальной“ ситуации, изученной в [10].

1.4. Продолжение доказательства леммы 11. Чтобы доказать соотношение (41), мы применим лемму 5.1 и п. 5.2 работы [10]. Мы установим существование такой константы M, что

$$|\mathfrak{C}_{-1}(z_0)+\mathfrak{C}_0(z_0)+\mathfrak{C}_2(z_0)|\leqslant M \quad \text{при } s\text{-почти всех } z_0\in\gamma_0\cup\gamma_{-1}\cup\gamma_2. \tag{42}$$

Формулы Привалова–Сохоцкого для граничных значений потенциалов Коши и ограниченность плотности F обеспечат ограниченность угловых граничных значений функции $f_2=C_{-1}+C_0+C_2$ п. в. на $\gamma_0\cup\gamma_{-1}\cup\gamma_2$, и в силу п.5.2 в [10] мы получим (41).

1.5. Чтобы доказать (42), оценим разность $\mathfrak{C}_{-1}(z_0)-\mathfrak{C}_1(z_0)=:\Delta(z_0)$ для произвольной точки $z_0=x_0+iy_0$, $x_0\in[-b,b]$, $y_0\in\mathbb{R}$. Полагая $F_j(x)=F(x+i\varphi_j(x))$, имеем

$$\Delta(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^b F_1(x)\Big(\frac{\overline{\gamma_1'(x)}}{\overline{\gamma_1(x)}-z_0}-\frac{\gamma_1'(x)}{\gamma_1(x)-z_0}\Big)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^b\frac{\operatorname{Im}(\overline{\gamma_1'(x)}\gamma_1(x))+z_0\operatorname{Im}\gamma_1'(x)}{(\overline{\gamma_1(x)}-z_0)(\gamma_1(x)-z_0)}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^b F_1(x)\frac{-\varphi_1'(x)(x-x_0)+\varphi_1(x)+iy_0\varphi_1'(x)}{[(x-x_0)-i(\varphi_1(x)+y_0)][(x-x_0)+i(\varphi_1(x)-y_0)]}dx. \tag{43}$$

Прибавим и отнимем $\varphi_1(x_0)$ в числителе под интегралом; считая, что $\varphi_1(x_0)=0$ при $x_0\in[-b,0]$, получим

$$|\Delta(z_0)|\leqslant\|F\|_\infty(a(z_0)+B(z_0)+C(z_0)), \tag{44}$$

где

$$\left.\begin{aligned} B(z_0)&=\varphi_1(x_0)\int_0^b\frac{dx}{[|x-x_0|+|\varphi_1(x)+y_0|][|x-x_0|+|\varphi_1(x)-y_0|]},\\ C(z_0)&=y_0\int_0^b\frac{\varphi_1'(x)dx}{[|x-x_0|+|\varphi_1(x)+y_0|][|x-x_0|+|\varphi_1(x)-y_0|]}.\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Величину $A(z_0)$ мы можем определить и оценить так:

$$\begin{aligned} A(z_0)&:=\int_0^b\frac{|\varphi_1(x)-\varphi_1(x_0)-\varphi_1'(x)\cdot(x-x_0)|}{(x-x_0)^2}dx\\ &=\int_0^b\frac{|\varphi_1'(c(x,x_0))-\varphi_1'(x)|}{|x-x_0|}dx\leqslant\int_0^b\frac{k\cdot|x-x_0|^\varepsilon}{|x-x_0|}dx\end{aligned} \tag{46}$$

($c(x, x_0)$ — некоторая точка между x и x_0). Последний интеграл ограничен равномерно по $x_0 \in [-b, b]$ (мы воспользовались условием (39)).

Обратимся к (42) и рассмотрим следующие частные случаи:

$$\text{(I)} \quad z_0 = x_0 \in \gamma_0; \quad \text{(II)} \quad z_0 \in \overline{\gamma_1} = \gamma_{-1}; \quad \text{(III)} \quad z_0 \in \gamma_2. \tag{47}$$

1.6. Случай (I). При $x_0 \in \gamma_0$ имеем

$$\mathcal{C}_0(x_0) + C_{-1}(x_0) + C_2(x_0) = [\mathcal{C}_0(x_0) + C_1(x_0) + C_2(x_0)] + \Delta(x_0);$$

квадратная скобка (как функция x_0) принадлежит $L^\infty([-b, b])$ в силу ограниченности функций f, F и формул Привалова–Сохоцкого; (44) приобретает следующий вид:

$$|\Delta(x_0)| \leqslant (A(x_0) + B(x_0))\|F\|_\infty,$$

так как $y_0 = 0$ и $C(x_0) = 0$; в силу (46) $A \in L^\infty([0, b])$. Чтобы оценить $B(x_0)$ при $0 < x_0 < b$, рассмотрим наибольшее в $(0, x_0)$ решение x_1 уравнения $\varphi_1(x_1) = \frac{1}{2}\varphi_1(x_0)$. Имеем

$$\varphi_1(x_0)/2 = \varphi_1(x_0) - \varphi_1(x_1) = \varphi_1'(c)(x_0 - x_1)$$

при некотором $c \in (x_1, x_0)$; $\varphi_1(x) \geqslant \varphi_1(x_0)/2$ при $x \in (x_1, b)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} B(x_0) &\leqslant \varphi_1(x_0) \int_{-\infty}^{x_1} \frac{dx}{(x_0 - x)^2} + \varphi_1(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(|x - x_0| + \varphi_1(x_0)/2)^2} \\ &= \frac{\varphi_1(x_0)}{x_0 - x_1} + \varphi_1(x_0) \cdot 2 \int_0^\infty \frac{du}{(u + \varphi_1(x_0)/2)^2} \leqslant \max_{[0,b]} |\varphi_1'| + 4. \end{aligned}$$

Если $x \in [-b, 0]$, то $B(x_0) = 0$.

1.7. Случай (II). Пусть $z_0 = x_0 - i\varphi_1(x_0) \in \gamma_{-1}$, $x_0 \in [0, b]$. Имеем

$$\begin{gathered} C_0(z_0) + \mathcal{C}_{-1}(z_0) + C_2(z_0) = [C_0(\bar{z}_0) + \mathcal{C}_1(\bar{z}_0) + C_2(\bar{z}_0)] + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2; \\ \alpha_j := C_j(z_0) - C_j(\bar{z}_0), \quad j = 0, 2, \quad \alpha_1 := \mathcal{C}_{-1}(z_0) - C_1(\bar{z}_0). \end{gathered} \tag{48}$$

Квадратная скобка в (48) принадлежит пространству $L^\infty(\gamma_{-1}, s)$ как функция переменной z_0 (в силу ограниченности функций f, F). Нам остается оценить α_0, α_1, α_2. Но

$$\begin{aligned} |\alpha_0| &= \frac{1}{\pi}\left| \int_0^b F(x) \frac{\operatorname{Im} z_0}{|x - z_0|^2} dx \right| \leqslant \|F\|_\infty; \\ |\alpha_1| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^b F_1(x) \left[\frac{\gamma_1'(x)}{\gamma_1(x) - \bar{z}_0} - \frac{\overline{\gamma_1'(x)}}{\overline{\gamma_1(x)} - z_0} \right] dx \right| \\ &= \frac{1}{\pi}\left| \int_0^b F_1(x) \frac{\operatorname{Im}[\gamma_1'(x)(\overline{\gamma_1(x)} - z_0)]}{|\gamma_1(x) - z_0|^2} dx \right| \\ &= \frac{1}{\pi}\left| \int_0^b F_1(x) \frac{\varphi_1'(x)(x - x_0) - (\varphi_1(x) - \varphi_1(x_0))}{(x - x_0)^2 + (\varphi_1(x) - \varphi_1(x_0))^2} dx \right| \\ &\leqslant \|F_1\|_\infty \int_0^b \frac{|\varphi_1'(x)(x - x_0) - (\varphi_1(x) - \varphi_1(x_0))|}{(x - x_0)^2} dx; \end{aligned}$$

равномерная (по $x_0 \in [0, b]$) ограниченность последнего интеграла уже была доказана (см. (46)).

Далее,

$$|\alpha_2| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^b F_2(x)\gamma_2'(x)\left[\frac{1}{\gamma_2(x)-z_0}-\frac{1}{\gamma_2(x)-\bar z_0}\right]dx\right|$$
$$\leqslant \|F\|_\infty\|\gamma_2'\|_\infty\int_0^b \frac{|\operatorname{Im} z_0|}{|\gamma_2(x)-z_0||\gamma_2(x)-\bar z_0|}dx$$
$$\leqslant 2\|F\|_\infty\|\gamma_2'\|_\infty\varphi_1(x_0)\int_0^b \frac{dx}{(|x-x_0|+\varphi_2(x)+\varphi_1(x_0))(|x-x_0|+|\varphi_2(x)-\varphi_1(x_0)|)}.$$

Воспользуемся неравенством

$$\frac{1}{\alpha+\beta}\leqslant\frac{R}{R\alpha+\beta},\quad \alpha,\beta>0,\ \ R>1.$$

Получим

$$|\alpha_2|\leqslant K\varphi_1(x_0)\int_0^b\frac{1}{|x-x_0|+\varphi_1(x_0)}\cdot\frac{Rdx}{R|x-x_0|+|\varphi_2(x)-\varphi(x_0)|},$$

где $K := 2\|F\|_\infty\|\gamma_2'\|_\infty$. Но в силу (38)

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x_0)|\geqslant|\varphi_2(x_0)-\varphi_1(x_0)|-|\varphi_2(x)-\varphi_2(x_0)|\geqslant\mu\varphi_1(x_0)-\|\varphi_2'\|_\infty|x-x_0|.$$

Выбирая $R = \|\varphi_2'\|_\infty + 1$, получим

$$|\alpha_2|\leqslant RK\varphi_1(x_0)\int_0^b\frac{1}{|x-x_0|+\varphi_1(x_0)}\cdot\frac{1}{|x-x_0|+\mu\varphi_1(x_0)}dx$$
$$\leqslant RK\varphi_1(x_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x-x_0)^2+\widetilde\mu^2\varphi_1^2(x_0)}=RK\pi/\widetilde\mu,$$

где $\widetilde\mu := \min(\mu,1)$. Тем самым случай (II) исчерпан.

1.8. Случай (III). Если $z_0\in\gamma_2$, $z_0 = x_0+i\varphi_2(x_0)$, $x_0\in(0,b]$, то

$$C_0(z_0)+C_{-1}(z_0)+\mathcal{C}_2(z_0)=[C_0(z_0)+C_1(z_0)+\mathcal{C}_2(z_0)]+\Delta(z_0)$$

(см. (44), (45)). Квадратная скобка как функция переменной z_0 принадлежит пространству $L^\infty(\gamma_2,s)$. Применим оценки (44), (45) с $y_0=\varphi_2(x_0)$, получим

$$B(z_0)=\varphi_1(x_0)\int_0^b\frac{dx}{(|x-x_0|+\varphi_1(x)+\varphi_2(x_0))(|x-x_0|+|\varphi_1(x)-\varphi_2(x_0)|)}$$
$$=\varphi_1(x_0)C(z_0)/\varphi_2(x_0).$$

Напомним, что величина $A(z_0)$ равномерно ограничена, а $\varphi_2(x_0)<\varphi_1(x_0)$. Поэтому нам остается доказать, что величина $C(z_0)$ ограничена равномерно по $z_0\in\gamma_2$. Так же, как в случае (II) при $R>1$, получаем

$$C(z_0)\leqslant\varphi_2(x_0)\int_0^b\frac{Rdx}{(|x-x_0|+\varphi_2(x_0))(R|x-x_0|+|\varphi_1(x)-\varphi_2(x_0)|)}.$$

Но $|\varphi_1(x)-\varphi_2(x_0)|\geqslant(\varphi_2(x_0)-\varphi_1(x_0))-\|\varphi_1'\|_\infty|x-x_0| = \varphi_2(x_0)(1-\varphi_1(x_0)/\varphi_2(x_0))-\|\varphi_1'\|_\infty|x-x_0|\geqslant\varphi_2(x_0)\mu/(1+\mu)-\|\varphi_1'\|_\infty|x-x_0|$ (мы снова воспользовались условием (38)). Полагая $R=1+\|\varphi_1'\|_\infty$, получаем

$$C(z_0)\leqslant R\varphi_2(x_0)\int_0^b\frac{dx}{(|x-x_0|+\widetilde\mu\varphi_2(x_0))^2}\leqslant R\pi/\widetilde\mu,\quad \widetilde\mu=\mu/(1+\mu).$$

Лемма 11 доказана. •

§II.1. Разделимые касательные пары: достаточное условие и примеры

2.1. Теорема 5. *Пусть* $\gamma_j = \gamma_{\varphi_j}$, $j = 1, 2$, — *те же дуги, что в лемме* 11. *Тогда пара* (γ_1, γ_2) *разделима в* $\mathbb{C}_+$.

Доказательство основано на следующем замечании: для любой функции h из $H^\infty(\mathbb{C}_+ \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2))$ найдутся такие функции $f_0 \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ и $f^0 \in H^\infty((\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2)')$, что

$$h = f_0 + f^0 \quad \text{в } \mathbb{C}_+ \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2). \tag{49}$$

Применив лемму 11 к f^0, из (49) мы получим

$$h = (f_0 + f_1) + f_2 \quad \text{в } \mathbb{C}_+ \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2),$$

где $f_1 \in H^\infty((\gamma_0 \cup \gamma_1)')$, $f_2 \in H^\infty((\gamma_0 \cup \gamma_2)')$, так что $(f_0 + f_1)|(\mathbb{C}_+ \setminus \gamma_1) \in H^\infty(\mathbb{C}_+ \setminus \gamma_1)$, $f_2|(\mathbb{C}_+ \setminus \gamma_2) \in H^\infty(\mathbb{C}_+ \setminus \gamma_2)$, что и завершает доказательство теоремы.

Чтобы получить (49), рассмотрим такое дробно-линейное отображение Φ, что $\Phi(\mathbb{D}) = \mathbb{C}_+$ ($\mathbb{D}$ — единичный круг), $\Phi(1) = 0$, и положим $\Gamma := \Phi^{-1}[-b, b]$. Пусть $\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma$ — дуга, открытая относительно единичной окружности $\mathbb{T}$ и содержащая 1. Положим $k := \Phi^{-1}(\gamma_1 \cup \gamma_2)$, $g := h \circ \Phi$ в $\mathbb{D} \setminus k$, $g := 0$ в $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{D} \cup \mathbb{T})$, так что $g \in H^\infty((\mathbb{T} \cup k)')$; но $\mathbb{T} \cup k = (\Gamma \cup k) \cup (\mathbb{T} \setminus \widetilde{\Gamma})$. Пара $(\Gamma \cup k, \mathbb{T} \setminus \widetilde{\Gamma})$ удовлетворяет условиям „теоремы о предразделении“ (“preseparation theorem”) и ее следствия 3.3 в [10], так как множества $\mathbb{T} \setminus \Gamma$ и $\widetilde{\Gamma}$ находятся на положительном расстоянии. Поэтому

$$g = g_1 + g_2, \quad g_1 \in H^\infty((\Gamma \cup k)'), \quad g_2 \in H^\infty((\mathbb{T} \setminus \widetilde{\Gamma})'),$$

и (49) выполняется с $f_0 = (g_2 \circ \Phi^{-1})|\mathbb{C}_+$, $f^0 = g \circ \Phi^{-1}$. •

2.2. Обобщение. Начнем с простого замечания. Пусть O, $\widetilde{O}$ — области, а K_1, K_2, $\widetilde{K_1}$, $\widetilde{K_2}$ — компактные множества в $\widehat{\mathbb{C}}$. Тройки (O, K_1, K_2) и $(\widetilde{O}, \widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2)$ назовем (*конформно*) *эквивалентными*, если найдется конформный гомеоморфизм Φ области O на $\widetilde{O}$, отображающий $K_j \cap O$ на $\widetilde{K}_j \cap \widetilde{O}$, $j = 1, 2$. Очевидно, пара (K_1, K_2) разделима в O тогда и только тогда, когда пара $(\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2)$ разделима в $\widetilde{O}$. (Как и в [10], мы говорим, что пара (K_1, K_2), где K_j не обязательно содержатся в O, разделима в O, если в O разделима пара $(K_1 \cap O, K_2 \cap O)$).

Предположим, что $K_1 \cap K_2 = \{0\}$, и пусть v — окрестность начала. Положим $\varkappa_j := \mathrm{Clos}(K_j \cap v)$, $j = 1, 2$. Пусть ω — область в $\widehat{\mathbb{C}}$.

Следствие (теоремы 5). *Пусть тройки* $(\omega, \varkappa_1, \varkappa_2)$ *и* $(\mathbb{C}_+, \gamma_1, \gamma_2)$ *эквивалентны* (γ_1, γ_2 — *дуги, участвующие в лемме* 11). *Тогда пара* (K_1, K_2) *разделима в* ω.

Доказательство следует из следствия 3.2 в [10], из леммы 11, и из замечания в начале этого пункта (о разделимости пары $(\varkappa_1, \varkappa_2)$ в ω). •

2.3. „Двусторонний“ вариант теоремы 5. Этот вариант понадобится нам при построении примеров.

Теорема 5′. *Пусть* φ_1, φ_2 — *функции, заданные на промежутке* $[-b, b]$, $\varphi_1 \in C^{1+\varepsilon}([-b, b])$, $\varphi_2 \in C^1([-b, b])$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, $\varphi_j(x) > 0$ *при* $x \neq 0$ (*так что* $\varphi_j'(0) = 0$), $j = 1, 2$. *Пусть условие* (38) *выполнено при любом* $x \in [-b, b]$. *Тогда пара графиков* $(\gamma_{\varphi_1}, \gamma_{\varphi_2})$ *разделима в* $\mathbb{C}_+$.

Можно было бы, проследив за доказательством теоремы 5, убедиться, что оно сохраняет силу в новых условиях. Мы предпочитаем формальную редукцию теоремы 5′ к теореме 5.

Доказательство. Положим $\varphi_j^+ := \varphi_j|[0,b]$, $\varphi_j^- := \varphi_j|[-b,0]$, $\gamma_j := \gamma_{\varphi_j}$, $\gamma_j^\pm := \gamma_{\varphi_j^\pm}$, $j=1,2$. Покажем, что

$$\text{пара } (\gamma_1^+ \cup \gamma_2^+, \gamma_1^- \cup \gamma_2^-) \text{ разделима в } \mathbb{C}_+. \tag{50}$$

Доказав утверждение (50), мы сможем применить теорему 5 по отдельности к парам (γ_1^+,γ_2^+) и (γ_1^-,γ_2^-). Чтобы доказать утверждение (50), рассмотрим функцию $h \in H^\infty(\mathbb{C}_+ \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2))$ и воспользуемся представлением $h = f_0 + f^0$ в $\mathbb{C}_+ \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)$, где $f_0 \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, $f^0 \in H^\infty((\gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2)')$, $\gamma_0 := [-b,b]$, как в доказательстве теоремы 5 в п. 2.1, которое мы применяем к нашей новой паре (γ_1,γ_2). Затем рассмотрим компактный треугольник $T \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_+$ с вершиной в начале, симметричный относительно мнимой оси. По теореме 4.2 из [10]

$$f^0 = \psi^+ + \psi^- \quad \text{в } \mathbb{C} \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup T),$$

где $\psi^\pm \in H^\infty(\mathbb{C} \setminus (\gamma_1^\pm \cup \gamma_2^\pm \cup T))$. Итак, $h = (f_0 + \psi^+) + \psi^-$ в $\mathbb{C}_+ \setminus (\gamma_1 \cup \gamma_2)$, причем $f_0 + \psi^+ \in H^\infty(\mathbb{C}_+ \setminus (\gamma_1^+ \cup \gamma_2^+))$, $\psi^- \in H^\infty(\mathbb{C}_+ \setminus (\gamma_1^- \cup \gamma_2^-))$. •

Следствие теоремы 5 в п. 2.2 имеет очевидный аналог, отвечающий теореме 5′.

В заключение этого пункта еще раз обратимся к теореме 5′. Предположим, что $\varphi_j \in C^2([-b,b])$, $\varphi_j(0) = \varphi_j'(0) = 0$, $\varphi_j(x) > 0$ при $x \neq 0$, $j = 1,2$. Если при этом $\varphi_2''(0) > \varphi_1''(0)$, то условие (38) выполняется при любом $x \in [-b,b]$. Таким образом, если *кривизны* дуг γ_1, γ_2 в начале координат различны, то пара (γ_1,γ_2) разделима в $\mathbb{C}_+$ (по теореме 5′).

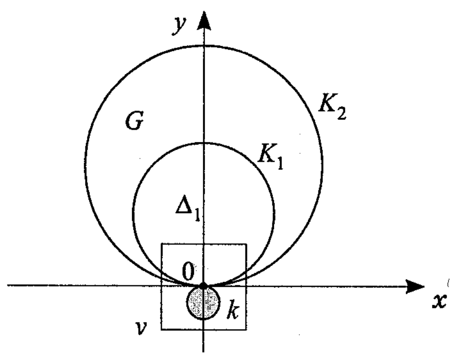

Рис. 6.

2.3. Некоторые приложения теоремы 5′.

Пример 1. Пусть K_1, K_2 — две (различные) окружности в $\mathbb{C}_+ \cup \{0\}$, проходящие через начало и с мнимыми центрами (рис. 6).

Пара (K_1,K_2) *разделима* в $\mathbb{C}_+$. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим малый квадрат v с центром в начале и применим следствие теоремы 5′ и сказанное в конце п. 2.2 о разделимости в $\mathbb{C}_+$ дуг с несовпадающими кривизнами в начале координат.

Пример 2. Обозначим через Δ_j открытый круг с границей K_j, $j = 1,2$. Пусть $k := \{|z+i\varepsilon| \leqslant \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ (см. рис. 6). *Пара* (K_1, K_2) *разделима в области* $\mathbb{C} \setminus \varkappa$.

Напомним, что пара (K_1, K_2) *неразделима* в $\mathbb{C}$ и даже в любом открытом круге с центром в начале. Кроме того, существует функция $f \in H^\infty(G)$, $G := \Delta_2 \setminus (\Delta_1 \cup K_1)$, которую нельзя представить в виде

$$f = f_1 + f_2 \quad \text{в } G \tag{51}$$

с $f_1 \in H^\infty((\Delta_1 \cup K_1)')$, $f_2 \in H^\infty(\Delta_2)$ [10, п. 2.3]. Но *любая* функция $f \in H^\infty(G)$ представима по формуле (51), где $f_1 \in H^\infty((\Delta_1 \cup K_1 \cup \varkappa)')$, $f_2 \in H^\infty(\Delta_2)$.

Доказательство. Тройка $(\widehat{\mathbb{C}} \setminus k, K_1, K_2)$ эквивалентна тройке $(\mathbb{C}_+, \tilde{K}_1, \tilde{K}_2)$ (используем дробно-линейное преобразование, отображающее $\widehat{\mathbb{C}} \setminus k$ на $\mathbb{C}_+$); $\tilde{K}_j$ суть окружности в $\mathbb{C}_+ \cup \{0\}$ с мнимыми центрами, проходящие через начало.

Пример 3. Пусть $G = \{0 < \operatorname{Im} z < 1\}$. Зафиксируем положительное число L. *Любую функцию* $f \in H^\infty(G)$ *можно представить по формуле* (51) с

$$f_1 \in H^\infty(\mathbb{C}_+), \quad f_2 \in H^\infty(\{-L < \operatorname{Im} z < 1\}).$$

Напомним, что, вообще говоря, $f_2 \notin H^\infty(\mathbb{C}_- + i)$ [10, п. 2.3].

Доказательство. Пара прямых $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}+i$ разделима в $\mathbb{C}_+ - Li$, так как тройка $(\mathbb{R}, \mathbb{R}+i, \mathbb{C}_+ - Li)$ эквивалентна тройке из примера 2.

Пример 4 („Пара Пуанкаре“, см. Введение). Пара $(\mathbb{R}_-, \mathbb{R}_+)$, где $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, не разделима в $\mathbb{C}$ [10]. Однако *любая функция* $f \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ *совпадает в* $\mathbb{C}_+$ *с суммой* $f_+ + f_-$, *где* $f_\pm \in H^\infty(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_\pm)$.

Доказательство. Положим $\varphi(w) := f(\exp w)$, $w \in S_\pi := \{0 < \operatorname{Im} w < \pi\}$. Согласно примеру 3, при любом целом $k > 0$ имеет место представление

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- \quad \text{в } S_\pi,$$

где $\varphi_+ \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$, $\varphi_- \in H^\infty(\{\pi - 2k\pi < \operatorname{Im} w < \pi\})$. Поэтому

$$f(z) = \varphi_+(l_+(z)) + \varphi_-(l_-(z)), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

где $l_\pm$ — ветвь логарифма, аналитическая в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_\pm$ и такая, что $0 < \operatorname{Im} l_\pm < \pi$ в $\mathbb{C}_+$. Очевидно, $\varphi_\pm \circ l_\pm \in H^\infty(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_\pm)$. Более того, функцию $\varphi_+ \circ l_+$ можно аналитически продолжить с $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ на „верхнюю половину“ римановой поверхности логарифма, т. е. на объединение листов

$$\mathcal{L}_j = \{2\pi j < \arg z \leqslant 2\pi(j+1)\}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

а функция $\varphi_- \circ l_-$ аналитически продолжима с $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ „вниз“ на любое *конечное* объединение листов

$$\mathcal{L}'_j = \{-\pi + 2\pi j \leqslant \arg z < \pi + 2\pi j\}, \quad j = 0, 1, \ldots, k.$$

Список литературы

[1] Aronszajn N., *Sur les décompositions des fonctions analytiques uniformes et sur leurs applications*, Acta Math. **65** (1935), 1–156.

[2] Berenstein C. A., Gay R., *Complex variables. An introduction*, Grad. Texts in Math., vol. 125, Springer-Verlag, New York, 1991.

[3] Fréchet M., *Sur certaines décompositions de la fonction complexe uniforme la plus générale*, Acta Math. **54** (1930), 37–79.

[4] Gaier D., *Lectures on complex approximation*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1987; Пер. на рус. яз., Мир, М., 1986.

[5] Gaier D., *Remarks on Alice Roth's fusion lemma*, J. Approx. Theory **37** (1983), 246–250.

[6] Gamelin T., *Uniform algebras*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1969.

[7] Gauthier P. M., *Mittag-Leffler theorems on Riemann surfaces and Riemannian manifolds*, Canad. J. Math. **50** (1998), 547–562.

[8] Хавин В. П., *О выделении особенностей аналитических функций*, Докл. АН СССР **121** (1958), №2, 239–242.

[9] Khavin V. P., *Golubev series and the analyticity on a continuum*, Linear and Complex Analysis Problem Book. 199 Research Problems (V. P. Khavin, S. V. Khrushchev, N. K. Nikolskiĭ, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 1043, Springer-Verlag, Berlin etc., 1984, pp. 670–673.

[10] Havin V. P., Nersessian A. H., *Bounded separation of singularities of analytic functions*, Entire Functions in Modern Analysis (Tel-Aviv, 1997), Israel Math. Conf. Proc., vol. 15, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 2001, pp. 149–171.

[11] Havin V. P, Nersessian A. H., Ortega Cerdà J., *Uniform estimates in the Poincaré–Aronszajn theorem on the separation of singularities of analytic functions*, Preprint, 2003.

[12] Митягин Б. С., Хенкин Г. М., *Линейные задачи комплексного анализа*, Успехи мат. наук **26** (1971), №4, 93–152.

[13] Poincaré H., *Sur les fonctions à espaces lacunaires*, Amer. J. Math. **14** (1892), 201–221.

[14] Поляков П. Л., Хенкин Г. М., *Интегральные формулы для решения $\bar\partial$-уравнения и задачи интерполяции в аналитических полиэдрах*, Тр. Моск. мат. о-ва **53** (1990), 130–170.

[15] Поляков П. Л., *Продолжение ограниченных голоморфных функций с аналитической кривой общего положения в полидиске*, Функц. анал. и его прил. **17** (1983), №3, 87–88.

[16] Valiron G., *Fonctions analytiques*, Presses Univ. France, Paris, 1954.

[17] Привалов И. И., *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.-Л., 1950.

[18] Hörmander L., *An introduction to complex analysis in several variables*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, NJ, etc., 1966.

[19] Витушкин А. Г., *Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений*, Успехи мат. наук **22** (1967), №6, 141–199.

[20] Козлов А. В., Хавин В. П., *Разделение особенностей аналитических функций с сохранением непрерывности вплоть до границы* (готовится к печати).

С.-Петербургский
государственный университет
Математико-механический факультет
198504, Санкт-Петербург
Петродворец, Библиотечная пл., 2

Поступило 25 сентября 2003 г.