К. М. Чудинов, Функционально-дифференциальные неравенства и оценка функции Коши уравнения с последействием, *Изв. вузов. Матем.*, 2014, номер 4, 52–61

Известия вузов. Математика
2014, №4, с. 52–61

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Посвящается 90-летию со дня рождения профессора Н.В. Азбелева

К.М. ЧУДИНОВ

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ОЦЕНКА ФУНКЦИИ КОШИ УРАВНЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Аннотация. Рассматриваются скалярные функционально-дифференциальные неравенства, используемые для оценки решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Теорема о положительности функции Коши дифференциального уравнения с последействием выводится из теоремы о функционально-дифференциальном неравенстве с нелинейным монотонным оператором, являющейся прямым обобщением простейшей классической теоремы о дифференциальном неравенстве. Предлагаемые доказательства опираются исключительно на локальные свойства непрерывных функций.

Ключевые слова: дифференциальное неравенство, уравнение с последействием, оценка решения, устойчивость, test-уравнение.

УДК: 517.929

Среди инструментов качественной теории дифференциальных уравнений важное место занимают методы оценки решений, основанные на теоремах о дифференциальных неравенствах [1]. Эти теоремы и методы наследуются современной теорией функционально-дифференциальных уравнений ([2], гл. 10; [3]). Главная цель данной статьи состоит в том, чтобы обосновать методы оценки решений дифференциальных уравнений с последействием, по возможности соединяя простоту обоснования с элементарностью используемых средств. Доказывается теорема о скалярном функционально-дифференциальном неравенстве, разрешенном относительно производной, из которой выводятся основные утверждения о неравенствах, используемые в исследованиях устойчивости и неосцилляции решений скалярных функционально-дифференциальных уравнений. В качестве следствия полученной теоремы рассматриваются условия положительности функции Коши дифференциального уравнения с последействием, определяемого изотонным оператором.

В предлагаемых доказательствах используются локальные свойства непрерывных функций. Операторный язык применяется для общности рассуждений и краткости записи, если при этом сохраняется ясность результатов. Такой подход принципиально отличается от обычно применяемого, поскольку "за исключением классической теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве для уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ утверждения о неравенствах доказываются путем той или иной редукции рассматриваемого уравнения к уравнению

Поступила 30.10.2012

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-96050 р_урал_а).

$x = Ax$ с оператором A, определенным на частично упорядоченном множестве и обладающим свойством изотонности: из $x_1 \geq x_2$ следует $Ax_1 \geq Ax_2$" ([2], с. 211).

1. Теоремы о линейном функционально-дифференциальном неравенстве

Традиционно изучаемые линейные скалярные дифференциальные уравнения с последействием, определенные на вещественной полуоси и разрешенные относительно производной, могут быть записаны в общем виде ([2], гл. 5; [4], гл. I)

$$\dot{x}(t) + \int_a^t x(s)\, d_s r(t,s) = f(t), \quad t \geq a. \tag{1}$$

Это позволяет использовать в их исследовании ряд преимуществ, основное из которых — представление решения наследуемой из теории обыкновенных дифференциальных уравнений *формулой Коши* ([5], [6])

$$x(t) = C(t,a)x(a) + \int_a^t C(t,s) f(s)\, ds, \tag{2}$$

где *функция Коши* $C(t,s)$ может быть определена как решение задачи ([4], с. 97)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial C(t,s)}{\partial t} + \int_s^t C(\tau,s)\, d_\tau r(t,\tau) = 0, \quad t \geq s; \\ &C(s,s) = 1. \end{aligned} \tag{3}$$

В числе основных результатов исследования уравнения (1) — оценки его функции Коши с помощью решений функционально-дифференциального неравенства, получаемого заменой в уравнении знака равенства знаком неравенства. Все эти оценки так или иначе связаны со следующим фактом.

Теорема 1 ([4], с. 65)**.** *Пусть в уравнении* (1) *функция r не убывает по второму аргументу и существует такая функция v, что $v(t) > 0$ при всех $t \geq a$ и $\dot{v}(t) + \int\limits_a^t v(s) d_s r(t,s) \leq 0$ при почти всех $t \geq a$. Тогда функция Коши уравнения* (1) *подчинена оценке $C(t,s) \geq v(t)/v(s)$, где $t \geq s \geq a$.*

Для применения теоремы 1 необходимо и достаточно, чтобы функция v была определена на полуоси $[a, +\infty)$. Эффективные асимптотические оценки решений уравнений с последействием, полученные с помощью действия определяющего уравнение оператора на некоторую положительную функцию, как правило, существенно опираются на то, что эта функция определяется также для значений аргумента, меньших a ([7]–[11]).

Проиллюстрируем сказанное простым примером. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + p(t)x(t - r(t)) = 0, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

где $p(t), r(t) \geq 0$. Полагая $v(t) = e^{\gamma t}$, где $\gamma \in \mathbb{R}$, получаем $\dot{v}(t) + p(t)v(t - r(t)) = [\gamma + p(t)e^{-r(t)}]e^{\gamma t}$, откуда делается вывод, что функция Коши уравнения (4) положительна, если для некоторого γ имеем $\gamma + p(t)e^{-r(t)} \leq 0$ при почти всех $t \geq 0$. Вывод справедлив, но говорить, что он следует из теоремы 1, не вполне корректно. Действительно, теорема 1 подразумевает, что преобразование применеяется к функции v *после приведения уравнения* (4) *к виду* (1).

На это можно возразить, что в приведенном примере $v(t) > 0$ при $t < 0$, с учетом чего нетрудно показать, что теорема 1 применима к преобразованному к виду (1) уравнению

(4) и сужению функции v на полуось $[0,+\infty)$. Поэтому можно было бы считать, что имеет место не более чем методическое неудобство, если бы не обстоятельства, связанные с опубликованными доказательствами теоремы 1 и близких ей утверждений.

Существенным достижением в разработке эффективных методов оценки решений уравнения (1) представляется работа [9]. В частности, теорема 1 из [9] поныне продолжает оказывать влияние на виды и способы доказательства новых оценок решений уравнения (1). К сожалению, при доказательстве импликации, соответствующей теореме 1 (данной статьи), авторы работы [9] ограничиваются туманной ссылкой на изотонность некоторого интегрального оператора.

В последние два десятка лет тему неосцилляции, устойчивости и вообще оценок решений уравнения (1), в том числе на основе идей работы [9], активно разрабатывают Л. Березанский, Е. Браверман и А. Домошницкий. Подробное доказательство аналога теоремы 1 с условием ограниченности последействия проведено в статье [12]. Причины ограничения видеть нетрудно: авторы не используют традиционного для школы профессора Н.В. Азбелева переноса начальной функции в правую часть, поэтому записывают уравнение с последействием не в виде (1), а в виде

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t)+\int_{-\infty}^{t} x(s)\,d_s r(t,s)=f(t), \quad && t\ge a;\\ &x(t)=\varphi(t), && t<a. \end{aligned}$$

В работе [12] доказывается равносильность нескольких оценок решения этого уравнения и соответствующего неравенства, причем справедливость каждой из оценок рассматривается начиная с некоторой точки $b\ge a$. При таком подходе необходимо добиться, чтобы начальная функция φ перестала оказывать воздействие на эволюцию решения, откуда и возникает условие ограниченности последействия. Отметим, что авторы работы, виртуозно владеющие техникой, сложившейся на Пермском семинаре по функционально-дифференциальным уравнениям, тем не менее на протяжении долгого времени не использовали форму записи уравнения, положенную Н.В. Азбелевым в основу теории уравнений с последействием. По-видимому, тем самым они делали уступку научному сообществу, до сих пор не оценившему по достоинству преимущества такой записи. Попытка использовать ее предпринята в новой монографии [3], где систематизированы результаты последних лет по неосцилляции решений функционально-дифференциальных уравнений. В главе 15 [3] линейное уравнение с последействием записано в виде (1), приведена формула Коши (2) и прослеживается развитие идей о применении дифференциальных неравенств в исследовании неосцилляции.

Обсудим наложенное в теореме 1 условие неубывания функции r по второму аргументу. Для удобства запишем уравнение (1) в виде

$$\mathcal{L}x=f. \tag{5}$$

Имеем $(\mathcal{L}x)(t)\equiv\dot{x}(t)+(\mathcal{R}x)(t)$, $(\mathcal{R}x)(t)\equiv\int\limits_a^t x(s)\,d_s r(t,s)$, $t\ge a$. Оператор $\mathcal{R}$ называется *изотонным*, если для всякой неотрицательной функции v имеем $\mathcal{R}v\ge 0$. До сих пор речь шла об уравнениях с изотонным оператором $\mathcal{R}$.

В [3] (например, теорема 15.17) приводятся теоремы о сравнении решений уравнения (1) и соответствующего неравенства в случае *регулярного* оператора $\mathcal{R}$, т. е. представимого в виде разности двух изотонных. Как эти результаты соотносятся с теоремой 1, становится ясным, если заметить, что в доказательстве последней, приведенном в [4], изотонность оператора

$\mathcal{R}$ используется только для перехода от уравнения (5) к уравнению $\mathcal{L}^s x = 0$, где $s \geq a$ и оператор $\mathcal{L}^s$ определяется тождеством $(\mathcal{L}^s x)(t) \equiv \dot{x}(t) + \int\limits_s^t x(\tau)\, d_\tau r(t,\tau)$, $t \geq s$. Значит, если существует не одна функция v, а семейство положительных функций $\{v_s : [s,+\infty) \to (0,+\infty)\}$, $s \geq 0$, удовлетворяющих условиям, что $(\mathcal{L}^s v_s)(t) \leq 0$ при почти всех $t \geq s$, то для вывода о положительности функции Коши уравнения (5) не требуется изотонности оператора $\mathcal{R}$ — в силу вытекающего из формулы (2) соотношения

$$v_s(t) = C(t,s)v_s(s) + \int_s^t C(t,\tau)(\mathcal{L}^s v_s)(\tau)\, d\tau, \quad t \geq s \geq a.$$

Такое распространение теоремы 1 на уравнения с регулярным оператором $\mathcal{R}$ выглядит эффектно, но на практике малоэффективно. Чтобы получить содержательную оценку решения уравнения (5) на основании неравенства $\mathcal{L}v \leq 0$, нужно использовать функцию v, имеющую достаточно простой для исследования вид. Как правило, требуется естественное продолжение функции v на отрицательную полуось, а это ведет к изотонности оператора $\mathcal{R}$. Таким образом, эффективность оценки функции Коши трудно согласовать с точностью: неулучшаемую оценку получаем, взяв в качестве функции v решение однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$, но его положительность в силу формулы (2) равносильна положительности функции Коши, и достижение сводится к тавтологии.

К теореме о линейном функционально-дифференциальном неравенстве для уравнения (5) вернемся в разделе 3.

2. Оценка решения уравнения на промежутке

Простейшая из классических теорем о дифференциальном неравенстве говорит о следующем [13]. Пусть

$$\dot{x}(t) + f(t,x(t)) = 0, \quad \dot{y}(t) + f(t,y(t)) < 0, \quad t \in [a,b].$$

Тогда если для некоторого $t_0 \in [a,b]$ имеем $x(t_0) = y(t_0)$, то $x(t) < y(t)$ для всех $t \in [a,t_0)$ и $x(t) > y(t)$ для всех $t \in (t_0,b]$. Этот факт можно наглядно объяснить. Будем считать ради простоты, что функции x и y непрерывно дифференцируемы. Так как $\dot{x}(t_0) > \dot{y}(t_0)$, указанные неравенства выполняются в некоторой окрестности точки t_0. Если существует точная граница $t_1 \in [a,b]$ этой окрестности, то графики функций x и y касаются или пересекаются в точке t_1, а значит, $\dot{x}(t_1) \leq \dot{y}(t_1)$, что противоречит исходным условиям.

Оценка решений более сложных уравнений, чем $\dot{x}(t)+f(t,x(t)) = 0$, требует указания дополнительных условий. При повышении порядка уравнения длина промежутка, на котором устанавливается оценка решения, оказывается сколь угодно малой [1], а при перенесении приведенного выше утверждения на системы неравенств $\dot{x}_i + f_i(t,x_1,\dots,x_n) < 0$, $i = \overline{1,n}$, появляется требование неубывания функций f_i по аргументам x_j для всех $i \neq j$ [14]. Оба эффекта: уменьшение длины промежутка, на котором выполняется оценка, и требование неубывания оператора, определяющего уравнение, — возникают и тогда, когда дифференциальные неравенства применяются для оценки решений уравнений с последействием.

Как отмечено в статье [15], “те или иные условия монотонности входят во все теоремы о неравенствах, кроме классической теоремы Чаплыгина”. Такое условие естественно возникает уже в простейшей теореме, если заменить строгое неравенство нестрогим. Действительно, пусть

$$\dot{x}(t) + f(t, x(t)) = 0, \quad \dot{y}(t) + f(t, y(t)) \leq 0, \quad t \in [a, b],$$

и для некоторого $t_0 \in [a, b]$ имеем $x(t_0) = y(t_0)$. Тогда нельзя утверждать, что одна из функций x и y мажорирует другую на каком-то определенном промежутке. Если дополнительно потребовать неубывания функции f по второму аргументу, то справедливо следующее. Если $x(t) \not\equiv y(t)$, $t \in (t_0, b]$, то найдется такое $c \in (t_0, b)$, что $x(c) > y(c)$. Действительно, в противном случае найдется такое $d \in (t_0, b]$, что $x(d) < y(d)$, но

$$y(d) - x(d) = \int_{t_0}^{d} [\dot{y}(t) - \dot{x}(t)]\, dt \leq \int_{t_0}^{d} [f(t, x(t)) - f(t, y(t))]\, dt \leq 0.$$

Введем в уравнение последействие. Положим сначала

$$\dot{x}(t) + f(t, x(t-1)) = 0, \quad \dot{y}(t) + f(t, y(t-1)) \leq 0, \quad t \in [a-1, b].$$

Пусть $x(t_0) = y(t_0)$ для некоторого $t_0 \in [a, b]$, $x(t) \leq y(t)$ для всех $t \in [t_0 - 1, t_0)$ и функция f не убывает по второму аргументу. Тогда аналогично тому, как сделано выше, устанавливаем, что если $d \in (t_0, b] \cap (t_0, t_0 + 1]$, то

$$y(d) - x(d) = \int_{t_0}^{d} [\dot{y}(t) - \dot{x}(t)]\, dt \leq \int_{t_0}^{d} [f(t, x(t-1)) - f(t, y(t-1))]\, dt \leq 0.$$

В отличие от случая отсутствия запаздывания, здесь заключение о справедливости неравенства делается только для $t > t_0$ и для промежутка, длина которого не превосходит величины запаздывания, а неравенство для $t < t_0$ перенесено из заключения в посылку. Вопрос: если при сохранении прочих условий положить в уравнении и неравенстве переменное неограниченное снизу запаздывание, то можно ли говорить о справедливости неравенства на некотором промежутке (хотя бы сколь угодно малом) справа от точки t_0? Ниже покажем, что верен более сильный факт.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x} + \mathcal{F}x = 0, \tag{6}$$

и соответствующее неравенство

$$\dot{y} + \mathcal{F}y \leq 0. \tag{7}$$

Будем считать областью значений оператора $\mathcal{F}$ класс функций, суммируемых на отрезке $[a, b]$, а областью определения — класс функций, определенных на некотором множестве $M \supset [a, b]$ и абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$. Решениями уравнения (6) и неравенства (7) будем называть такие функции x и y соответственно из области определения оператора $\mathcal{F}$, что равенство $\dot{x}(t) + (\mathcal{F}x)(t) = 0$ и неравенство $\dot{y}(t) + (\mathcal{F}y)(t) \leq 0$ выполняются для почти всех $t \in [a, b]$.

Оператор $\mathcal{F}$ будем называть *изотонным*, если для любых функций φ и ψ (из его области определения) при $\varphi(t) \geq \psi(t)$ для всех $t \in M$ следует $(\mathcal{F}\varphi)(t) \geq (\mathcal{F}\psi)(t)$ для всех $t \in [a, b]$.

Общей основой для теорем о разрешенных относительно производной скалярных функционально-дифференциальных неравенствах является

Теорема 2. *Пусть оператор $\mathcal{F}$ изотонен, а решения x и y соответственно уравнения* (6) *и неравенства* (7) *таковы, что $x(a) = y(a)$ и $x(t) \leq y(t)$ при $t \notin [a, b]$. Тогда либо $x(t) = y(t)$ для всех $t \in [a, b]$, либо найдется такое $c \in [a, b]$, что $x(c) > y(c)$.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда $x(t) \le y(t)$ для всех $t \in [a,b]$ и найдется такое $c \in (a,b)$, что $x(c) < y(c)$. Следовательно, в силу изотонности оператора $\mathcal{F}$, для всех $t \in [a,b]$ имеем $(\mathcal{F}x)(t) \le (\mathcal{F}y)(t)$, а значит,

$$y(c) - x(c) = \int_a^c [\dot{y}(t) - \dot{x}(t)]\,dt \le \int_a^c [(\mathcal{F}x)(t) - (\mathcal{F}y)(t)]\,dt \le 0.$$

Противоречие. □

Обратим внимание, что в условиях теоремы 2 не предполагается ни линейность оператора $\mathcal{F}$, ни его эволюционность, т. е. независимость значений $(\mathcal{F}x)(t)$ от значений $x(\tau)$ при $\tau > t$. В следующем разделе рассмотрим уравнения вида (6) с оператором $\mathcal{F}$, обладающим этими свойствами.

3. Оценки решений уравнений с последействием

Далее полагаем, что оператор $\mathcal{F}$ определен в соответствии с условиями, указанными в предыдущем разделе, и, кроме того, $M \subset \mathbb{R}$, т. е. область определения оператора $\mathcal{F}$ — некоторое множество функций вещественной переменной.

Оператор $\mathcal{F}$ называется *вольтерровым*, если для любых функций x и y из его области определения и любого такого $c \in (a,b]$, что при всех $t \le c$ имеет место равенство $x(t) = y(t)$, а для почти всех $t \in [a,c]$ имеет место равенство $(\mathcal{F}x)(t) = (\mathcal{F}y)(t)$. Уравнение (6) с вольтерровым оператором $\mathcal{F}$ является дифференциальным уравнением с последействием.

Непосредственно из данного определения и теоремы 2 получаем

Следствие. Пусть оператор $\mathcal{F}$ изотонен и вольтерров, а решения x и y соответственно уравнения (6) и неравенства (7) таковы, что $x(a) = y(a)$ и $x(t) \le y(t)$ при $t \le a$. Тогда если $x(c) < y(c)$ для некоторого $c \in [a,b]$, то найдется такое $d \in (a,c)$, что $x(d) > y(d)$.

В отличие от теоремы 1 теорема 2 и следствие говорят о локальных свойствах решений уравнений — оценках решений не на всей области определения, а на малом промежутке. Установив их, возвращаемся к оценке решений на полуоси.

3.1. *Оценка функции Коши линейного уравнения на полуоси.* В данном подразделе установим оценку функции Коши уравнения (6) с линейным вольтерровым оператором $\mathcal{F}$.

Определим оператор $\mathcal{L}$ тождеством

$$\mathcal{L}\varphi(t) \equiv \dot{\varphi} + \mathcal{F}\varphi(t), \quad t \in [a,+\infty), \tag{8}$$

где оператор $\mathcal{F}$ линеен и вольтерров, функция φ определена на множестве $M \supset [a,+\infty)$ и абсолютно непрерывна на каждом конечном промежутке полуоси $[a,+\infty)$.

Будем считать, что *задача Коши*

$$\mathcal{L}x = f, \quad x(a) = x_a, \tag{9}$$

однозначно разрешима для любых заданных начальном значении $x_a \in \mathbb{R}$ и суммируемой на каждом конечном промежутке функции $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$, а решение задачи (9) представляется формулой (2).

Обозначим $\Delta = \{(t,s) : a \le s \le t\}$. Для каждого $s \in [a,+\infty)$ определим операторы $\mathcal{F}^s$ и $\mathcal{L}^s$ тождествами

$$\mathcal{L}^s\varphi \equiv \dot{\varphi}^s + \mathcal{F}^s\varphi; \quad (\mathcal{F}^s\varphi)(t) \equiv (\mathcal{F}\varphi^s)(t), \quad \text{где} \ \ \varphi^s(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \ge s; \\ 0, & \varphi < s. \end{cases}$$

В соответствии с определением функции Коши $C : \Delta \to \mathbb{R}$ уравнения (5) как решения задачи (3) положим $C(t,s) \equiv C_s(t)$, где для каждого $s \in [a,+\infty)$ функция одной переменой C_s есть решение задачи Коши

$$\dot{C}_s(t) + (\mathcal{L}^s C_s)(t) = 0, \quad t \geq s; \quad C_s(s) = 1. \tag{10}$$

Следующее утверждение, в сущности очень близкое теореме 1, может применяться к уравнению (5), не приведенному к виду (1).

Теорема 3. *Пусть оператор $\mathcal{F}$ изотонен и существует такая функция v из области определения M оператора $\mathcal{L}$, определенного тождеством* (8)*, что $v(t) > 0$ при всех $t \geq a$, $(\mathcal{L}v)(t) \leq 0$ при почти всех $t \geq a$ и $v(t) \geq 0$ при всех $t \notin [a,+\infty)$. Тогда функция Коши $C(t,s)$ уравнения* (5) *подчинена оценке*

$$C(t,s) \geq v(t)/v(s), \quad (t,s) \in \Delta. \tag{11}$$

Доказательство. Если в условиях теоремы оценка (11) нарушается, то найдется такая пара $(t,s) \in \Delta$, что $0 < C(t,s) < \frac{v(t)}{v(s)}$. Действительно, пусть $C(t_1,s_1) \leq 0$ для некоторой пары $(t_1,s_1) \in \Delta$. Тогда в силу непрерывности функции Коши по первому аргументу и функции v на полуоси $[a,+\infty)$, а также в силу $C(s_1,s_1) = 1 > 0$ найдется такое $t_2 \in (s_1,t_1)$, что

$$0 < C(t_2,s_1) < \frac{v(t_2)}{v(s_1)}.$$

Таким образом, достаточно доказать справедливость неравенства (11) для произвольной пары $(t,s) \in \Delta$ такой, что $C(t,s) > 0$. Положим $x(\tau) = C(\tau,s)$, $\tau \geq s$.

В силу непрерывности функций x и v и положительности функции v на отрезке $[s,t]$, найдется такое $k > 0$, что $kv(\tau) > x(\tau)$, $\tau \in [s,t]$. Значит, существует конечное значение $k_0 = \sup\{k : \exists \tau \in [s,t](x(\tau) > kv(\tau))\}$.

Существует также число $t_0 = \inf\{\tau \in [s,t] : k_0 v(\tau) = x(\tau)\}$, так как непрерывная функция $(k_0 v - x)$ достигает на отрезке $[s,t]$ своей точной нижней грани — нуля.

Можно применить следствие теоремы 2, рассматривая в качестве отрезка $[a,b]$ отрезок $[t_0,t]$, в качестве функций x и y — соответственно функции x^s и $k_0 v^s$, где

$$x^s(t) = \begin{cases} x(t), & t \geq s; \\ 0, & x < s, \end{cases} \qquad v^s(t) = \begin{cases} v(t), & t \geq s; \\ 0, & y < s, \end{cases}$$

а в качестве оператора $\mathcal{F}$ — оператор $\mathcal{F}^s$. Действительно, оператор $\mathcal{F}^s$ изотонен и вольтерров, функция x^s является решением уравнения $\dot{x} + \mathcal{F}^s x = 0$ в силу определения (10) функции Коши, а функция $k_0 v^s$ является решением неравенства $\dot{y} + \mathcal{F}^s y \leq 0$, поскольку $\mathcal{L}^s v \leq \mathcal{L} v \leq 0$ в силу изотонности оператора $\mathcal{F}$; по определению значения k_0 имеем $k_0 v^s(\tau) \geq x^s(\tau)$, $\tau \in [s,t]$.

Таким образом, получаем $x(\tau) = k_0 v(\tau)$, $\tau \in [t_0,t]$. В частности, $x(t) = k_0 v(t)$, откуда следует оценка (11). $\square$

3.2. *Оценка решений методом test-уравнений.* В заключение рассмотрим основанный на свойствах дифференциальных неравенств *метод test-уравнений*, разрабатываемый как средство получения эффективных признаков устойчивости и знакоопределенности решений уравнений с последействием.

Идея метода состоит в том, что в исследуемом семействе уравнений находится такое достаточно простое уравнение, что если его решения удовлетворяют нужной оценке, то и решения всех уравнений семейства удовлетворяют ей.

Подробно с методом test-уравнений и полученными с его помощью результатами можно ознакомиться по цитируемым ниже работам, поэтому здесь ограничимся иллюстрацией работы метода на примере простого доказательства классического результата А.Д. Мышкиса [16].

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t - r(t)) = 0, \quad t \geq 0. \tag{12}$$

Пусть выбраны положительные числа α и ω. Рассмотрим семейство уравнений, удовлетворяющих условиям $0 \leq a(t) \leq \alpha$, $0 \leq r(t) \leq \omega$, $t \geq 0$.

Для простоты положим $\alpha = 1$.

Обозначим $(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) + (\mathcal{F}x)(t) \equiv \dot{x}(t) + a(t)x(t - r(t))$ и $C_\tau(t) \equiv C(t, \tau)$, где C — функция Коши уравнения (12).

Определим функцию

$$y(t) = \begin{cases} 1, & t < 0; \\ 1 - \int\limits_0^t y(s - 3/2)\, ds, & t \geq 0. \end{cases}$$

Заметим, что она убывает на интервале $(0, 5/2)$ и $y(1) = 0$.

Определим семейство функций $\{y_s : [s - \omega, +\infty) \to \mathbb{R}\}_{s \geq 0}$, где $y_s(t) \equiv y(t - s)$, $t \geq s - \omega$.

Пусть $\omega \leq 3/2$. Покажем, что если для некоторого $\tau \geq 0$ и $s \geq \tau$ имеем $|C_\tau(t)| \leq 1$ при всех $t \in [s - 5/2 - \omega, s]$, то $C_\tau(t) \geq -1$ при всех $t > s$. Действительно, пусть $C_\tau(t_0) = -1$ для некоторого $t_0 \geq s$ и $|C_\tau(t)| \leq 1$ при $t \in [t_0 - 5/2 - \omega, t_0]$. Рассмотрим "самую правую" из функций y_s, имеющих с функцией C_τ равные значения на промежутке $[t_0 - 5/2, t_0]$. Согласно следствию теоремы 2 такой может являться только функция $y_{t_0 - 5/2}$. Следовательно, для всех t из некоторой правой окрестности точки t_0 имеем $C_\tau(t - r(t)) \leq y_{t_0 - 5/2}(t - 3/2) < 0$, т. е. $\dot{C}_\tau(t) > 0$. Таким образом, $C_\tau(t) \geq -1$ для всех $t \geq t_0$, а значит, для всех $t \geq s$. Аналогично с использованием функций $(-y_s)$ рассматривается случай $C_\tau(t_0) = 1$.

Таким образом, при $\alpha \leq 1$, $\omega \leq 3/2$ все решения уравнения (12) ограничены.

Чтобы аналогично рассмотреть случай произвольного $\alpha > 0$, необходимо в определении функции y вместо $\int\limits_0^t y(s - 3/2) ds$ положить $\alpha \int\limits_0^t y(s - 3/(2\alpha)) ds$.

Полученная оценка является точной, поскольку решения уравнения (12) неограничены, если $a(t) \equiv 1$, $\omega > 3/2$ и

$$r(t) = \begin{cases} t - n(\omega + 1), & t \in [n(\omega + 1), n(\omega + 1) + \omega); \\ \omega, & t \in [n(\omega + 1) + \omega, (n + 1)(\omega + 1)). \end{cases}$$

Метод test-уравнений был впервые использован в работе [17], посвященной эффективным признакам устойчивости уравнения $\dot{x}(t) = a_0 x(t) + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x(t - r_k(t))$. В более общих предположениях асимптотические свойства решений этого уравнения были исследованы в работах [18]–[20]. В частности, в статье [18] доказаны (с неявным использованием следствия теоремы 2) лежащие в основе применения метода утверждения. Изложение ведется применительно к исследуемому классу уравнений, но в предположении, что основные теоремы могут быть перенесены на другие классы уравнений. Некоторые аналогичные результаты для разностных уравнений получены в статье [21]. В работе [22] метод был применен для исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием.

Литература

[1] Чаплыгин С.А. *Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений* (Гостехиздат, М.–Л., 1950).

[2] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений* (Наука, М., 1991).

[3] Agarwal R.P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A. *Nonoscillation theory of functional differential equations with applications* (Springer, New York–Dordrecht–Heidelberg–London, 2012).

[4] Азбелев Н.В., Симонов П.М. *Устойчивость уравнений с обыкновенными производными* (Изд-во Пермск. ун-та, Пермь, 2001).

[5] Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *О представлении решения линейного функционально-дифференциального уравнения*, Дифференц. уравнения **9** (6), 1026–1036 (1973).

[6] Азбелев Н.В., Симонов П.М. *Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом*, Изв. вузов. Матем., № 6, 3–16 (1997).

[7] Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. *Задача Коши для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*, Дифференц. уравнения **8** (9), 1542–1552 (1972).

[8] Зубко Ю.И., Тышкевич В.А. *К вопросу о положительности функции Коши*, Дифференц. уравнения **9** (7), 1207–1214 (1973).

[9] Гусаренко С.А., Домошницкий А.И. *Об асимптотических и осцилляционных свойствах линейных скалярных функционально-дифференциальных уравнений первого порядка*, Дифференц. уравнения **25** (12), 2090–2103 (1989).

[10] Малыгина В.В., Сабатулина Т.Л. *Знакоопределенность решений и устойчивость линейных дифференциальных уравнений с переменным распределенным запаздыванием*, Изв. вузов. Матем., № 8, 73–77 (2008).

[11] Сабатулина Т.Л. *Признаки положительности функции Коши дифференциального уравнения с распределенным запаздыванием*, Изв. вузов. Матем., № 11, 50–62 (2010).

[12] Berezansky L., Braverman E. *On oscillations of equations with distributed delay*, Z. Anal. Anwend. **20**, 489–504 (2001).

[13] Petrovitsch M. *Sur une manière d'étendre le théorème de la moyence aux équations différentielles du premier ordre*, Math. Ann. **54** (3), 417–436 (1901).

[14] Ważewski T. *Systèmes des équations et des inégalites différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Polon. Math. **23**, 112–166 (1950).

[15] Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. *К вопросу о функционально-дифференциальных неравенствах и монотонных операторах*, в сб. "Функционально-дифференциальные уравнения" (Пермь, 1986), с. 3–9.

[16] Мышкис А.Д. *О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом*, Матем. сб., № 3, 641–658 (1951).

[17] Малыгина В.В. *Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с последействием*, Изв. вузов. Матем., № 5, 72–85 (1993).

[18] Малыгина В.В., Чудинов К.М. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями.* I, Изв. вузов. Матем., № 6, 25–36 (2013).

[19] Малыгина В.В., Чудинов К.М. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями.* II, Изв. вузов. Матем., № 7, 3–15 (2013).

[20] Малыгина В.В., Чудинов К.М. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями.* III, Изв. вузов. Матем., № 8, 44-56 (2013).

[21] Куликов А.Ю., Малыгина В.В. *Об устойчивости полуавтономных разностных уравнений*, Изв. вузов. Матем., № 5, 25–34 (2011).

[22] Сабатулина Т.Л., Малыгина В.В. *Об устойчивости линейного дифференциального уравнения с ограниченным последействием*, Изв. вузов. Матем., № 4, 25–42 (2014).

К.М. Чудинов

доцент, кафедра вычислительной математики и механики,
Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Комсомольский пр., д. 29, г. Пермь, 614990, Россия,

`e-mail:` cyril@list.ru

K.M. Chudinov

Functional differential inequalities and estimation of the Cauchy function of an equation with aftereffect

Abstract. We consider scalar functional differential inequalities that are used to estimate solutions of differential equations with deviating argument. A theorem on positiveness of the Cauchy function of a differential equation with aftereffect is derived from a theorem on a functional differential inequality with nonlinear monotone operator, which is a direct generalization of the simplest classical theorem on a differential inequality. The suggested proofs rely on local properties of continuous functions, only.

Keywords: differential inequality, equation with aftereffect, estimate of solution, stability, test equation.

K.M. Chudinov

Associate Professor, Chair of Computational Mathematics and Mechanics,
Perm National Research Polytechnic University,
29 Komsomol'skii Ave, Perm, 614990 Russia,

`e-mail:` cyril@list.ru