Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. В. Егорова, Оптимизация дисконтированного дохода для структурированной популяции, подверженной промыслу,
Вестник российских университетов. Математика, 2021, том 26, выпуск 133, 15–25

https://www.mathnet.ru/vtamu212

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.81
23 мая 2025 г., 08:31:22

ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 133 2021

© Егорова А.В., 2021
DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-15-25
УДК 517.929

OPEN ACCESS
CC BY

Оптимизация дисконтированного дохода для структурированной популяции, подверженной промыслу

Анастасия Владимировна ЕГОРОВА
ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых»
600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87

Optimization of discounted income for a structured population exposed to harvesting

Anastasia V. EGOROVA
Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs
87 Gorky St., Vladimir 600000, Russian Federation

Аннотация. Рассматривается структурированная популяция, особи которой разделены на n возрастных или типических групп $x_1, \ldots, x_n$. Предполагаем, что в любой момент времени k, $k = 0, 1, 2 \ldots$ численность популяции $x(k)$ определяется как решение нормальной автономной системы разностных уравнений $x(k+1) = F\bigl(x(k)\bigr)$, где $F(x) = \operatorname{col}\bigl(f_1(x), \ldots, f_n(x)\bigr)$ — заданные векторные функции с вещественными неотрицательными компонентами $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$. Исследуется случай, когда имеется возможность влиять на размер популяции путем промыслового изъятия. В работе рассмотрена модель эксплуатируемой популяции в виде

$$x(k+1) = F\bigl((1 - u(k))x(k)\bigr),$$

где вектор $u(k) = \bigl(u_1(k), \ldots, u_n(k)\bigr) \in [0,1]^n$ — управление, выбором которого можно достигать увеличения показателей сбора ресурса. Предполагается, что стоимости условной единицы каждого из рассматриваемых n классов постоянны и равны $C_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$. Для определения стоимости ресурса, получаемого в результате промысла, в рассмотрение вводится функция дисконтированного дохода, которая имеет вид

$$H_\alpha\bigl(\overline{u}, x(0)\bigr) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j},$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент дисконтирования. Решается задача построения управлений на конечном и бесконечном промежутках времени, при которых дисконтированный доход от извлечения возобновляемого ресурса достигает наибольшего значения. В качестве следствий получены результаты о построении оптимального способа добычи однородной популяции (т. е. при $n = 1$).

Ключевые слова: структурированная популяция; задача оптимизации для средней временной выгоды; дисконтированный доход; оптимальная эксплуатация; режим эксплуатации популяции

Для цитирования: *Егорова А.В.* Оптимизация дисконтированного дохода для структурированной популяции, подверженной промыслу // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 133. С. 15–25. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-15-25.

Abstract. A structured population the individuals of which are divided into n age or typical groups $x_1, \dots, x_n$ is considered. We assume that at any time moment k, $k = 0, 1, 2\dots$ the size of the population $x(k)$ is determined by the normal autonomous system of difference equations $x(k+1) = F\big(x(k)\big)$, where $F(x) = \operatorname{col}\big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big)$ are given vector functions with real non-negative components $f_i(x)$, $i = 1, \dots, n.$ We investigate the case when it is possible to influence the population size by means of harvesting. The model of the exploited population under discussion has the form

$$x(k+1) = F\big((1 - u(k))x(k)\big),$$

where $u(k) = \big(u_1(k), \dots, u_n(k)\big) \in [0,1]^n$ is a control vector, which can be varied to achieve the best result of harvesting the resource. We assume that the cost of a conventional unit of each of n classes is constant and equals to $C_i \geqslant 0$, $i = 1, \dots, n.$ To determine the cost of the resource obtained as the result of harvesting, the discounted income function is introduced into consideration. It has the form

$$H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j},$$

where $\alpha > 0$ is the discount coefficient. The problem of constructing controls on finite and infinite time intervals at which the discounted income from the extraction of a renewable resource reaches the maximal value is solved. As a corollary, the results on the construction of the optimal harvesting mode for a homogeneous population are obtained (that is, for $n = 1$).

Keywords: structured population; optimization problem for the average temporary gain; discounted income; optimal exploitation; mode of exploitation of the population

For citation: Egorova A.V. Optimizatsiya diskontirovannogo dokhoda dlya strukturirovannoy populyatsii, podverzhennoy promyslu [Optimization of discounted income for a structured population exposed to harvesting]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 133, pp. 15–25. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-133-15-25. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Проблема рационального использования возобновляемых природных ресурсов остается актуальной на протяжении многих лет. Подтверждением этому является большое количество работ, посвященных исследованию динамики популяций: предложено большое количество математических моделей, предназначенных как для чисто теоретических, так и для численных исследований, опирающихся на данные реальных популяций [1]. Многие работы посвящены исследованиям развития структурированных популяций, разделенных на возрастные группы или типические группы; в частности, в [2, 3] рассмотрены задачи оптимальной эксплуатации с постоянной долей изъятия.

В настоящее время большой интерес вызывают задачи оптимального сбора возобновляемого ресурса в вероятностных моделях. Эти исследования, мотивированные современными задачами экологии и экономики, являются также источником новых задач в математической теории управления и оптимизации. В работах [4, 5] рассматриваются модели сбора возобновляемого ресурса, описанные дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями; определен способ добычи такого ресурса в долгосрочной перспективе, при котором сохраняется часть популяции, и приведена оценка функции средней временной выгоды. Обзор литературы, посвященной данной тематике, приведен в [6].

Модели периодического сбора ресурса предложены и исследованы в [7–9] и ряде других работ. В [7] предполагается, что периодический сбор осуществляется достаточно быстро и описывается импульсным воздействием, а возобновляемый ресурс имеет логистический закон роста. В [8] исследуется задача оптимизации для циклического сбора ресурса, распределенного на окружности с заданной плотностью. В [9] рассмотрена актуальная для математической экономики задача максимизации чистого дисконтированного дохода от эксплуатации популяции. Показано, что периодический сбор ресурса является оптимальным для моделей динамики популяций, структурированных по возрасту.

В данной статье рассматривается модель динамики структурированной популяции, разделенной на возрастные или типические группы и подверженной промыслу. Исследуется задача определения оптимального сбора ресурса на конечном и бесконечном промежутках времени при заданных ограничениях на условия промысла, для которого функция дисконтированного дохода максимальна.

1. Дисконтированный доход для моделей структурированных популяций, заданных нормальной автономной системой разностных уравнений

Рассмотрим популяцию, состоящую из $n \geqslant 2$ видов или возрастных групп $x_1, \ldots, x_n$. Модель данной популяции исследовалась в работе [10]; приведем описание этой модели для полноты изложения.

Стандартно обозначим $R^n_+ \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0\}$ — конус неотрицательных векторов в $\mathbb{R}^n$, $C^2(\mathbb{R}^n_+)$ — класс функций, определенных на R^n_+ и имеющих непрерывные производные до второго порядка включительно. Обозначим через $x_i(k)$, $i = 1, \ldots, n$ количество ресурса каждого класса в момент времени $k = 0, 1, 2, \ldots$. Динамику популяции при отсутствии эксплуатации будем описывать следующей системой нелинейных разностных уравнений

$$x(k+1) = F\big(x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

где $x(k) = \mathrm{col}\big(x_1(k), \ldots, x_n(k)\big) \in R^n_+$, $F(x) = \mathrm{col}\big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big)$. Будем предполагать, что функции $f_i \in C^2(\mathbb{R}^n_+)$ удовлетворяют условию $f_i(0) = 0$ и матрица Якоби $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ является невырожденной для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$. Будем также предполагать, что для некоторой области $I \subseteq \mathbb{R}^n_+$ такой, что $0 \in I$, выполнено включение $F(I) \subseteq I$. Это условие обеспечивает продолжаемость решения системы (1.1) в области I.

Здесь и везде далее в работе в скобках обозначены временны́е параметры, а нижними индексами — пространственные параметры.

Обозначим через $u_i(k)$ долю ресурса i-го вида, добытого в момент $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Очевидно, что $u_i(k) \in [0, 1]$. Определим вектор

$$U \doteq \big\{\overline{u} : \overline{u} = \big(u(0), u(1), \ldots, u(k), \ldots\big)\big\},$$

где $u(k) = \big(u_1(k), \ldots, u_n(k)\big) \in [0, 1]^n$ и рассмотрим последовательность $\overline{u} \in U$ как управление, которым можно варьировать для достижения лучшего результата сбора ресурса. Полагая, что $x_i(k)$ — количество ресурса i-го вида перед сбором в момент k, а $(1-u_i(k))x_i(k)$ — количество ресурса, оставшееся после сбора, запишем модель популяции, подверженной промыслу, в виде системы

$$x(k+1) = F\big((1-u(k))x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.2}$$

где $(1-u(k))x(k) \doteq \mathrm{col}\big((1-u_1(k))x_1(k), \ldots, (1-u_n(k))x_n(k)\big)$.

Положим $\widetilde{x}(k) \doteq (1-u(k))x(k)$ и запишем систему (1.2) в эквивалентной форме

$$\widetilde{x}(k+1) = (1-u(k+1))F\big(\widetilde{x}(k)\big), \quad k = 0,1,2,\ldots.$$

Будем предполагать что стоимости единицы каждого из классов добываемой продукции постоянны и равны $C_i \geqslant 0$, $i = 1,\ldots,n$ (естественно считаем, что одновременно все C_i не могут обращаться в 0). Стоимость всей продукции в момент времени j будем определять формулой

$$h_\alpha(j) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j},$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент дисконтирования. Определим функцию

$$H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big) \doteq \sum_{j=0}^{\infty} h_\alpha(j) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j}, \tag{1.3}$$

аргументов $\overline{u} \in U$ и $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$, которую назовем *дисконтированным доходом* от извлечения ресурса.

Стоит отметить, что в работе [10] рассматриваются задачи оптимизации для средней временной выгоды, заданной в виде

$$H\big(\overline{u}, x(0)\big) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j).$$

2. Оптимальный режим промысла структурированной популяции на конечном промежутке времени

Обозначим $\overline{u}(k) \doteq (u(0),\ldots,u(k-1))$ для всех $k = 1,2,\ldots$, где, как и выше, полагаем $u(j) = (u_1(j),\ldots,u_n(j)) \in [0,1]^n$, $j = 0,\ldots,k-1$. Определим функцию

$$H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big) = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j}, \tag{2.1}$$

равную стоимости ресурса, полученного в результате k сборов.

Следующая теорема определяет оптимальный режим сборов для достижения максимума функции $H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big)$. Отметим, что близкий результат получен в [10, теорема 1], где рассматривалась задача максимизации функции

$$H\big(\overline{u}(k), x(0)\big) = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j).$$

Теорема 2.1. *Пусть функция* $D(x) \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x) - x_i e^{\alpha}\big)$ *достигает максимального значения в единственной точке* $x^* \in \mathbb{R}^n_+$, *координаты которой удовлетворяют неравенству* $x_i^* \leqslant f_i(x^*) \neq 0$, $i = 1,\ldots,n$. *Тогда для любого* $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ *такого, что* $x_i(0) \geqslant x_i^*$, $i = 1,\ldots,n$, *функция* $H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big)$ *достигает наибольшего значения*

$$H_\alpha\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big) = D(x^*)\frac{e^{-\alpha(k-1)} - 1}{1 - e^{\alpha}} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) \tag{2.2}$$

на множестве $[0,1]^{kn}$ *при следующем значении* $\overline{u}^*(k)$ *(определяющем режим эксплуатации):*
если $k=1$, *то* $\overline{u}^*(1)=(u^*(0))$, *где* $u^*(0)=(1,\dots,1)$;
если $k=2$, *то* $\overline{u}^*(2)=\big(u^*(0),u^*(1)\big)$, *где* $u^*(0)=\Big(1-\dfrac{x_1^*}{x_1(0)},\dots,1-\dfrac{x_n^*}{x_n(0)}\Big)$,
$u^*(1)=(1,\dots,1)$;
если $k\geqslant 3$, *то* $\overline{u}^*(k)=\big(u^*(0),\dots,u^*(k-1)\big)$, *где* $u^*(0)=\Big(1-\dfrac{x_1^*}{x_1(0)},\dots,1-\dfrac{x_n^*}{x_n(0)}\Big)$,
$u^*(j)=\Big(1-\frac{x_1^*}{f_1(x^*)},\dots,1-\frac{x_n^*}{f_n(x^*)}\Big)$ *при* $j=1,\dots,k-2$, $u^*(k-1)=(1,\dots,1)$.

Доказательство. В случае $k=1$ функция H_α принимает вид

$$H_\alpha\big(\overline{u}(1),x(0)\big)=\sum_{i=1}^n C_i x_i(0)u_i(0).$$

Очевидно, что ее максимальное значение достигается при $u^*(0)=(1,\dots,1)$ и равно

$$H_\alpha\big(\overline{u}^*(1),x(0)\big)=\sum_{i=1}^n C_i x_i(0).$$

При $k\geqslant 2$ рассмотрим режим эксплуатации $\overline{u}^*(k)=\big(u^*(0),\dots,u^*(k-1)\big)$, определенный в условии теоремы. Найдем

$$x(1)=F\big((1-u^*(0))x(0)\big)=F\Big(\frac{x_1^*}{x_1(0)}x_1(0),\dots,\frac{x_n^*}{x_n(0)}x_n(0)\Big)=F(x^*). \tag{2.3}$$

Если $k\geqslant 3$, то для любого $j=2,\dots,k-1$

$$x(j)=F\big((1-u^*(j-1))x(j-1)\big)=F\Big(\frac{x_1^*}{f_1(x^*)}f_1(x^*),\dots,\frac{x_n^*}{f_n(x^*)}f_n(x^*)\Big)=F(x^*). \tag{2.4}$$

Подставляя значения $x(1),\dots,x(k-1)$ и $\overline{u}^*(k)$ в (2.1), получаем равенство (2.2).

Зафиксируем $x(0)\in\mathbb{R}_+^n$ такое, что $x_i(0)\geqslant x_i^*$, $i=1,\dots,n$ и докажем, что

$$H_\alpha\big(\overline{u}(k),x(0)\big)\leqslant H_\alpha\big(\overline{u}^*(k),x(0)\big)=D(x^*)\frac{e^{-\alpha(k-1)}-1}{1-e^{\alpha}}+\sum_{i=1}^n C_i x_i(0) \tag{2.5}$$

для любых $\overline{u}(k)\in[0,1]^{kn}$. Стоит отметить, что $D(x)$ достигает максимального значения в точке $x^*\in\mathbb{R}_+^n$, поэтому для всех $\Delta x=(\Delta x_1,\dots,\Delta x_n)\in\mathbb{R}^n$ таких, что $x^*+\Delta x\in\mathbb{R}_+^n$, выполнено неравенство $D(x^*+\Delta x)\leqslant D(x^*)$, которое равносильно

$$\sum_{i=1}^n C_i\big(f_i(x^*+\Delta x)-(x_i^*+\Delta x_i)e^{\alpha}\big)\leqslant\sum_{i=1}^n C_i\big(f_i(x^*)-x_i^*e^{\alpha}\big).$$

Из последнего неравенства получаем

$$\sum_{i=1}^n C_i f_i(x^*+\Delta x)\leqslant\sum_{i=1}^n C_i\big(f_i(x^*)+\Delta x_i e^{\alpha}\big). \tag{2.6}$$

Представим $u(j) \in [0,1]^n$ в виде $u(j) = u^*(j) + \Delta u(j)$, $\Delta u(j) = \big(\Delta u_1(j), \dots, \Delta u_n(j)\big)$, $j = 0, \dots, k-1$. Найдем

$$H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big) \doteq \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j} = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j)\big(u_i^*(j) + \Delta u_i(j)\big)e^{-\alpha j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j)(u_i^*(j) + \Delta u_i(j))e^{-\alpha j} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-1)(1 + \Delta u_i(k-1))e^{-\alpha(k-1)}. \quad (2.7)$$

Оценим последнее слагаемое в (2.7). Поскольку $u^*(k-1) = (1, \dots, 1)$, то $\Delta u_i(k-1) \leqslant 0$ для всех $i = 1, \dots, n$ и

$$\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-1)(1 + \Delta u_i(k-1))e^{-\alpha(k-1)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-1)e^{-\alpha(k-1)}. \quad (2.8)$$

Пусть $k = 2$, тогда из (2.8) получаем

$$H_\alpha\big(\overline{u}(2), x(0)\big) \doteq \sum_{j=0}^{1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0)\big(u_i^*(0) + \Delta u_i(0)\big) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(1)\big(1 + \Delta u_i(1)\big)e^{-\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0)\Big(1 - \frac{x_i^*}{x_i(0)} + \Delta u_i(0)\Big) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(1)e^{-\alpha} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) - \sum_{i=1}^{n} C_i x_i^* + \sum_{i=1}^{n} C_i \Delta u_i(0) x_i(0) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(1)e^{-\alpha}. \quad (2.9)$$

Найдем

$$x(1) = F\big((1 - u(0))x(0)\big) = F\big((1 - u_1(0))x_1(0), \dots, (1 - u_n(0))x_n(0)\big) =$$

$$= F\Big(\Big(\frac{x_1^*}{x_1(0)} - \Delta u_1(0)\Big)x_1(0), \dots, \Big(\frac{x_n^*}{x_n(0)} - \Delta u_n(0)\Big)x_n(0)\Big) =$$

$$= F\big(x_1^* - \Delta u_1(0)x_1(0), \dots, x_n^* - \Delta u_n(0)x_n(0)\big) = F(x^* - \Delta u(0)x(0)). \quad (2.10)$$

Тогда из (2.6) следует

$$\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(1)e^{-\alpha} = e^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n} C_i f_i\big(x^* - \Delta u(0)x(0)\big) \leqslant e^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x^*) - \Delta u_i(0)x_i(0)e^{\alpha}\big). \quad (2.11)$$

Таким образом, из (2.9) и (2.11) имеем

$$H_\alpha\big(\overline{u}(2), x(0)\big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) - \sum_{i=1}^{n} C_i x_i^* + \sum_{i=1}^{n} C_i \Delta u_i(0) x_i(0) + \sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x^*)e^{-\alpha} - \Delta u_i(0)x_i(0)\big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x^*)e^{-\alpha} - x_i^*\big) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) = e^{-\alpha}D(x^*) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) = H_\alpha\big(\overline{u}^*(2), x(0)\big), \quad (2.12)$$

т. е. (2.2) выполнено.

Затем, если $k \geqslant 3$, то

$$u(k-2) = u^*(k-2)+\Delta u(k-2) = \Big(1-\frac{x_1^*}{f_1(x^*)}+\Delta u_1(k-2), \ldots, 1-\frac{x_n^*}{f_n(x^*)}+\Delta u_n(k-2)\Big), \quad (2.13)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} x(k-1) &= F\big((1-u(k-2))x(k-2)\big) = \\ &= F\Big(\Big(\frac{x_1^*}{f_1(x^*)} - \Delta u_1(k-2)\Big)x_1(k-2), \ldots, \Big(\frac{x_n^*}{f_n(x^*)} - \Delta u_n(k-2)\Big)x_n(k-2)\Big). \quad (2.14) \end{aligned}$$

Пусть $\Delta x(k-2) \doteq \big(\Delta x_1(k-2), \ldots, \Delta x_n(k-2)\big)$, где

$$\Delta x_i(k-2) = \Big(\frac{x_i^*}{f_i(x^*)} - \Delta u_i(k-2)\Big)x_i(k-2) - x_i^*. \quad (2.15)$$

Тогда $x(k-1) = F(x^* + \Delta x(k-2))$ и $x_i(k-1) = f_i(x^* + \Delta x(k-2))$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, учитывая (2.6), получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-1)e^{-\alpha(k-1)} = \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i\big(x^* + \Delta x(k-2)\big)e^{-\alpha(k-1)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x^*) + \Delta x_i(k-2)e^{\alpha}\big)e^{-\alpha(k-1)} = \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n} C_i\Big(f_i(x^*) + \Big(\frac{x_i^*}{f_i(x^*)} - \Delta u_i(k-2)\Big)x_i(k-2)e^{\alpha} - x_i^* e^{\alpha}\Big)e^{-\alpha(k-1)} = \\ &\quad = D(x^*)e^{-\alpha(k-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i\Big(\frac{x_i^*}{f_i(x^*)} - \Delta u_i(k-2)\Big)x_i(k-2)e^{-\alpha(k-2)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j)u_i(j)e^{-\alpha j} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-1)e^{-\alpha(k-1)} \leqslant \\ &\quad \leqslant \sum_{j=0}^{k-3}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j)u_i(j)e^{-\alpha j} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-2)\Big(1 - \frac{x_i^*}{f_i(x^*)} + \Delta u_i(k-2)\Big)e^{-\alpha(k-2)} + \\ &\quad + D(x^*)e^{-\alpha(k-1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i\Big(\frac{x_i^*}{f_i(x^*)} - \Delta u_i(k-2)\Big)x_i(k-2)e^{-\alpha(k-2)} = \\ &\quad = D(x^*)e^{-\alpha(k-1)} + \sum_{j=0}^{k-3}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j)u_i(j) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-2)e^{-\alpha(k-2)}. \quad (2.16) \end{aligned}$$

Далее, из (2.8), (2.12) и (2.16) (при $k \geqslant 3$) следуют неравенства

$$\begin{aligned} H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big) &\doteq \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-1) e^{-\alpha(k-1)} \leqslant \\ &\leqslant D(x^*) e^{-\alpha(k-1)} + \sum_{j=0}^{k-3}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-2) e^{-\alpha(k-2)} \leqslant \\ &\leqslant D(x^*)\big(e^{-\alpha(k-1)} + e^{-\alpha(k-2)}\big) + \sum_{j=0}^{k-4}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(k-3) e^{-\alpha(k-3)} \leqslant \ldots \leqslant \\ &\leqslant D(x^*) \sum_{j=2}^{k-1} e^{-\alpha j} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) u_i(0) + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(1) e^{-\alpha} \leqslant \\ &\leqslant D(x^*) \sum_{j=1}^{k-1} e^{-\alpha j} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) = D(x^*) \frac{e^{-\alpha(k-1)} - 1}{1 - e^{\alpha}} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0) = H_\alpha\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big). \end{aligned}$$

Следовательно, $H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big) \leqslant H_\alpha\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big)$ для всех $\overline{u}(k) \in [0,1]^{kn}$. □

Отметим, что равенства (2.10), (2.13), (2.14), (2.15) получены аналогично работе [10]. Здесь они приводятся для полноты доказательства.

3. Оптимальный режим промысла структурированной популяции для достижения наибольшего дисконтированного дохода

Как и выше, полагаем, что стоимость ресурса, извлеченного за k изъятий, задается равенством

$$H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big) = \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(j) u_i(j) e^{-\alpha j},$$

где $\overline{u}(k) \doteq (u(0), \ldots, u(k-1))$, $u(j) = (u_1(j), \ldots, u_n(j)) \in [0,1]^n$ для всех $j = 0, 1, \ldots, k-1$ и $k = 1, 2, \ldots$. Тогда из (1.3) следует, что $H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big) = \varliminf\limits_{k\to\infty} H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big)$.

Теорема 3.1. *Предположим, что* $D(x) \doteq \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\big(f_i(x) - x_i e^{\alpha}\big)$ *достигает максимального значения в единственной точке* $x^* \in \mathbb{R}^n_+$*, координаты которой удовлетворяют неравенству* $x_i^* \leqslant f_i(x^*) \neq 0$*,* $i = 1, \ldots, n$*. Тогда для любого* $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ *такого, что* $x_i(0) \geqslant x_i^*$*,* $i = 1, \ldots, n$*, функция* $H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает наибольшего значения*

$$H_\alpha\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = \frac{D(x^*)}{e^{\alpha} - 1} + \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(0)$$

на множестве U *при следующем режиме эксплуатации:*

$$u^*(0) = \Big(1 - \frac{x_1^*}{x_1(0)}, \ldots, 1 - \frac{x_n^*}{x_n(0)}\Big), \qquad u^*(k) = \Big(1 - \frac{x_1^*}{f_1(x^*)}, \ldots, 1 - \frac{x_n^*}{f_n(x^*)}\Big)$$

для всех $k \geqslant 1$.

Доказательство. Положим $x(0) \in \mathbb{R}^n_+$ такое, что $x_i(0) \geqslant x_i^*$ для всех $i = 1, \dots, n$. В (2.5) перейдем к пределу при $k \to \infty$:

$$H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big) \doteq \varliminf_{k\to\infty} H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} H_\alpha\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big) = \lim_{k\to\infty} H_\alpha\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big) =$$
$$= \lim_{k\to\infty} D(x^*)\frac{e^{-\alpha(k-1)}-1}{1-e^\alpha} + \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^n C_i x_i(0) = \frac{D(x^*)}{e^\alpha - 1} + \sum_{i=1}^n C_i x_i(0).$$

Покажем, что равенство $H_\alpha\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = \dfrac{D(x^*)}{e^\alpha-1} + \sum\limits_{i=1}^n C_i x_i(0)$ выполняется при режиме эксплуатации $\overline{u}^*$, описанном в условии теоремы. Действительно, аналогично (2.3) и (2.4) при таких управлениях получаем, что $x(j) = F(x^*)$ (т. е. $x_i(j) = f_i(x^*)$, $i = 1, \dots, n$) для каждого $j \geqslant 1$. Следовательно,

$$H_\alpha\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = \varliminf_{k\to\infty} H_\alpha\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big) =$$
$$= \varliminf_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^n C_i x_i(0)\Big(1 - \frac{x_i^*}{x_i(0)}\Big) + \sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^n C_i x_i(j)\Big(1 - \frac{x_i^*}{f_i(x^*)}\Big)e^{-\alpha j}\right) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^n C_i x_i(0) + \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^n C_i x_i^* + \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=1}^n C_i\big(f_i(x^*) - x_i^*\big)e^{-\alpha j} =$$
$$= \frac{D(x^*)}{e^\alpha - 1} + \sum_{i=1}^n C_i x_i(0). \quad (3.1)$$

Таким образом, $H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big) \leqslant \dfrac{D(x^*)}{e^\alpha-1} + \sum\limits_{i=1}^n C_i x_i(0) = H\big(\overline{u}^*, x(0)\big)$ для всех $\overline{u} \in U$. $\square$

4. Оптимальный режим эксплуатации однородной популяции

Рассмотрим модель развития однородной популяции (при $n = 1$) при отсутствии эксплуатации. Такая модель задается разностным уравнением

$$x(k+1) = f\big(x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $x(k) \in \mathbb{R}_+$, $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ — вещественная неотрицательная функция, удовлетворяющая условию $f(0) = 0$. Также будем рассматривать класс функций, определенных в $I = [0, a]$, т. е. $f \in C^2(I)$, и удовлетворяющих условию $f(0) = 0$ и $f(I) \subseteq I$. Считая, что $x(k)$ — количество ресурса до изъятия в момент k, рассмотрим модель однородной популяции, подверженной промыслу, в виде

$$x(k+1) = f\big((1 - u(k))x(k)\big), \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

Без ограничения общности при $n = 1$ можно полагать $C_1 = 1$. В таком случае дисконтированный доход от извлечения ресурса за k изъятий равен

$$H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big) = \sum_{j=0}^\infty x(j)u(j)e^{-\alpha j}.$$

Следствие 4.1. *Предположим, что* $d(x) \doteq f(x) - xe^{\alpha}$ *достигает максимального значения в единственной точке* $x^* > 0$. *Тогда для любого* $x(0) \geqslant x^*$ *функция* $H_\alpha\big(\overline{u}(k), x(0)\big)$ *достигает наибольшего значения*

$$H_\alpha\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big) = d(x^*)\frac{e^{-\alpha(k-1)} - 1}{1 - e^{\alpha}} + x(0)$$

на множестве $[0,1]^k$ *при следующем режиме эксплуатации:*
если $k = 1$, *то* $u^*(0) = 1$;
если $k = 2$, *то* $u^*(0) = 1 - \dfrac{x^*}{x(0)}$, $u^*(1) = 1$;
если $k \geqslant 3$, *то* $u^*(0) = 1 - \dfrac{x^*}{x(0)}$; $u^*(j) = 1 - \dfrac{x^*}{f(x^*)}$ *при* $j = 1, \ldots, k-2$; $u^*(k-1) = 1$.

Доказательство. Наибольшее значение функции $d(x)$, которое достигается в точке x^*, положительное, так как выполнено условие $f(0) = 0$. Значит $d(x^*) = f(x^*) - x^*e^{\alpha} > 0$. Отсюда получаем, что $f(x^*) > x^*e^{\alpha} > x^*$. Таким образом, все условия теоремы 2.1 выполнены, а данное утверждение является ее следствием для случая $n = 1$. □

Следствие 4.2. *Пусть* $d(x) \doteq f(x) - xe^{\alpha}$ *достигает максимального значения в единственной точке* $x^* > 0$. *Тогда для любого* $x(0) \geqslant x^*$ *функция* $H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big)$ *достигает наибольшего значения*

$$H_\alpha\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = \frac{d(x^*)}{e^{\alpha} - 1} + x(0)$$

на множестве U *при следующем режиме эксплуатации:*

$$u^*(0) = 1 - \frac{x^*}{x(0)}, \qquad u^*(k) = 1 - \frac{x^*}{f(x^*)}$$

для всех $k \geqslant 1$.

Доказательство. Аналогично (3.1) при $n = 1$ получаем, что при управлениях, указанных в условии следствия 4.2, $x(j) = f(x^*)$ для всех $j \geqslant 1$. Значит,

$$H_\alpha\big(\overline{u}^*, x(0)\big) = \varliminf_{k\to\infty} H_\alpha\big(\overline{u}^*(k), x(0)\big) = \frac{d(x^*)}{e^{\alpha} - 1} + x(0).$$

Отсюда получаем, что $H_\alpha\big(\overline{u}, x(0)\big) \leqslant \dfrac{d(x^*)}{e^{\alpha} - 1} + \sum\limits_{i=1}^{n} C_i x_i(0) = H\big(\overline{u}^*, x(0)\big)$ для всех $\overline{u} \in U$.

Таким образом, данное утверждение является следствием теоремы 3.1 для случая $n = 1$. □

Работа выполнена под руководством д.ф.-м.н., профессора кафедры функционального анализа и его приложений Владимирского государственного университета им. А. Г. и Н. Г. Столетовых Людмилы Ивановны Родиной.

References

[1] Е. Я. Фрисман, М. П. Кулаков, О. Л. Ревуцкая, О. Л. Жданова, Г. П. Неверова, “Основные направления и обзор современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций”, *Компьютерные исследования и моделирование*, **11**:1 (2019), 119–151. [E. Ya. Frisman, M. P. Kulakov, O. L. Revutskaya, O. L. Zhdanova, G. P. Neverova, “The key approaches and review of current researches on dynamics of structured and interacting populations”, *Computer Research and Modeling*, **11**:1 (2019), 119–151 (In Russian)].

[2] Г. П. Неверова, А. И. Абакумов, Е. Я. Фрисман, "Влияние промыслового изъятия на режимы динамики лимитированной популяции: результаты моделирования и численного исследования", *Математическая биология и биоинформатика*, **11**:1 (2016), 1–13. [G. P. Neverova, A. I. Abakumov, E. Ya. Frisman, "Dynamic modes of exploited limited population: results of modeling and numerical study", *Mathematical Biology and Bioinformatics*, **11**:1 (2016), 1–13 (In Russian)].

[3] О. Л. Ревуцкая, Е. Я. Фрисман, "Влияние равновесного промысла на сценарии развития двухвозрастной популяции", *Информатика и системы управления*, **53**:3 (2017), 36–48. [O. L. Revutskaya, E. Ya. Frisman, "Influence of stationary harvesting on development of a two-age population scenario", *Informatika i Sistemy Upravleniya*, **53**:3 (2017), 36–48 (In Russian)].

[4] Л. И. Родина, "Об одной стохастической модели сбора возобновляемого ресурса", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **23**:124 (2018), 685–695. [L. I. Rodina, "About one stochastic harvesting model of a renewed resourse", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:124 (2018), 685–695 (In Russian)].

[5] Л. И. Родина, "Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **28**:2 (2018), 213–221. [L. I. Rodina, "Properties of average time prot in stochastic models of harvesting a renewable resource", *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **28**:2 (2018), 213–221 (In Russian)].

[6] L. G. Hansen, F. Jensen, "Regulating fisheries under uncertainty", *Resource and Energy Economics*, **50** (2017), 164–177.

[7] А. О. Беляков, А. А. Давыдов, "Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса", *Труды Института математики и механики УрО РАН*, **22**:2 (2016), 38–46; англ. пер.:A. O. Belyakov, A. A. Davydov, "Efficiency Optimization for the Cyclic Use of a Renewable Resource", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **299**:suppl. 1 (2017), 14–21.

[8] М. И. Зеликин, Л. В. Локуциевский, С. В. Скопинцев, "Об оптимальном сборе ресурса на окружности", *Математические заметки*, **102**:4 (2017), 521–532. [M. I. Zelikin, L. V. Lokutsievskiy, S. V. Skopincev, "On optimal harvesting of a resource on a circle", *Mathematical Notes*, **102**:4 (2017), 521–532 (In Russian)].

[9] A. O. Belyakov, V. M. Veliov, "On optimal harvesting in age-structured populations", *Dynamic Perspectives on Managerial Decision Making*, 2016, 149–166.

[10] А. В. Егорова, Л. И. Родина, "Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **29**:4 (2019), 501–517. [A. V. Egorova,L. I. Rodina, "On optimal harvesting of renewable resource from the structured population", *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **29**:4 (2019), 501–517 (In Russian)].

Информация об авторе

Егорова Анастасия Владимировна, аспирант, кафедра функционального анализа и его приложений. Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, г. Владимир, Российская Федерация. E-mail: nastik.e@bk.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3930-0743

Information about the author

Anastasia V. Egorova, Post-Graduate Student, Functional Analysis and its Applications Department. Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russian Federation. E-mail: nastik.e@bk.ru
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3930-0743

Поступила в редакцию 26.01.2021 г.
Поступила после рецензирования 25.02.2021 г.
Принята к публикации 05.03.2021 г.

Received 26.01.2021
Reviewed 25.02.2021
Accepted for press 05.03.2021