АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

Том 3 *1965* *№ 2*

УДК 533.932.15

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ КИНЕТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ

С. А. Маев

Получены граничные условия одномерных уравнений переноса для смеси нейтральных и заряженных частиц в приближении 20 моментов метода Грэда. В диффузионном приближении граничные условия записаны в виде, удобном для расчетов термоэлектронного преобразователя энергии.

Рассматривается вывод граничных условий для одномерных уравнений переноса, полученных методом Грэда [1]. При этом для простоты рассматривается покоящаяся среда, в которой происходит диффузионный перенос частиц и энергии. Граничные условия для уравнений, описывающих явления переноса в смесях нейтральных частиц, рассмотрены в ряде работ [1—3]. В работе [1], в частности, рассмотрен вопрос о числе необходимых граничных условий и указан способ их получения. Для заряженных частиц вывод граничных условий принципиально не отличается от случая нейтрального газа. Задача, однако, имеет в этом случае свои особенности, связанные с образованием возле граничной поверхности переходной области, в которой потенциал испытывает сильное изменение. В этой области, носящей название ленгмюровского слоя, функция распределения частиц существенно изменяется на расстояниях, равных по порядку величины дебаевскому радиусу, в то время как вне ленгмюровского слоя существенные изменения функции распределения происходят на расстояниях порядка размеров системы. Целесообразно поэтому рассмотреть отдельно поведение функции распределения возле стенок и вдали от них. В последнем случае используются уравнения кинетических моментов Грэда [4, 5]. Для решения задачи возле стенок следовало бы, строго говоря, найти точное самосогласованное решение в ленгмюровском слое. В настоящей работе рассматривается упрощенная задача: для выбранной аппроксимации функции распределения находятся условия, которым должны удовлетворять вычисленные при помощи ее макроскопические величины. Такой подход к задаче использован также в [6].

В подавляющем большинстве случаев размер ленгмюровского слоя много меньше длины свободного пробега, поэтому изменение функции распределения заряженных частиц в слое описывается уравнением Власова

$$c_x \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{d\varphi}{dx} \frac{\partial f_\alpha}{\partial c_x} = 0. \qquad (1)$$

Здесь f_α — функция распределения частиц сорта α; e_α, m_α — их заряд и масса; c — скорость частицы; φ — электрический потенциал. Решением этого уравнения является произвольная функция полной энергии

$$f_\alpha(\mathbf{c}, x, t) = F\left(\frac{m_\alpha c^2}{2} + e_\alpha \varphi(x)\right). \qquad (2)$$

Конкретный вид функции F определяется целиком условиями, которым должна удовлетворять функция распределения на границах ленгмюровского слоя. В дальнейшем будем считать, что частицы, падающие на поверхность, отражаются от нее диффузно с максвелловской функцией распределения

$$f_\alpha^{(1)} = \frac{m_\alpha^2 J_{\alpha 0}}{2\pi T_0^2} e^{-m_\alpha c^2/2T_0}, \qquad c_x \geqslant 0, \tag{3}$$

где T_0 — температура стенки в энергетических единицах; $J_{\alpha 0}$ — поток эмиттируемых частиц. Для частиц, летящих из плазмы, примем следующую аппроксимацию функции распределения:

$$f_\alpha^{(2)} = n_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha} \right)^{3/2} e^{-m_\alpha c^2/2T_\alpha} \left\{ 1 + \frac{m_\alpha J_{\alpha x} c_x}{p_\alpha} + \frac{m_\alpha^2 h_{\alpha x} c_x}{5 p_\alpha T_\alpha^2} \left(c^2 - \frac{5T_\alpha}{m_\alpha} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{m_\alpha}{2p_\alpha T_\alpha} p_{\alpha xx} \left(c_x^2 - \frac{c_y^2 + c_z^2}{2} \right) + \frac{m_\alpha^2}{3p_\alpha T_\alpha^2} s_{\alpha xxx} \left(c_x^2 - \frac{3}{2} c_y^2 - \frac{3}{2} c_z^2 \right) \right\}. \tag{4}$$

В последнем выражении $J_{\alpha x}$ есть поток частиц сорта α; $h_{\alpha i}$ — приведенный тепловой поток, связанный с обычным потоком тепла $S_{\alpha i}$ соотношением:

$$h_{\alpha i} = S_{\alpha i} - \frac{5}{2} J_{\alpha i} T_\alpha;$$

$p_{\alpha ik}$ — тензор напряжений; $s_{\alpha ikl}$ — тензор 3-го ранга (см. [1]). Разложение (4) соответствует приближению 20 моментов метода Грэда. При его записи использованы соотношения симметрии для тензоров $p_{\alpha ik}$, $s_{\alpha ikl}$:

$$p_{\alpha xy} = p_{\alpha xz} = p_{\alpha yz} = 0; \qquad s_{\alpha xyz} = s_{\alpha xxz} = \ldots = s_{\alpha yzz} = 0;$$
$$p_{\alpha yy} = p_{\alpha zz} = -{}^1/_2 p_{\alpha xx}; \qquad s_{\alpha xyy} = s_{\alpha xzz} = -{}^1/_2 s_{\alpha xxx}.$$

Примем потенциал поверхности равным нулю. Тогда функция распределения в ленгмюровском слое для частиц, эмиттированных поверхностью, имеет вид

$$f_\alpha^{(1)} = \frac{m_\alpha^2 J_{\alpha 0}}{2\pi T_0^2} \exp\left\{ -\frac{m_\alpha c^2}{2T_0} - \frac{e_\alpha \varphi(x)}{T_0} \right\}. \tag{5}$$

Пределы изменения скорости в этом выражении зависят от знака напряженности поля на поверхности. В случае монотонного хода потенциала последний однозначно определяется знаком потенциала в плазме за пределами ленгмюровского слоя. Обозначим потенциал в плазме через φ_1, тогда функция распределения на границе плазмы и ленгмюровского слоя имеет вид:

а) $e_\alpha \varphi_1 > 0$ (скачок потенциала тормозит частицы, летящие от стенки)

$$f_\alpha(\mathbf{c}) = \begin{cases} \dfrac{m_\alpha^2 J_{\alpha 0}}{2\pi T_0^2} \exp\left\{ -\dfrac{m_\alpha c^2}{2T_0} - \dfrac{e_\alpha \varphi_1}{T_0} \right\}, & c_x \geqslant 0 \\ f_\alpha^{(2)}, & c_x < 0; \end{cases} \tag{6}$$

б) $e_\alpha \varphi_1 < 0$ (скачок потенциала ускоряет частицы, летящие от стенки)

$$f_\alpha(\mathbf{c}) = \begin{cases} \dfrac{m_\alpha^2 J_{\alpha 0}}{2\pi T_0^2} \exp\left\{ -\dfrac{m_\alpha c^2}{2T_0} - \dfrac{e_\alpha \varphi_1}{T_0} \right\}, & c_x \geqslant \sqrt{-\dfrac{2e_\alpha \varphi_1}{m_\alpha}}. \\ f_\alpha^{(2)}, & c_x < \sqrt{-\dfrac{2e_\alpha \varphi_1}{m_\alpha}}. \end{cases} \tag{7}$$

В уравнениях (6), (7) $f_\alpha^{(2)}$ определяется формулой (4). При записи их считается, что ось x направлена в сторону внешней нормали.

Граничные условия (6), (7) для функции распределения являются обобщением соответствующих условий, использованных в работе [6]. При их записи достаточно использовать решение кинетического уравнения только в ленгмюровском слое. Для монотонного хода потенциала при этом оказывается возможным найти значение потенциала, плотности и температуры частиц, не решая уравнения Пуассона в слое. При этом, однако, на внешней границе ленгмюровского слоя должно выполняться условие квазинейтральности среды.

Для того чтобы получить граничные условия на поглощающей поверхности, в соотношениях (6), (7) следует положить $J_{\alpha 0} = 0$ и выбрать соответствующие пределы изменения скоростей в зависимости от знака скачка потенциала. При этом, если потенциал стенки отличен от нуля, в формулах (6), (7) следует заменить $e_\alpha \varphi_1$ на $e_\alpha(\varphi_2 - \varphi_L)$, где φ_2 — потенциал плазмы возле стенки, φ_L — потенциал стенки.

Выведем теперь граничные условия для моментов функции распределения.

1. Рассмотрим сначала нейтральные частицы. Полагая в (6) или (7) $e_\alpha = 0$, умножая полученное уравнение на c_x, c_x^3, $c^2 c_x$ и интегрируя по скоростям, получим

$$J_\alpha = 2J_{\alpha 0} - \frac{n_\alpha q_\alpha}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{1}{2}\pi_\alpha\right),$$

$$s_\alpha + \frac{3}{5} S_\alpha = 2J_{\alpha 0} T_0 - \frac{p_\alpha q_\alpha}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{3}{2}\pi_\alpha\right) \tag{8}$$

$$S_\alpha = 4J_{\alpha 0} T_0 - \frac{2p_\alpha q_\alpha}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{3}{4}\pi_\alpha\right).$$

Здесь введены обозначения

$$J_\alpha = J_{\alpha x}, \quad S_\alpha = S_{\alpha x}, \quad s_\alpha = s_{\alpha xxx},$$

$$p_\alpha = n_\alpha T_\alpha, \quad \pi_\alpha = \frac{p_{\alpha xx}}{p_\alpha}, \quad q_\alpha = \sqrt{\frac{2T_\alpha}{m_\alpha}}. \tag{9}$$

Уравнения (8) согласуются с соответствующими уравнениями в [3]. При их помощи получим граничные условия на поглощающей поверхности, положив $J_{\alpha 0} = 0$:

$$J_\alpha = -\frac{n_\alpha q_\alpha}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{1}{2}\pi_\alpha\right); \quad S_\alpha = -\frac{2p_\alpha q_\alpha}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{3}{4}\pi_\alpha\right);$$

$$s_\alpha = \frac{p_\alpha q_\alpha}{5\sqrt{\pi}}(1 - 3\pi_\alpha). \tag{10}$$

Для абсолютной величины потока частиц в диффузионном приближении, т. е. при $\pi_\alpha = s_\alpha = 0$, получаем

$$J_\alpha = \frac{n_\alpha q_\alpha}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2} n_\alpha \bar{v}_\alpha,$$

где

$$\bar{v}_\alpha = \sqrt{8T_\alpha/\pi m_\alpha}.$$

Это значение хорошо согласуется с точным, равным 0,47 $n_\alpha \bar{v}_\alpha$ [7].

2. Для заряженных частиц рассмотрим сначала случай эмиттирующей поверхности. Принимая потенциал последней равным нулю, умножим (6),

(7) на c_x, c_x^3, $c_x((m_\alpha c^2/2)+e_\alpha\varphi_1)$ и проинтегрируем по скоростям. В результате получаем

а) $e_\alpha\varphi_1>0$

$$J_\alpha=2J_{\alpha0}e^{-e_\alpha\varphi_1/T_0}-\frac{n_\alpha q_\alpha}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{1}{2}\pi_\alpha\right)$$

$$s_\alpha+\frac{3}{5}S_\alpha=2J_{\alpha0}T_0e^{-e_\alpha\varphi_1/T_0}-\frac{p_\alpha q_\alpha}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{3}{2}\pi_\alpha\right), \tag{11}$$

$$S_\alpha=4J_{\alpha0}T_0e^{-e_\alpha\varphi_1/T_0}-\frac{2p_\alpha q_\alpha}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{3}{4}\pi_\alpha\right);$$

б) $e_\alpha\varphi_1<0$

$$J_\alpha\left(\frac{1+\operatorname{erf}v_\varphi}{2}+\frac{v_\varphi^3-v_\varphi}{\sqrt{\pi}}e^{-v_\varphi^2}\right)=$$

$$=J_{\alpha0}-\frac{n_\alpha q_\alpha}{2\sqrt{\pi}}e^{-v_\varphi^2}\left\{1+\left(v_\varphi^2+\frac{1}{2}\right)\pi_\alpha-\left(\frac{4}{5}S_\alpha+\frac{4}{3}s_\alpha\right)\frac{v_\varphi^3}{p_\alpha q_\alpha}\right\}, \tag{12}$$

$$\left(s_\alpha+\frac{3}{5}S_\alpha\right)\left[\frac{1+\operatorname{erf}v_\varphi}{2}+\frac{2e^{-v_\varphi^2}}{3\sqrt{\pi}}\left(v_\varphi^5+v_\varphi^3+\frac{3}{2}v_\varphi\right)\right]=J_{\alpha0}(T_0-e_\alpha\varphi_1)-$$

$$-\frac{n_\alpha q_\alpha}{2\sqrt{\pi}}e^{-v_\varphi^2}(T_\alpha-e_\alpha\varphi_1)-\frac{e^{-v_\varphi^2}}{\sqrt{\pi}}\left\{J_\alpha T_\alpha v_\varphi^5+p_\alpha q_\alpha\pi_\alpha\left(\frac{v_\varphi^4}{2}+\frac{3}{4}v_\varphi^2+\frac{3}{4}\right)\right\}, \tag{13}$$

$$(S_\alpha+e_\alpha\varphi_1J_\alpha)\frac{1+\operatorname{erf}v_\varphi}{2}=2J_{\alpha0}T_0-\frac{n_\alpha q_\alpha T_\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-v_\varphi^2}+\frac{e^{-v_\varphi^2}}{\sqrt{\pi}}\times$$

$$\times\left\{-\frac{1}{2}J_\alpha T_\alpha v_\alpha^2+\frac{4}{5}S_\alpha\left(v_\varphi^3+\frac{5}{4}v_\varphi\right)-p_\alpha q_\alpha\pi_\alpha\left(v_\varphi^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{4}{3}s_\alpha v_\varphi^3\right. . \tag{14}$$

Здесь $v_\varphi^2=-e_\alpha\varphi_1/T_\alpha$.

В написанных уравнениях все величины можно вычислять на самой поверхности, так как толщина ленгмюровского слоя обычно мала по сравнению с размерами системы. В этом случае уравнения (11) или (12)—(14) определяют скачок потенциала, температуры и плотности частиц на границе.

Переходя к случаю поглощающей поверхности, заметим, что, если потенциал последней равен нулю, граничные условия получаются из приведенных выше приравниванием нулю токов эмиссии $J_{\alpha0}$. Если же потенциал поверхности равен φ_L, то, полагая в (6), (7) $J_{\alpha0}=0$, заменяя φ_1 на $\varphi_2-\varphi_L$ и производя те же операции, что и при выводе уравнений (11)—(14), получим

а) $e_\alpha(\varphi_2-\varphi_L)>0$

$$J_\alpha=\frac{n_\alpha q_\alpha}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{1}{2}\pi_\alpha\right);\qquad s_\alpha+\frac{3}{5}S_\alpha=\frac{p_\alpha q_\alpha}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{3}{2}\pi_\alpha\right),$$

$$S_\alpha+e_\alpha\varphi_2J_\alpha=\frac{2p_\alpha q_\alpha}{\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{3}{4}\pi_\alpha\right)+\frac{n_\alpha q_\alpha}{\sqrt{\pi}}e_\alpha\varphi_2\left(1+\frac{1}{2}\pi_\alpha\right). \tag{15}$$

б) $e_\alpha(\varphi_2-\varphi_L)<0$

$$J_\alpha\left(\frac{1+\operatorname{erf}v_\alpha}{2}+\frac{v_\alpha^3-v_\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-v_\alpha^2}\right)=$$

$$= \frac{n_\alpha q_\alpha}{2\sqrt{\pi}} e^{-v_\alpha^2} \left[1 + \left(v_\alpha^2 + \frac{1}{2} \right) \pi_\alpha + \left(\frac{4}{5} S_\alpha + \frac{4}{3} s_\alpha \right) \frac{v_\alpha^3}{p_\alpha q_\alpha} \right], \tag{16}$$

$$s_\alpha + \frac{3}{5} S_\alpha \Big) \left[\frac{1 + \operatorname{erf} v_\alpha}{2} - \frac{2e^{-v_\alpha^2}}{3\sqrt{\pi}} \left(v_\alpha^5 + v_\alpha^3 + \frac{3}{2} v_\alpha \right) \right] =$$

$$= \frac{n_\alpha q_\alpha e^{-v_\varphi^2}}{2\sqrt{\pi}} [T_\alpha - e_\alpha(\varphi_2 - \varphi_L)] + \frac{e^{-v_\alpha^2}}{\sqrt{\pi}} \Big[J_\alpha T_\alpha v_\alpha^5 +$$

$$+ p_\alpha q_\alpha \pi_\alpha \left(\frac{v_\alpha^4}{2} + \frac{3}{4} v_\alpha^2 + \frac{3}{4} \right) \Big], \tag{17}$$

$$(S_\alpha + e_\alpha \varphi_2 J_\alpha) \frac{1 + \operatorname{erf} v_\alpha}{2} = \frac{n_\alpha q_\alpha}{2\sqrt{\pi}} e^{-v_\alpha^2} (2T_\alpha + e_\alpha \varphi_L) +$$

$$+ \frac{e^{-v_\alpha^2}}{\sqrt{\pi}} \Big\{ - J_\alpha T_\alpha \left[v_\alpha^5 - \frac{1}{2} v_\alpha^3 + \frac{e_\alpha \varphi_2}{T_\alpha} (v_\alpha^3 - v_\alpha) \right] +$$

$$+ p_\alpha q_\alpha \pi_\alpha \left[\frac{1}{2} v_\alpha^4 + \frac{5}{4} v_\alpha^2 + \frac{3}{4} + \frac{e_\alpha \varphi_2}{2T_\alpha} \left(v_\alpha^2 + \frac{1}{2} \right) \right] + \tag{18}$$

$$+ \frac{4}{5} S_\alpha \left(\frac{1}{2} v_\alpha^5 + v_\alpha^3 + \frac{5}{4} v_\alpha + \frac{e_\alpha \varphi_2}{2T_\alpha} v_\alpha^3 \right) +$$

$$+ \frac{4}{3} s_\alpha \left(\frac{1}{2} v_\alpha^5 + v_\alpha^3 + \frac{e_\alpha \varphi_2}{2T_\alpha} v_\alpha^3 \right) \Big\}.$$

Здесь $v_\alpha^2 = |e_\alpha(\varphi_2 - \varphi_L)| / T_\alpha$. Кроме того, при выводе последних уравнений считается, что ось x направлена против внешней нормали.

Если в уравнениях (16), (18) $v_\alpha^2 \gg 1$, то можно показать, что последние сводятся к виду

$$J = \frac{n_\alpha q_\alpha}{2\sqrt{\pi}} e^{-v_\alpha^2} + O(e^{-2v_\alpha^2}),$$

$$S_\alpha + e_\alpha \varphi_2 J_\alpha = \frac{n_\alpha q_\alpha}{2\sqrt{\pi}} e^{-v_\alpha^2} (2T_\alpha + e_\alpha \varphi_L) + O(e^{-2v_\alpha^2}). \tag{19}$$

При выводе этих соотношений использовано то обстоятельство, что $\pi_\alpha \approx e^{-v_\alpha^2}$. Граничные условия (19) совпадают с теми, которые получены в [6] в предположении максвелловской функции распределения частиц, летящих из плазмы. Полученный результат показывает, что данное предположение справедливо только в сильном задерживающем поле. В ускоряющем поле следующее из (16) значение тока (при $\pi_\alpha = 0$), равное $^1/_2 n_\alpha \bar{v}_\alpha$, вдвое выше того, которое приведено в [6].

3. Найдем теперь выражения для токов эмиссии. Величины $J_{\alpha 0}$, входящие в граничные условия, определяются законом взаимодействия падающих частиц с поверхностью. В некоторых случаях, например при термоэлектронной эмиссии, ток эмиссии в первом приближении не зависит от состояния электронного газа в плазме и является внешним параметром задачи. В других случаях дело обстоит иначе.

Рассмотрим в качестве примера поверхностную ионизацию атомов. Предполагаем, что вероятность поверхностной ионизации β дается обычным термодинамическим выражением [8]:

$$\beta \equiv \frac{J_{i+}}{J_{i-} + J_{\alpha-}} = \frac{1}{1 + \frac{g_a}{g_i} e^{(V_i - W)/T_0}}. \tag{20}$$

Здесь $J_{\alpha\pm}$ — поток частиц на поверхности в положительном и отрицательном направлениях по отношению к внешней нормали; V_i — потенциал ионизации; W — работа выхода.

Используя (4), получим для атомов

$$J_{\alpha-} = -\int_{-\infty}^{0} c_x f_a dc = \frac{n_a q_a}{2\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{1}{2}\pi_\alpha\right) - \frac{J_a}{2}. \tag{21}$$

Величина J_{i-} имеет разный вид для различных знаков скачка потенциала. Примем потенциал поверхности равным нулю. Тогда при $\varphi_1 > 0$ на поверхность, кроме частиц, летящих из плазмы, упадут частицы, испущенные поверхностью и отраженные от потенциального барьера. Учитывая это, получим

$$J_{i-} = \frac{n_i q_i}{2\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{1}{2}\pi_i\right) - \frac{j_i}{2} + J_{i+}(1 - e^{-e\varphi_1/T_0}), \quad \varphi_1 > 0, \tag{22}$$

$$J_{i-} = \frac{n_i q_i}{2\sqrt{\pi}} e^{-v_i^2}\left[1 + \left(v_i^2 + \frac{1}{2}\right)\pi_i - \left(\frac{4}{5}S_i + \frac{4}{3}s_i\right)\frac{v_i^3}{p_i q_i}\right] -$$
$$- \frac{1}{2}J_i\left[1 - \operatorname{erf} v_i - \frac{2(v_i^3 - v_i)}{\sqrt{\pi}} e^{-v_i^2}\right], \quad \varphi_1 < 0, \tag{23}$$

где $v_i^2 = |e\varphi_1| / T_i$.

Подставляя выражения (21)—(23) в формулу (20), найдем выражения для токов эмиссии:

$$J_{i+} = \frac{\beta}{1 - \beta(1 - e^{-e\varphi_1/T_0})}\left[\frac{n_a q_a}{2\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{1}{2}\pi_a\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{n_i q_i}{2\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{1}{2}\pi_i\right) - \frac{1}{2}(J_a + J_i)\right], \quad \varphi_1 > 0, \tag{24}$$

$$J_{i+} = \beta\left\{\frac{n_\alpha q_\alpha}{2\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{1}{2}\pi_\alpha\right) - \frac{1}{2}(J_\alpha + J_i) + J_i\left(\frac{\operatorname{erf} v_i}{2} + \frac{v_i^3 - v_1}{\sqrt{\pi}} e^{-v_i^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{n_i q_i}{2\sqrt{\pi}} e^{-v_i^2}\left[1 + \left(v_i^2 + \frac{1}{2}\right)\pi_i - \left(\frac{4}{5}S_i + \frac{4}{3}s_i\right)\frac{v_i^3}{p_i q_i}\right]\right\}, \quad \varphi_1 < 0, \tag{25}$$

$$J_{a+} = \frac{1 - \beta}{\beta} J_{i+}. \tag{26}$$

Величины J_{a+} и J_{i+} тождественны J_{a0}, J_{i0} в уравнениях (11)—(14). В состоянии термодинамического равновесия, когда $J_\alpha = S_\alpha = \pi_\alpha = s_\alpha = 0$, $n_i = n_{i0} e^{-e\varphi/T_0}$, выражения (24), (25) совпадают с тем, которое приводится в [8].

Если же состояние газа возле стенки далеко от равновесия (например, если все образующиеся ионы отсасываются сильным полем), то в (24), (25) можно пренебречь потоком ионов на стенку. В этом случае

$$J_{i+} = \beta\frac{n_a q_a}{2\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{1}{2}\pi_a\right). \tag{27}$$

(Здесь считается, что $J_\alpha + J_i = 0$.) Из (20) и (27) следует, что в этом случае ток эмиссии ионов стремится к насыщению при увеличении работы выхода. Аналогично можно получить значения токов эмиссии в других случаях, например при вторичной электронной или ионной эмиссии.

4. Рассмотрим подробнее граничные условия для заряженных частиц в диффузионном приближении для положительного и отрицательного скач-

ка потенциала возле поверхности. В случае эмиттирующей поверхности первый случай называется перекомпенсированным режимом, второй — недокомпенсированным [6]. Введем безразмерные величины:

$$j_e = \frac{J_e}{J_{e0}}, \quad j_i = \frac{J_i}{J_{e0}}\sqrt{\frac{M}{m}}, \quad \psi_1 = \frac{e\varphi_1}{T_0},$$

$$\nu_1 = \frac{n(1)\overline{v_{e0}}}{4J_{e0}}, \quad w_e = \frac{S_e - e\varphi_1 J_e}{2J_{e0}T_0}, \quad \tau_1 = \frac{T_e(1)}{T_0}, \tag{28}$$

$$\omega = \frac{J_{i0}}{J_{e0}}\sqrt{\frac{M}{m}} \quad (n = n_e = n_i).$$

Здесь $\overline{v_{e0}} = \sqrt{8T_0/\pi m}$; J_{e0}, J_{i0} — токи эмиссии электронов и ионов. Индекс e относится к электронам, i — к ионам. При записи граничных условий будем считать, что температура ионов известна и равна температуре стенки, поэтому уравнение для температуры ионов можно опустить. Это имеет место, например, в слабоионизованной трехкомпонентной плазме, где температура ионов равна температуре атомов.

Рассмотрим сначала перекомпенсированный режим. Взяв для электронов уравнения (12), (13), а для ионов — первое уравнение (11), полагая в них $\pi_\alpha = s_\alpha = 0$ и приводя уравнения к безразмерному виду, получим

$$j_e\left[\frac{1+\operatorname{erf}\sqrt{z_1}}{2} + \frac{\sqrt{z_1}\,e^{-z_1}}{\sqrt{\pi}}(z_1 - 1)\right] = 1 - \nu_1\sqrt{\tau_1}\,e^{-z_1}\left[1 - \frac{4z_1^{3/2}}{5\sqrt{\pi}}\frac{w_e + \frac{1}{2}j_e\psi_1}{\nu_1\tau_1^{3/2}}\right]. \tag{29}$$

$$w_e\frac{1+\operatorname{erf}\sqrt{z_1}}{2} = 1 - \nu_1\tau_1^{3/2}e^{-z_1} +$$

$$+\frac{e^{-z_1}}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{4}j_e\tau_1 z_1^{3/2} + \frac{4}{5}\left(w_e + \frac{1}{2}j_e\psi_1\right)\left(z_1^{3/2} + \frac{5}{4}z_1^{1/2}\right)\right], \tag{30}$$

$$j_i = 2(\omega e^{-\psi_1} - \nu_1). \tag{31}$$

Здесь $z_1 = \psi_1/\tau_1$.

Находя из (29), (30) ν_1 и τ_1 и подставляя в (31), получим уравнение для определения z_1:

$$z_1 = \frac{1}{1+\Phi(z_1)}\ln\frac{\omega\sqrt{\Phi(z_1)}}{\Psi(z_1)}, \tag{32}$$

где

$$\Phi(z_1) = \frac{1 - \left(\frac{1+\operatorname{erf}\sqrt{z_1}}{2} - \frac{\sqrt{z_1}\,e^{-z_1}}{\sqrt{\pi}}\right)w_e}{1 - \left[\frac{1+\operatorname{erf}\sqrt{z_1}}{2} + \frac{\sqrt{z_1}\,e^{-z_1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{5}{4}z_1 - 1\right)\right]j_e},$$

$$\Psi(z_1) = 1 - \left[\frac{1+\operatorname{erf}\sqrt{z_1}}{2} - \frac{\sqrt{z_1}\,e^{-z_1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{5}z_1^2 - z_1 + 1\right)\right]j_e +$$

$$+\frac{4}{5\sqrt{\pi}}\frac{z_1^{3/2}e^{-z_1}}{\Phi(z_1)}w_e + \frac{1}{2}e^{-z_1}\sqrt{\Phi(z_1)}\,j_i.$$

Находя z_1 из (32), вычисляем $\tau_1 = \Phi(z_1)$, затем $\psi_1 = z_1\Phi(z_1)$ и из (31) находим ν_1. Величины j_e, j_i, w_e должны быть известны.

Для недокомпенсированного режима, используя для электронов уравнения (11), а для ионов — (12), приводя их к безразмерному виду и разрешая относительно ψ_1, получим:

$$\psi_1 = \ln\left\{\frac{1}{4}j_e + \left[(\omega - j_i F_1(-\psi_1))\sqrt{\tau_1} + \frac{1}{16}j_e^2\right]^{1/2}\right\},$$

$$\tau_1 = \frac{e^{\psi_1} - \frac{1}{2}w_e - \frac{1}{4}j_e\psi_1}{e^{\psi_1} - \frac{1}{2}j_e}, \qquad \nu_1 = \frac{e^{\psi_1} - \frac{1}{2}j_e}{\sqrt{\tau_1}}, \tag{33}$$

где

$$F_1(x) = \frac{1 + \operatorname{erf}\sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{x}\,e^{-x}}{\sqrt{\pi}}(x - 1).$$

Заметим, что при выводе уравнений (32), (33) не делалось предположения о малости упорядоченного потока частиц по сравнению с хаотическим, поэтому эти уравнения справедливы также и для случая, когда эти потоки сравнимы по величине.

Запишем теперь граничные условия для частиц на поглощающей поверхности. Из уравнений (15), (16), (18), приводя их к безразмерному виду, разрешая относительно j_e, j_i, w_e и считая температуру ионов известной, получим

а) $\varphi_2 < \varphi_L$

$$j_e = 2\nu_2\sqrt{\tau_2}, \qquad w_e = 2\nu_2\sqrt{\tau_2}\left(\tau - \frac{1}{2}\psi_2\right), \qquad j_i = \frac{\nu_2\sqrt{\theta_2}}{F_1\left(\frac{\Delta\psi}{\theta_2}\right)}e^{-\Delta\psi/\theta_2}, \tag{34}$$

б) $\varphi_2 > \varphi_L$

$$j_i = 2\nu_2\sqrt{\theta_2}, \qquad j_e = \nu_2\sqrt{\tau_2}/R_2(z_2), \qquad w_e + \frac{1}{2}j_e\psi_2 = \frac{1}{2}\nu_2\tau_2^{3/2}\frac{R_1(z_2)}{R_2(z_2)}. \tag{35}$$

Здесь введены обозначения:

$$z_2 = \frac{|\Delta\psi|}{\tau_2}, \qquad \Delta\psi = \frac{e(\varphi_L - \varphi_2)}{T_0}, \qquad \psi_2 = \frac{e\varphi_2}{T_0},$$

$$\nu_2 = \frac{n(2)\bar{v}_{e0}}{4J_{e0}}, \qquad \tau_2 = \frac{T_e(2)}{T_0}, \qquad \theta_2 = \frac{T_i(2)}{T_0}.$$

Индекс 2 означает, что величина вычисляется в плазме возле поверхности. Кроме того,

$$R_1(z) = \frac{\frac{1 + \operatorname{erf}\sqrt{z}}{2}(2 + z) + \frac{\sqrt{z}\,e^{-z}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{3}{2}z - 2\right)}{\frac{1 + \operatorname{erf}\sqrt{z}}{2} - \frac{\sqrt{z}\,e^{-z}}{\sqrt{\pi}}}$$

$$R_2(z) = e^z \frac{F_1(z)F_2(z) + \frac{2z^3}{5\pi}\left(z - \frac{1}{2}\right)e^{-z}}{\frac{1+\operatorname{erf}\sqrt{z}}{2} - \frac{\sqrt{z}\,e^{-z}}{\sqrt{\pi}}},$$

$$F_2(z) = \frac{1+\operatorname{erf}\sqrt{z}}{2} - \frac{\sqrt{z}\,e^{-z}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{5}z^2 + \frac{4}{5}z + 1\right).$$

Соотношения (32) — (35) дают необходимые граничные условия для уравнений переноса в диффузионном приближении. Вычисления, выполненные на основе уравнений (32) — (36), показали, что при $\psi_1 < 0$ (т. е. в недокомпенсированном режиме) скачок температуры очень мал: $\tau_1 \approx 1$. Полагая в (33) $\tau_1 = 1$ и опуская j_e, получим уравнение, аналогичное (1.5) работы [6]. Этот случай соответствует малым значениям длин свободного пробега l, когда число Кнудсена $\mathrm{Kn} = l / L \ll 1$ (L — характерный размер). Если же формально рассмотреть случай, когда $\mathrm{Kn} \gg 1$, то, считая, что плотность, потенциал и температура частиц в промежутке постоянны, из уравнений (33), (34) получим при $j_i = 0$

$$\tau_1 = 1, \quad \nu_1 = \sqrt{\frac{\omega}{2}}, \quad \psi_1 = \ln\sqrt{2\omega}, \quad j_e = \sqrt{2\omega}. \tag{36}$$

В этом случае поток электронов через промежуток равен той его части, которая проходит через задерживающий барьер. Величина φ_1 этого барьера, равная, согласно (36):

$$\frac{T_0}{e}\ln\sqrt{2\omega},$$

хорошо согласуется с той, которая получена в [9] на основе точной теории:

$$\varphi_1 = \frac{T_0}{e}\frac{1}{2}\ln\frac{\omega}{0{,}405} = \frac{T_0}{e}\ln\sqrt{2{,}47\omega}.$$

Таким образом, хотя аппроксимация функции распределения является довольно грубой, полученные результаты достаточно хорошо согласуются с точными. Следует отметить, что при выводе граничных условий считалось, что функция распределения является устойчивой. Неустойчивость может появиться в результате ускорения частиц на пристеночных скачках потенциала и образования интенсивных пучков. Этот вопрос, однако, в данной работе не обсуждается. Исследование его произведено в работе [10].

В заключение выражаю благодарность И. П. Стаханову, Ю. К. Гуськову, В. П. Пащенко за полезные дискуссии.

Москва

Поступила в редакцию
16 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Grad. Механика, № 5, 1952.
2. И. И. Ольховский. Докл. АН СССР, 123, № 2, 262, 1958.
3. Р. Я. Кучеров, Л. Э. Рикенглаз. Ж. эксперим. и теор. физ., 37, вып. 1. 125, 1959.
4. H. Yang. Phys. fluids, 5, № 12, 1580, 1962.
5. М. Я. Алиевский, В. М. Жданов. Прикл. матем. и техн. физ., № 5, 1963.
6. В. П. Кармазин, И. П. Стаханов. Прикл. матем. и техн. физ., № 5, 1963.
7. Б. Дэвисон. Теория переноса нейтронов, Госатомиздат, 1960.
8. Л. Н. Добрецов. Электронная и ионная эмиссия, Гостехиздат, 1952.
9. Р. Я. Кучеров, Л. Э. Рикенглаз. Ж. техн. физ., XXXII, № 10, 1275, 1962.
10. И. П. Стаханов, А. С. Степанов. Ж. техн. физ. (в печати).